
Vorwort für Studierende

Lang ist der Weg durch Lehren,
kurz und wirksam durch Beispiele.
Lucius Annaeus Seneca

Welches Ziel verfolgt dieses Buch?

Die Zielgruppe für dieses Buch sind Studierende der Mathematik, der Natur- und Technikwissenschaften sowie der Informatik. Es soll helfen, die häufig auftretenden Schwierigkeiten im Verständnis der Lehrveranstaltungen Mathematik an einer Hochschule am Anfang des Studiums sowie beim später erfolgenden Einstieg in ausgewählte zentrale Themen der Fachausbildung zu verringern.

Wie werden die Absichten umgesetzt?

In den Lehrveranstaltungen Mathematik an einer Hochschule sowie in der Fachliteratur dieser Disziplin ist es üblich, deduktiv vorzugehen und die zu einer Definition hinführenden Überlegungen und Absichten meist nicht zu erwähnen. Für einen Studierenden scheint es so, als ob die Definitionen „vom Himmel fallen“ und es bleibt ihr bzw. ihm nichts weiter übrig, als die eingeführte Begrifflichkeit zunächst zur Kenntnis zu nehmen und darauf zu hoffen, dass aus den danach erarbeiteten Sätzen, Bemerkungen und Anwendungen rückwirkend der Sinn der Begriffsbildung erschlossen werden kann.

Die Erkenntnisgewinnung in diesem Buch erfolgt dagegen überwiegend induktiv, indem Gesetzmäßigkeiten an Sonderfällen oder Beispielen erarbeitet und anschließend verallgemeinert werden. Wir orientieren uns am ersten Satz des folgenden Zitats von Albert Einstein, die begriffliche Präzisierung und theoretische Fundierung überlassen wir der Fachausbildung: „Wenn wir an etwas arbeiten, dann steigen wir vom hohen logischen Roß herunter und schnüffeln am Boden mit der Nase herum. Danach verwischen wir unsere Spuren wieder, um die Gottähnlichkeit zu erhöhen.“

Die von uns gewählte Vorgehensweise ist in den Naturwissenschaften etabliert und dort dadurch legitimiert, dass sie zu einer konsistenten Theorie führen muss, die sich in unterschiedlichen Anwendungen sowie bei der Hypothesenbildung bewährt. Wir sind der Meinung, dass auch in der Mathematikausbildung in der Phase der Ersterarbeitung neuer Inhalte der Einsatz der induktive Methode berechtigt ist, weil

damit das Erwerben von Verständnis sowie das Entstehen von Erfolgserlebnissen wesentlich gefördert werden können.

Zur Realisierung der intendierten Ziele wird folgendermaßen vorgegangen:

- Es wird an die in der Schule gelernten mathematischen Inhalte direkt angeknüpft, indem Begriffserweiterungen benannt und neue Begriffe mit solchen Hintergrundinformationen eingeführt werden, dass sie einsichtig sind.
- Zur Erhöhung der Verständlichkeit werden Verfahren und Begriffe an typischen Beispielen verdeutlicht und durch viele Abbildungen illustriert.
- Im Text werden unterschiedliche gebräuchliche Notationsformen vorgestellt und differierende Begriffsbildungen in unterschiedlichen Fachrichtungen oder Kontexten thematisiert, um Verständnisschwierigkeiten zu reduzieren und Quellen von Missverständnissen zu beseitigen.
- Um den zentralen Gedankengang nicht zu zerstören, werden auf eine vollständige Theoriebildung sowie die exakte theoretische Fundierung verzichtet. Beweise werden sparsam an den Stellen eingesetzt, die eine zentrale Herangehensweise einer mathematischen Teildisziplin verdeutlichen.

Was soll dieses Buch nicht leisten?

Nicht intendiert sind Wiederholungen des Schulstoffs, da diesbezügliche Lücken mithilfe von Schulbüchern und allgemeinen Nachschlagewerken eigenständig geschlossen werden können und müssen. Außerdem soll dieses Buch nicht die Lehrveranstaltungen der Hochschule ersetzen, sondern parallel zu diesen genutzt werden und entsprechend der genannten Zielsetzung helfen, häufig beobachtbare Verständnisschwierigkeiten zu reduzieren.

Wie ist das Buch aufgebaut?

Die inhaltliche Schwerpunktsetzung zu diesem Buch ergibt sich aus dem erheblichen Unterschied zwischen den im Mathematikunterricht der Schule erworbenen Kompetenzen und den in vielen Fachbüchern und Vorlesungsskripten vorausgesetzten fachlichen und methodischen Kenntnissen. Auch Studentenforen verschiedener Fachrichtungen zeigen deutlich, wo besonders Studienanfängern „der Schuh drückt“.

Das vorliegende Buch gliedert sich in vier Kapitel. Die ersten beiden Kapitel haben den Charakter der Bereitstellung von Werkzeugen, mit denen in unterschiedlichen Kontexten gearbeitet wird, während in den folgenden beiden Kapiteln Inhalte der Schulmathematik schrittweise erweitert werden bis ein Niveau erreicht ist, auf dem an einer Hochschule weitergearbeitet werden kann.

Das **erste Kapitel** erweitert den Zahlbegriff, indem die aus der Schule bekannten Zahlenmengen um die komplexen Zahlen ergänzt werden. Den Zugang bildet das Gleichungslösen, um analog zu den in der Schule thematisierten Zahlbereichserweiterungen vorzugehen. Der Schwerpunkt liegt auf den unterschiedlichen Darstellungsformen komplexer Zahlen sowie auf der Berechnung komplexer Wurzeln und Logarithmen.

Im **zweiten Kapitel** werden Matrizen und ihre Determinanten thematisiert. Den Ausgangspunkt bilden das Gauß'sche Eliminationsverfahren und das Gauß-Jordan-Verfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen, die aus der Schule bekannt sind.

Im **dritten Kapitel** werden die Vorkenntnisse aus der Analysis in anderer Weise als in der Schulmathematik zusammenfassend strukturiert und erheblich erweitert. Dabei stehen der Gedanke der Linearisierung sowie der Begriff Differenzial im Mittelpunkt der Betrachtungen. Die von uns favorisierte Betrachtungsweise der Analysis weist Bezüge zu den historischen Wurzeln der Infinitesimalrechnung auf, besitzt eine hohe Anschaulichkeit und ist in verschiedene Richtungen der modernen Mathematik erweiterbar.

Das **vierte Kapitel** zum Thema Vektoren ist das mit Abstand umfangreichste in diesem Buch. Das ist dadurch bedingt, dass Vektoren in unterschiedlichen Disziplinen benutzt werden und dies in sehr unterschiedlicher Weise erfolgt. Deshalb werden verschiedene Aspekte dieses Begriffs betrachtet und voneinander abgegrenzt, um Missverständnisse zu vermeiden. Wir knüpfen auch hier an die Vorkenntnisse aus der Schule zur Verwendung von Vektoren in der klassischen Physik und der euklidischen Geometrie an.

Wie kann mit dem Buch gearbeitet werden?

Die einzelnen Abschnitte des Buches wurden unter Beachtung fachlicher Erfordernisse so konzipiert, dass sie weitgehend unabhängig voneinander sind. Dies soll das gezielte Nachschlagen eines interessierenden Inhaltes ermöglichen.

Die im Text enthaltenen Hervorhebungen mit wesentlichen Inhalten und Zusammenfassungen dienen der Orientierung und Schwerpunktsetzung, außerdem bieten sie den Nutzern mit knappem Zeitbudget eine Überprüfungsmöglichkeit, ob das Auslassen von Textpassagen möglich ist.

Wenn das Studium des vorliegenden Buches zum Verständnis von Mathematik beiträgt und das Gehirn der Studierenden aus diesem Grund Glückshormone ausschüttet, dann ist sein Zweck erfüllt.

Dresden, Mai 2015

Jürgen Wagner

Vorwort für Dozenten

Alles auf einmal tun tu wollen,
zerstört alles auf einmal.
Georg Christoph Lichtenberg

Dieses Buch soll den systematischen Wissenserwerb auf dem fachwissenschaftlich notwendigen Abstraktionsgrad der Lehrveranstaltungen Mathematik an Hochschulen unterstützen. Der Versuch, dabei die induktive Methode sowie die genetische Begriffsbildung in der Phase der Erstvermittlung mathematischer Inhalte auch an einer Hochschule einzusetzen, ist ambitioniert. Er ist durch die Hypothese motiviert, dass durch dieses didaktische Vorgehen eine größere Anzahl von Studierenden als bisher zu Verständnis und Erfolgserlebnissen gelangen können.

Der Autor ist der Ansicht, dass besonders für Studienanfänger die übliche Algebraisierung der gesamten Mathematik eine extreme Herausforderung darstellt, da sie nach der Mathematikausbildung an einer allgemeinbildenden Schule weder über den dafür erforderlichen Abstraktionsgrad verfügen noch die Feinheiten der mathematischen Fachsprache und Notationsformen beherrschen können.

Insbesondere durch folgende Maßnahmen wird versucht, die Lehrveranstaltungen der Hochschule zu flankieren, um den Studierenden das Verständnis zu erleichtern:

- Beim **Bilden eines Begriffs** werden unterschiedliche Aspekte des Begriffsinhalts und des Begriffsumfangs schrittweise eingeführt und es erfolgt ein Perspektivwechsel durch Thematisierung der unterschiedlichen Verwendung des Begriffs in verschiedenen Disziplinen. Mit der Definition eines Begriffs wird sparsam umgegangen, wenn diese mit schwer zu erfassenden Bedingungen verbunden ist oder wenn sie die komplizierte Verknüpfung mehrerer anderer abstrakter Fachbegriffe erfordert. Am Beispiel von Definitionen des Skalarprodukts im Abschnitt „Vektoren als Elemente eines Vektorraums“ wird den Studierenden exemplarisch gezeigt, wie eine Verknüpfung mit mehreren anderen abstrakten Fachbegriffen zweckmäßig analysiert werden kann.
- Vor dem **Aufstellen von Behauptungen** werden in der Regel Hypothesen durch Verallgemeinerungen von Spezialfällen gebildet.

- Das **Begründen von Behauptungen** erfolgt häufig argumentativ unter Einbeziehung von Plausibilitätsbetrachtungen statt in formeller Notation. In diesen Fällen wird auf den exakten Beweis in der Fachdisziplin hingewiesen. Im Abschnitt „Vektoren als Elemente eines Vektorraums“ werden einige Sätze bewiesen, um die typische Vorgehensweise beim Führen algebraischer Beweise zu illustrieren.

Damit die neu erarbeiteten Inhalte in einen an der jeweiligen Hochschule bevorzugten theoretischen Rahmen eingebettet werden können, sind im Text zusätzliche vertiefende Bemerkungen angeführt.

Folgende Inhalte des Buches sind für die Studierenden nach dem erfolgreichen Abschluss der Schulausbildung neu und so aufbereitet, dass sie an deren Vorkenntnisse anknüpfen:

- Im **ersten Kapitel** sind die Einführung der Zahlenmenge der komplexen Zahlen und das Rechnen mit diesen Zahlen neue Inhalte. Die Schwerpunktsetzung dieses Kapitels orientiert sich an Anwendungen.
- Das **zweite Kapitel** erweitert die Vorkenntnisse der Studierenden hinsichtlich unterschiedlicher Formen der Indexnotation, der Verwendung des Summensymbols und der Einstein'schen Summenkonvention sowie der Berechnung der Determinante einer Matrix mithilfe des Levi-Civita-Symbols und der Leibniz-Formel.
- Im **dritten Kapitel** werden an neuen Inhalten mehrstellige Funktionen, partielle Ableitungen, Richtungsableitungen und kovariante Ableitungen sowie der Satz von Taylor behandelt.

Im Mittelpunkt der Betrachtungen stehen der Gedanke der Linearisierung sowie der Begriff Differenzial, der sowohl in der Differenzial- als auch der Integralrechnung als zentraler Terminus benutzt wird, da er einen einheitlichen Zugang zur modernen Analysis, Differenzialgeometrie und Topologie bietet.

Bei Erfordernis können an der Hochschule Betrachtungen zur Fréchet- und Gâteaux-Ableitung für normierte Räume oder zur Cartan-Ableitung für Differentialformen direkt angeschlossen werden. Beim Satz von Taylor erfolgen im Buch keine Restgliedbetrachtungen, deshalb wird auch auf die Landau-Symbole verzichtet.

Mit der Berechnung des Gradienten eines Skalarfeldes wird ein grundlegender Inhalt der Vektoranalysis betrachtet. Die Berechnung von Vektorfeldern und Mehrfachanwendungen des Nabla-Operators bauen auf diesem Inhalt auf, doch sie werden in die Fachausbildung an der Hochschule verlagert.

- Die Erweiterung der Vorkenntnisse der Studierenden zu Vektoren im **vierten Kapitel** bezieht sich insbesondere auf die Unterscheidung zwischen kontravarianten und kovarianten Vektorkoordinaten, die Betrachtung von Vektoren in nichtaffinen Koordinatensystemen, tensorielle Produkte von Vektoren, Koordinatentransformationen sowie auf Vektoren als Tensoren und als Elemente eines Vektorraums. Die Behandlung dualer Vektoren in den Abschnitten „Verwendung affiner Koordinaten“ und „Vektoren als Elemente eines Vektorraums“ erfolgt auf unterschiedlichen Abstraktionsebenen und vor dem Hintergrund der Anwendungsorientierung bzw. der mathematischen Theoriebildung.

Im vierten Kapitel soll der Boden geebnet werden für vielfältige Anwendungen besonders in der Algebra, Physik, Geodäsie und Informatik.

Es wäre wünschenswert, auch in der Mathematikausbildung der Hochschule in der Phase der Ersterarbeitung neuer Inhalte die induktive Methode sowie eine genetische Begriffsbildung an geeigneten Stellen einzusetzen und erst danach zu einer deduktiven Theorie sowie zur Betrachtung künstlich konstruierter außergewöhnlicher Sonderfälle überzugehen. Der Autor vertritt die Position von Walther Lietzmann, der zu dieser Thematik ausführte: „... man soll sich... hüten, solche pathologischen Dinge als das Normale hinzunehmen. Gewiß kommen zuweilen auch Kälber mit zwei Köpfen vor... aber darum wird es dem Zoologen nicht einfallen, nun erst den allgemeinen Begriff Kalb mit n Köpfen zu bilden und dann so nebenbei als einen ganz speziellen Fall $n = 1$, die Kälber mit einem Kopf, zu behandeln.“

Der Autor hofft, die Dozenten für Mathematik an einer Hochschule bei der didaktischen Konzeption ihrer Lehrveranstaltungen unterstützen zu können und ihnen ein hilfreiches Angebot an vertiefenden Studien für ihre Studentinnen und Studenten zu unterbreiten.

Dresden, Mai 2015

Jürgen Wagner

Einstieg in die Hochschulmathematik
Verständlich erklärt vom Abiturniveau aus
Wagner, J.

2016, XIX, 292 S. 96 Abb., 14 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-662-47512-6