

Inhaltsverzeichnis

7.1	Lokale Symmetrien	288
7.1.1	Quantenelektrodynamik	288
7.1.2	Yang-Mills-Theorien	293
7.2	Die Lagrange-Dichte der Quantenchromodynamik	299
7.3	Zufällige globale Symmetrien von \mathcal{L}_{QCD}	302
7.3.1	Chiraler Grenzfall	302
7.3.2	Die chirale Algebra	306
7.3.3	Quarkmassen und explizite Brechung der chiralen Symmetrie	308
7.4	Aufgaben	311
	Literatur	316

Zum gegenwärtigen Zeitpunkt (2015) stellt das Eichprinzip die erfolgreichste Methode dar, Wechselwirkungen zwischen den Elementarteilchen auf dem submikroskopischen Niveau zu erklären. In Kap. 6 wurde das Noether-Theorem für *globale*, innere Symmetrien diskutiert. Die Methode von [Gell-Mann und Lévy \(1960\)](#), die von lokalen, infinitesimalen Transformationen Gebrauch macht, wurde lediglich dazu verwendet, die Ströme und deren Divergenzen auf effiziente Weise zu bestimmen. Das Eichprinzip basiert auf der Forderung nach Invarianz der Lagrange-Dichte bzgl. *lokaler* Eichtransformationen. Zu diesem Zweck werden zusätzliche Eichfelder eingeführt, deren Feldquanten die Wechselwirkungen zwischen den Elementarteilchen über den Austausch sog. intermediärer Bosonen entstehen lassen. Das bekannteste Beispiel einer Eichtheorie ist die Quantenelektrodynamik, die auf der abelschen Gruppe $U(1)$ basiert. Für den Fall einer abelschen Gruppe besitzen die Eichfelder keine Selbstwechselwirkungen. Nicht-abelsche Theorien (z. B. die Quantenchromodynamik) werden als *Yang-Mills-Theorien* bezeichnet und beinhalten über die Wechselwirkung der Eichfelder mit den Materiefeldern hinaus auch direkte Wechselwirkungen der Eichfelder untereinander. Als weiterführende Literatur verweisen wir auf [Abers und Lee \(1973\)](#), [Itzykson und Zuber \(1980\)](#), [Cheng und Li \(1984\)](#), [Georgi \(1984\)](#), [O’Raifeartaigh \(1986\)](#) und [Weinberg \(1996\)](#).

7.1 Lokale Symmetrien

7.1.1 Quantenelektrodynamik

Die Formulierung der *Quantenelektrodynamik* (QED) in ihrer heutigen Form hat ihren Ursprung in den bahnbrechenden Arbeiten von [Heisenberg und Pauli \(1929, 1930\)](#). Die QED liefert eine relativistische Beschreibung der fundamentalen Wechselwirkung von elektrisch geladenen Teilchen wie dem Elektron mit dem elektromagnetischen Feld. Die Wechselwirkung zwischen geladenen Teilchen erfolgt durch den Austausch sog. virtueller Photonen. Auf dem Weg zu einer konsistenten Quantenfeldtheorie müssen im Fall der QED u. a. die beiden folgenden Probleme gelöst werden:

1. Eine kanonische Quantisierung des Viererpotenzials \mathcal{A}_μ analog zu Anhang [A.4.2](#) ist ungeeignet, weil das zu \mathcal{A}_0 konjugierte Impulsfeld verschwindet.
2. Bei der Berechnung physikalischer Observablen mithilfe der Störungstheorie treten jenseits der niedrigsten Ordnung Unendlichkeiten auf, die sich im Rahmen eines Renormierungsprogramms systematisch identifizieren und eliminieren lassen.

Eine Diskussion der Lösung dieser Schwierigkeiten soll hier nicht erfolgen, sie werden in den einschlägigen Quantenfeldtheoriebüchern ausführlich behandelt [siehe z. B. [Bjorken und Drell \(1965\)](#), [Itzykson und Zuber \(1980\)](#), [Ryder \(1985\)](#), [Peskin und Schroeder \(1995\)](#), [Weinberg \(1995\)](#)].

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit einer Diskussion des gruppentheoretischen Aspekts zufrieden geben und die Lagrange-Dichte der Quantenelektrodynamik mithilfe des Eichprinzips „herleiten“. Ausgangspunkt ist die Lagrange-Dichte eines freien Elektrons,

$$\mathcal{L}_0(\Psi, \partial_\mu \Psi) = \bar{\Psi}(i \not{\partial} - m)\Psi, \quad (7.1)$$

die invariant bzgl. einer *globalen* U(1)-Transformation ist:

$$\Psi(x) \mapsto \Psi'(x) = e^{-i\Theta} \Psi(x), \quad \bar{\Psi}(x) \mapsto \bar{\Psi}'(x) = \bar{\Psi}(x) e^{i\Theta}, \quad (7.2)$$

wobei $\Theta \in [0, 2\pi]$ nicht von x abhängt. Die Invarianz der Lagrange-Dichte sieht man wie folgt:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}\Psi &\mapsto \bar{\Psi} \underbrace{e^{i\Theta} e^{-i\Theta}}_{=1} \Psi = \bar{\Psi}\Psi, \\ \bar{\Psi}\gamma_\mu \partial^\mu \Psi &\mapsto \bar{\Psi} e^{i\Theta} \gamma_\mu \partial^\mu (e^{-i\Theta} \Psi) = \bar{\Psi} e^{i\Theta} e^{-i\Theta} \gamma_\mu \partial^\mu \Psi = \bar{\Psi}\gamma_\mu \partial^\mu \Psi. \end{aligned}$$

Die globale U(1)-Invarianz der Lagrange-Dichte \mathcal{L}_0 unter den Transformationen gemäß (7.2) wird auch als Invarianz bzgl. *Eichtransformationen der ersten Art* bezeichnet.

Wir betrachten nun eine infinitesimale Transformation

$$\Psi(x) \mapsto \Psi(x) - i\epsilon\Psi(x)$$

und benutzen den Trick von [Gell-Mann und Lévy \(1960\)](#) der Ersetzung $\epsilon \rightarrow \epsilon(x)$, um den erhaltenen Strom zu identifizieren. Für die Änderung der Lagrange-Dichte erhalten wir

$$\delta\mathcal{L}_0 = -i\partial_\mu\epsilon(x)i\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x) = \partial_\mu\epsilon(x)\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x),$$

woraus sich mithilfe von [\(6.6a\)](#) die folgende erhaltene Viererstromdichte ergibt:

$$J^\mu = \frac{\partial\delta\mathcal{L}_0}{\partial\partial_\mu\epsilon} = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi. \quad (7.3)$$

Dazu gehört der Ladungsoperator

$$Q = \int d^3x : \Psi^\dagger(t, \vec{x})\Psi(t, \vec{x}) :,$$

der die Anzahl der Elektronen minus der Anzahl der Positronen in einem Zustand angibt. Hierbei bezeichnet „:“ die Normalordnungsvorschrift aus [\(A.78\)](#). Mithilfe der Quantisierung des Dirac-Feldes (siehe Anhang [A.4.3](#)) drücken wir den Ladungsoperator durch die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Elektronen und Positronen aus (siehe Aufgabe [7.1](#)):

$$Q = \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\vec{p})} [b_r^\dagger(\vec{p})b_r(\vec{p}) - d_r^\dagger(\vec{p})d_r(\vec{p})].$$

Das Minuszeichen für den Beitrag der Antiteilchen ist mit der Normalordnungsvorschrift verknüpft. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} Q|e^-(\vec{p}, r)\rangle &= Q b_r^\dagger(\vec{p})|0\rangle = ([Q, b_r^\dagger(\vec{p})] + b_r^\dagger(\vec{p})Q)|0\rangle = |e^-(\vec{p}, r)\rangle, \\ Q|e^+(\vec{p}, r)\rangle &= Q d_r^\dagger(\vec{p})|0\rangle = -|e^+(\vec{p}, r)\rangle. \end{aligned}$$

Dabei haben wir von

$$[Q, b_r^\dagger(\vec{p})] = b_r^\dagger(\vec{p}), \quad [Q, d_r^\dagger(\vec{p})] = -d_r^\dagger(\vec{p})$$

und $Q|0\rangle = 0$ Gebrauch gemacht.¹ Wir zeigen exemplarisch die erste Relation:

$$[Q, b_r^\dagger(\vec{p})] = \sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E(\vec{q})} [b_s^\dagger(\vec{q})b_s(\vec{q}) - d_s^\dagger(\vec{q})d_s(\vec{q}), b_r^\dagger(\vec{p})].$$

¹ Da Vernichtungsoperatoren den Grundzustand vernichten, $b_r(\vec{p})|0\rangle = 0 = d_r(\vec{p})|0\rangle$, gilt $Q|0\rangle = 0$.

Für Fermionen lösen wir den Kommutator mithilfe von

$$[ab, c] = a\{b, c\} - \{a, c\}b$$

auf und wenden die Antikommutatorrelationen in (A.75a), (A.76a), (A.76c) und (A.76d) an:

$$\dots = \sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 2E(\vec{q})} b_s^\dagger(\vec{q}) (2\pi)^3 2E(\vec{q}) \delta^3(\vec{q} - \vec{p}) \delta_{sr} = b_r^\dagger(\vec{p}).$$

Wir suchen nun nach einer Verallgemeinerung der partiellen Ableitung $\partial_\mu \Psi(x)$ dergestalt, dass \mathcal{L}_0 auch invariant bzgl. *lokaler* Transformationen ist [Weyl (1929)]. Um der per Konvention negativen elektrischen Ladung des Elektrons ($q_e = -1$ in Einheiten der Elementarladung $e > 0$) Rechnung zu tragen, betrachten wir im Sinne der Darstellungstheorie die Zuordnung

$$U(1) \ni e^{-i\Theta} \mapsto e^{-i\Theta q_e} = e^{i\Theta}$$

und gehen von folgender lokaler Transformation des Dirac-Feldes aus:

$$\Psi(x) \mapsto e^{i\Theta(x)} \Psi(x).$$

Wir führen eine sog. *kovariante Ableitung* $D_\mu \Psi(x)$ ein, von der wir die Transformationseigenschaft

$$D_\mu \Psi(x) \mapsto [D_\mu \Psi(x)]' = D'_\mu \Psi'(x) \stackrel{!}{=} e^{i\Theta(x)} D_\mu \Psi(x) \quad (7.4)$$

fordern. Mit Blick auf eine spätere Verallgemeinerung verlangen wir also, dass die kovariante Ableitung eines Objektes – hier des Dirac-Feldes eines Elektrons – genauso transformieren soll wie das Objekt selbst. Zu diesem Zweck führt man ein sog. *Eichfeld* $\mathcal{A}_\mu(x)$ ein, das gemäß

$$\mathcal{A}_\mu(x) \mapsto \mathcal{A}'_\mu(x) = \mathcal{A}_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \Theta(x), \quad e > 0, \quad (7.5)$$

transformieren soll. Somit ergibt sich für die kovariante Ableitung tatsächlich

$$\begin{aligned} D_\mu \Psi(x) &:= (\partial_\mu - i e \mathcal{A}_\mu(x)) \Psi(x) \\ &\mapsto D'_\mu \Psi'(x) \\ &= (\partial_\mu - i e \mathcal{A}_\mu(x) - i \partial_\mu \Theta(x)) (e^{i\Theta(x)} \Psi(x)) \\ &= e^{i\Theta(x)} (\partial_\mu + i \partial_\mu \Theta(x) - i e \mathcal{A}_\mu(x) - i \partial_\mu \Theta(x)) \Psi(x) \\ &= e^{i\Theta(x)} (\partial_\mu - i e \mathcal{A}_\mu(x)) \Psi(x). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Damit erhalten wir als neue Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_0(\Psi, D_\mu \Psi) = \bar{\Psi}(i \not{D} - m)\Psi = \mathcal{L}_0(\Psi, \partial_\mu \Psi) + e \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \mathcal{A}_\mu, \quad (7.7)$$

die nun invariant ist bzgl. sog. *Eichtransformationen der zweiten Art*:

$$\Psi(x) \mapsto e^{i\Theta(x)}\Psi(x), \quad (7.8a)$$

$$\mathcal{A}_\mu(x) \mapsto \mathcal{A}_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \Theta(x). \quad (7.8b)$$

Die Bewegungsgleichung für Ψ ergibt sich aus

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \bar{\Psi}} = i \not{D} \Psi - m \Psi = (i \not{\partial} + e \not{\mathcal{A}} - m)\Psi = 0. \quad (7.9)$$

Ist $\Psi_{\mathcal{A}}(x)$ Lösung der Bewegungsgleichung in Anwesenheit eines vorgegebenen \mathcal{A}_μ , so ist

$$\Psi_{\mathcal{A}'}(x) := e^{i\Theta(x)}\Psi_{\mathcal{A}}(x)$$

eine Lösung der Bewegungsgleichung in Anwesenheit von $\mathcal{A}'_\mu = \mathcal{A}_\mu + \partial_\mu \Theta/e$, denn es gilt:

$$\begin{aligned} & (i \not{\partial} + e \not{\mathcal{A}} + \partial_\mu \Theta \gamma^\mu - m)\Psi_{\mathcal{A}'} \\ &= (i \not{D}' - m)e^{i\Theta(x)}\Psi_{\mathcal{A}}(x) \stackrel{(7.4)}{=} e^{i\Theta(x)}(i \not{D} - m)\Psi_{\mathcal{A}}(x) = 0. \end{aligned}$$

Im Folgenden diskutieren wir die Einbettung in die Begriffsbildung der Gruppentheorie. Zu diesem Zweck erklären wir die Menge $M = \{(\mathcal{A}_\mu, \Psi_{\mathcal{A}})\}$ als Menge aller Paare, die aus einem glatten Eichfeld \mathcal{A}_μ und der zugehörigen Lösung $\Psi_{\mathcal{A}}$ der Bewegungsgleichung in Anwesenheit von \mathcal{A}_μ bestehen. Im Sinne der Gruppentheorie definieren (7.8a) und (7.8b) eine Operation A (siehe Definition 1.8 in Abschn. 1.3) der Gruppe $U(1)$ auf M , wobei die Gruppenelemente jetzt glatt von Punkt zu Punkt im Minkowski-Raum variieren dürfen, d. h. wir ersetzen Θ durch² $\Theta(x)$:

$$A\left(\Theta(x), (\mathcal{A}_\mu(x), \Psi_{\mathcal{A}}(x))\right) := (\mathcal{A}_\mu(x) + \partial_\mu \Theta(x)/e, e^{i\Theta(x)}\Psi_{\mathcal{A}}(x)).$$

Wir überprüfen die beiden geforderten Eigenschaften gemäß Definition 1.8:

1.

$$A\left(0, (\mathcal{A}_\mu(x), \Psi_{\mathcal{A}}(x))\right) = (\mathcal{A}_\mu(x), \Psi_{\mathcal{A}}(x)).$$

² Der Einfachheit halber schreiben wir anstelle des Gruppenelements den Parameter Θ .

2.

$$\begin{aligned}
& A\left(\Theta_1(x), A\left(\Theta_2(x), (\mathcal{A}_\mu(x), \Psi_{\mathcal{A}}(x))\right)\right) \\
&= A\left(\Theta_1(x), (\mathcal{A}_\mu(x) + \partial_\mu \Theta_2(x)/e, e^{i\Theta_2(x)} \Psi_{\mathcal{A}}(x))\right) \\
&= (\mathcal{A}_\mu(x) + \partial_\mu \Theta_2(x)/e + \partial_\mu \Theta_1(x)/e, e^{i(\Theta_1(x) + \Theta_2(x))} \Psi_{\mathcal{A}}(x)) \\
&= A(\Theta_1(x) + \Theta_2(x), (\mathcal{A}_\mu(x), \Psi_{\mathcal{A}}(x))).
\end{aligned}$$

Bislang wurde das Eichfeld als äußeres Feld in die Theorie eingebracht, in dessen Anwesenheit die Dirac-Gleichung gelöst wird. Nun wollen wir die Theorie dahingehend ausweiten, dass wir \mathcal{A}_μ als dynamische Variable interpretieren. Wir erwarten für \mathcal{A}_μ eine Lorentz-kovariante partielle Differenzialgleichung zweiter Ordnung und ergänzen deshalb die Lagrange-Dichte mit einem „kinetischen“ Term. Zu diesem Zweck definieren wir den Feldstärketensor [siehe (A.35)],

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} := \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu,$$

dessen Komponenten aus dem elektrischen Feld \vec{E} und dem magnetischen Feld \vec{B} zusammengesetzt sind. Das Transformationsverhalten des Feldstärketensors unter (7.8b) lautet

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} \mapsto \partial_\mu \mathcal{A}_\nu + \frac{1}{e} \partial_\mu \partial_\nu \Theta - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu - \frac{1}{e} \partial_\nu \partial_\mu \Theta = \mathcal{F}_{\mu\nu},$$

unter der Annahme, dass Θ mindestens zweifach stetig differenzierbar ist. Physikalisch bedeutet die Invarianz im Falle des Elektromagnetismus, dass elektrisches und magnetisches Feld Observablen sind, d. h. von der Eichung unabhängig sind.

Für die *Lagrange-Dichte der QED* erhalten wir schließlich

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\Psi} i \gamma^\mu (\partial_\mu - i e \mathcal{A}_\mu) \Psi - m \bar{\Psi} \Psi - \frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}. \quad (7.10)$$

Nach der Quantisierung werden die Feldquanten des dynamischen Eichfelds mit den *Photonen* identifiziert.

Anmerkungen

1. Die dynamischen Freiheitsgrade der QED sind einerseits das *Materiefeld* Ψ zur Beschreibung des Elektrons und das *Eichfeld* \mathcal{A}_μ , das zum Zweck der Eichinvarianz eingeführt wurde.
2. Ein Massenterm für das Photon [siehe (A.43b)],

$$\frac{1}{2} M^2 \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}^\mu,$$

würde die Eichinvarianz zerstören:

$$\frac{1}{2}M^2\mathcal{A}_\mu\mathcal{A}^\mu \mapsto \frac{1}{2}M^2\left(\mathcal{A}_\mu\mathcal{A}^\mu + \frac{2}{e}\partial_\mu\Theta\mathcal{A}^\mu + \frac{1}{e^2}\partial_\mu\Theta\partial^\mu\Theta\right) \neq \frac{1}{2}M^2\mathcal{A}_\mu\mathcal{A}^\mu.$$

Das Photon ist also masselos.³

3. Die Kopplung des Photons an Materiefelder wird durch deren Transformationsverhalten bzgl. $U(1)$ diktiert. Schreiben wir einem Materiefeld Ψ_q die Ladung q in Einheiten der Elementarladung zu, d. h.

$$\Psi_q(x) \mapsto e^{-iq\Theta}\Psi_q(x),$$

dann erhalten wir die sog. *minimale Substitution* ($\partial_\mu \mapsto \partial_\mu + ieq\mathcal{A}_\mu$):

$$D_\mu\Psi_q(x) = (\partial_\mu + ieq\mathcal{A}_\mu(x))\Psi_q(x).$$

Mit dieser Vorzeichenkonvention gilt für das Elektron $q_e = -1$, für das Proton $q_p = 1$ usw. Die Quantisierung der Ladung lässt sich allein aus der QED nicht erklären.

4. Das Eichprinzip erzeugt auf einfache Weise eine Wechselwirkung zwischen dem elektromagnetischen Feld und Materie:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -(-e)\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\mathcal{A}_\mu = -J^\mu\mathcal{A}_\mu.$$

Insbesondere erkennen wir dieselbe Form der Wechselwirkung wieder wie in der klassischen Physik [siehe (A.34)].

5. Vom Standpunkt der Eichinvarianz wäre z. B. die Wechselwirkung des Magnetfelds mit einem *anormalen magnetischen Moment* $e\kappa/(2m)$ erlaubt [siehe [Bjorken und Drell \(1964\)](#), Kapitel 4, Aufgabe 2.]:

$$\mathcal{L}_{\text{int}}^{\text{a.m.m.}} = -\frac{e\kappa}{4m}\mathcal{F}_{\mu\nu}\bar{\Psi}\sigma^{\mu\nu}\Psi, \quad \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu].$$

Die Forderung nach der Renormierbarkeit der Theorie im traditionellen Sinne schließt eichinvariante Kopplungen dieser Art aus. Hierbei handelt es sich allerdings um kein gruppentheoretisches Argument.

6. Wegen der zugrunde liegenden abelschen Symmetrie koppelt das Photon nicht direkt an sich selbst.

7.1.2 Yang-Mills-Theorien

Wir wenden uns nun der Frage zu, wie eine Eichtheorie aussieht, die nicht auf einer abelschen Gruppe fußt. Im Jahr 1954 unternahmen Yang und Mills den Versuch,

³ Wir werden in Kap. 8 sehen, dass Eichbosonen im Zusammenhang mit einer spontanen Symmetriebrechung eine Masse bekommen können.

die Isospinsymmetrie der starken Wechselwirkung auf der Grundlage einer lokalen $SU(2)$ -Symmetrie zu erklären (siehe Aufgabe 7.5). Vom heutigen Standpunkt aus resultiert die Isospinsymmetrie aus einer zufälligen globalen Symmetrie der Quantenchromodynamik, ist also keine fundamentale Eichsymmetrie (siehe Abschn. 7.3). Dennoch war das Verfahren von Yang und Mills wegweisend, weil es die Tür für andere nicht-abelsche Eichtheorien wie etwa die QCD oder, in Verbindung mit dem Mechanismus einer spontanen Symmetriebrechung, das Standardmodell geöffnet hat.

Im Folgenden werden wir die Konstruktion einer *Yang-Mills-Theorie* in Analogie zur Diskussion der QED entwickeln. Gegeben sei eine Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_0(\Phi, \partial_\mu \Phi), \quad \Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n), \quad (7.11)$$

die invariant bzgl. einer globalen Transformation der „Materie-Felder“ Φ ist. Die zugrunde liegende Symmetriegruppe G sei eine kompakte Lie-Gruppe mit r abstrakten Generatoren X_a und Strukturkonstanten C_{abc} der Lie-Algebra:

$$[X_a, X_b] = i C_{abc} X_c.$$

Wir erinnern uns daran, dass aufgrund von Satz 3.3 in Abschn. 3.2 jede endlichdimensionale Darstellung einer kompakten Lie-Gruppe äquivalent zu einer unitären Darstellung ist und vollständig in eine direkte Summe irreduzibler Darstellungen zerlegt werden kann. Wir denken dabei typischerweise an die Gruppen $SU(N)$ oder $SO(N)$, die jeweils durch $r = N^2 - 1$ bzw. $r = N(N - 1)/2$ Generatoren gekennzeichnet sind. Denkbar sind auch Symmetriegruppen aus direkten Produkten.

Es sei g ein Gruppenelement (der Zusammenhangskomponente G_0 von G), das wir mittels der reellen Parameter $\Theta = (\Theta_1, \dots, \Theta_r)$ charakterisieren. Die Felder Φ sollen folgendermaßen bzgl. einer vollständig reduziblen Darstellung transformieren:

$$U : g \mapsto U(g) = \exp(-i \Theta_a T_a) \quad \text{mit} \quad \Phi(x) \mapsto \Phi'(x) = U(g)\Phi(x). \quad (7.12)$$

Weil U eine unitäre Matrix ist, sind die (n, n) -Matrizen T_a , $a = 1, \dots, r$, hermitesch und erfüllen die Vertauschungsrelationen

$$[T_a, T_b] = i C_{abc} T_c. \quad (7.13)$$

Da die Darstellung vollständig reduzibel ist, sind die Matrizen T_a von einer block-diagonalen Form [siehe z. B. (6.52)]. Für ein Gruppenelement in der „Nähe“ der Identität e schreiben wir

$$g = e - i \epsilon_a X_a \quad (7.14)$$

und ordnen diesem die infinitesimale, lineare Transformation

$$U(g) = (\mathbb{1} - i \epsilon_a T_a) : \Phi(x) \mapsto (\mathbb{1} - i \epsilon_a T_a)\Phi(x) \quad (7.15)$$

zu. Wir fragen uns nun, was geschieht, wenn wir wieder für jedes x ein unterschiedliches g erlauben, d. h. g durch ein glattes $g(x)$ ersetzen und nach wie vor Invarianz von \mathcal{L} fordern, aber nun bezüglich

$$\Phi(x) \mapsto U(g(x))\Phi(x).$$

In völliger Analogie zur Diskussion der Methode von Gell-Mann und Lévy aus Abschn. 6.1 treten für lokale Parameter $\epsilon_a(x)$ Zusatzterme in der Änderung $\delta\mathcal{L}$ auf, die ihren Ursprung in den partiellen Ableitungen

$$\partial_\mu \delta\Phi(x) = -i \partial_\mu \epsilon_a(x) T_a \Phi(x) - i \epsilon_a(x) T_a \partial_\mu \Phi(x) \quad (7.16)$$

haben. In Analogie zur QED führt man eine kovariante Ableitung ein, mit der Eigenschaft [vgl. (7.4)]

$$D_\mu \Phi(x) \mapsto [D_\mu \Phi(x)]' = D'_\mu \Phi'(x) \stackrel{!}{=} (\mathbb{1} - i \epsilon_a(x) T_a) D_\mu \Phi(x), \quad (7.17)$$

d. h. die kovariante Ableitung der Felder soll wie die Felder selbst transformieren. Für diese kovariante Ableitung machen wir einen Ansatz wie in der QED,

$$D_\mu \Phi(x) = (\partial_\mu + i g T_a \mathcal{A}_{a\mu}(x)) \Phi(x), \quad (7.18)$$

wobei wir für jeden Generator X_a der abstrakten Gruppe ein Eichvierervektorfeld, kurz Eichfeld, $\mathcal{A}_{a\mu}$ einführen. Der Wert der Kopplungskonstante g muss durch den Vergleich mit dem Experiment bestimmt werden. Im Folgenden identifizieren wir die Transformationseigenschaften der Eichfelder, die aus (7.18) resultieren. Zu diesem Zweck definieren wir [siehe Georgi (1984), Abschnitt 1.3]:

$$\tilde{O} = T_a O_a, \quad (7.19)$$

wobei eine Summation über a von 1 bis r impliziert ist. Es sei \tilde{O} eine (n, n) -Matrix vom Typ der Gl. (7.19). Mit einer geschickten Wahl der T_a lässt sich O_a aus \tilde{O} herausprojizieren. Für

$$\kappa \operatorname{Sp}(T_a T_b) = \delta_{ab}$$

gilt

$$O_a = \kappa \operatorname{Sp}(T_a \tilde{O}). \quad (7.20)$$

Als Illustration sei \tilde{O} eine hermitesche $(2, 2)$ -Matrix mit der Spur Null. Wir schreiben $\tilde{O} = O_a \tau_a$, $O_a \in \mathbb{R}$. Mit

$$\frac{1}{2} \operatorname{Sp}(\tau_a \tau_b) = \delta_{ab}$$

finden wir

$$O_a = \frac{1}{2} \operatorname{Sp}(\tau_a \tilde{O}).$$

Mithilfe von (7.19) schreiben wir für die kovariante Ableitung

$$D_\mu \Phi(x) = \left(\partial_\mu + i g \widetilde{\mathcal{A}}_\mu(x) \right) \Phi(x). \quad (7.21)$$

Unter Verwendung der Forderung aus (7.17),

$$\left(\partial_\mu + i g \widetilde{\mathcal{A}}_\mu(x) + i g \widetilde{\delta \mathcal{A}}_\mu(x) \right) (\mathbb{1} - i \widetilde{\epsilon}(x)) \Phi(x) = (\mathbb{1} - i \widetilde{\epsilon}(x)) \left(\partial_\mu + i g \widetilde{\mathcal{A}}_\mu(x) \right) \Phi(x),$$

finden wir durch Vergleich der linearen „kleinen“ Terme die Bedingung

$$-i \partial_\mu \widetilde{\epsilon} + g \widetilde{\mathcal{A}}_\mu \widetilde{\epsilon} + i g \widetilde{\delta \mathcal{A}}_\mu = g \widetilde{\epsilon} \widetilde{\mathcal{A}}_\mu$$

oder

$$\widetilde{\delta \mathcal{A}}_\mu = i [\widetilde{\mathcal{A}}_\mu, \widetilde{\epsilon}] + \frac{1}{g} \partial_\mu \widetilde{\epsilon}. \quad (7.22)$$

Zunächst sieht es in dieser Gleichung so aus, als sei das Transformationsverhalten der Eichfelder von der *Darstellung* T_a der abstrakten Generatoren X_a abhängig. Dass dem nicht so ist, verifiziert man mithilfe von (7.13) und der Projektionsvorschrift aus (7.20). In das Transformationsverhalten geht über die Strukturkonstanten C_{abc} nur die Struktur der Gruppe ein (siehe Aufgabe 7.3).

Als Zwischenergebnis haben wir erreicht, dass die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_0(\Phi, D_\mu \Phi) \quad (7.23)$$

mit

$$D_\mu \Phi = (\partial_\mu + i g \widetilde{\mathcal{A}}_\mu) \Phi$$

invariant ist bzgl. der lokalen Transformation

$$\Phi(x) \mapsto \exp(-i \Theta_a(x) T_a) \Phi(x) = U(g(x)) \Phi(x), \quad (7.24a)$$

$$\widetilde{\mathcal{A}}_\mu(x) \mapsto U(g(x)) \widetilde{\mathcal{A}}_\mu(x) U^\dagger(g(x)) + \frac{i}{g} \partial_\mu U(g(x)) U^\dagger(g(x)). \quad (7.24b)$$

Mit dem Eichprinzip haben wir eine Wechselwirkung zwischen den Materie- und den Eichfeldern erzeugt. Allerdings sind die Eichbosonen bisher keine wirklichen dynamischen Freiheitsgrade, da wir noch nicht den kinetischen Anteil berücksichtigt haben. In Analogie zur QED bietet sich ein Ausdruck der Form

$$-\frac{1}{4} \mathcal{F}_{a\mu\nu} \mathcal{F}_a^{\mu\nu} \quad (7.25)$$

an, vorausgesetzt, die (Lorentz-)Tensorfelder $\mathcal{F}_{a\mu\nu}$ transformieren bzgl. der adjungierten Darstellung. Damit ist Folgendes gemeint: Es seien T_a^{ad} die Matrizen für die Generatoren in der adjungierten Darstellung, d. h. es handelt sich um (r, r) -Matrizen mit der Eigenschaft $(T_a^{\text{ad}})_{bc} = -i C_{abc}$ (siehe Aufgabe 3.8). Wir sagen, dass die

Felder F_a , $a = 1, \dots, r$, bzgl. der adjungierten Darstellung transformieren, wenn gilt:

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_r \end{pmatrix} =: F \mapsto (\mathbb{1} - i\epsilon_c T_c^{\text{ad}})F \quad (7.26)$$

oder in Komponentenschreibweise,

$$F_a \mapsto F_a - i\epsilon_c (T_c^{\text{ad}})_{ab} F_b = F_a - \epsilon_c C_{cab} F_b = F_a + \epsilon_c C_{acb} F_b = F_a + C_{abc} \epsilon_b F_c. \quad (7.27)$$

Wenn man zunächst mit dem naiven Ansatz

$$\partial_\mu \mathcal{A}_{av} - \partial_v \mathcal{A}_{a\mu}$$

beginnt, dann ergibt sich nicht das richtige Transformationsverhalten (siehe Aufgabe 7.3). Vielmehr muss man noch einen zusätzlichen Term einführen,

$$\mathcal{F}_{a\mu\nu} := \partial_\mu \mathcal{A}_{av} - \partial_v \mathcal{A}_{a\mu} - g C_{abc} \mathcal{A}_{b\mu} \mathcal{A}_{cv}, \quad (7.28)$$

sodass (7.27) erfüllt ist (siehe Aufgabe 7.3). Insgesamt ergibt sich also als *Lagrange-Dichte der Eichtheorie*

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(\Phi, D_\mu \Phi) - \frac{1}{4} \mathcal{F}_{a\mu\nu} \mathcal{F}_a^{\mu\nu}. \quad (7.29)$$

Anmerkungen

1. Massenterme der Art

$$\frac{1}{2} M_a^2 \mathcal{A}_{a\mu} \mathcal{A}_a^\mu$$

verletzen die Eichinvarianz. Aus dem Prinzip der Eichsymmetrie folgt also, dass Eichbosonen masselos sind (siehe allerdings Fußnote 3).

2. Die Struktur der Eichgruppe bestimmt die Anzahl der benötigten Eichfelder. Zu jedem Generator X_a der Lie-Algebra gehört ein Eichfeld $\mathcal{A}_{a\mu}$, und das Transformationsverhalten der Eichfelder wird durch (7.24b) beschrieben. Insbesondere transformieren die Eichfelder inhomogen, d. h. für ein reelles λ gilt $\lambda \mathcal{A}_{a\mu} \mapsto (\lambda \mathcal{A}_{a\mu})' \neq \lambda \mathcal{A}'_{a\mu}$. Für diese Eigenschaft ist der zweite Term auf der rechten Seite von (7.24b) verantwortlich. Beschränkt man sich auf eine *globale* Transformation, so verschwindet dieser Term und die Eichfelder transformieren bzgl. der adjungierten Darstellung.

Während die Eichgruppe die benötigten Eichfelder und deren Transformationsverhalten festlegt, ist die Frage, welche Multipletts als Materiefelder bei der Konstruktion einer Eichtheorie auftreten, Teil der Modellbildung und somit eine Frage der Phänomenologie. Betrachtungen zur Widerspruchsfreiheit einer Quantenfeldtheorie können zusätzliche Bedingungen bzgl. der Materiefelder liefern. Beispielsweise führt die Forderung nach einer Abwesenheit sog.

Anomalien, die die Renormierbarkeit einer Eichtheorie zerstören würden, zu Einschränkungen bzgl. des fermionischen Materiefeldinhalts. Eine weiterführende Diskussion findet sich z. B. in [O’Raifeartaigh \(1986\)](#), Abschnitt 7.4.

3. Wenn eine nicht-abelsche Gruppe zugrunde liegt, treten in der Definition der Feldstärken, (7.28), in den Eichfeldern quadratische Terme auf. Deshalb enthält die Lagrange-Dichte in (7.29) Wechselwirkungsterme mit drei bzw. vier Eichfeldern. Insbesondere tritt in der Wechselwirkung der Eichfelder mit den Materiefeldern dieselbe Kopplungskonstante auf wie bei der Wechselwirkung der Eichfelder untereinander. Im Unterschied zu einer abelschen Eichtheorie wie der QED enthalten nicht-abelsche Theorien (*Yang-Mills-Theorien*) Selbstkopplungen der Eichfelder.
4. Ist die Gruppe G das direkte Produkt mehrerer Untergruppen, $G = G_1 \times \dots \times G_k$, so muss man mit jeder Untergruppe G_i eine unabhängige Kopplungskonstante g_i verknüpfen. Beispielsweise werden für die Eichgruppe des Standardmodells (siehe Kap. 9),

$$\underbrace{\mathrm{SU}(3)_c}_{\text{stark}} \times \underbrace{\mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{U}(1)_Y}_{\text{elektroschwach}},$$

drei Eichkopplungen benötigt:

$$g_3 \leftrightarrow \mathrm{SU}(3)_c,$$

$$g \leftrightarrow \mathrm{SU}(2)_L,$$

$$g' \leftrightarrow \mathrm{U}(1)_Y.$$

Renormierbarkeit In einer störungstheoretischen Berechnung von Übergangsamplituden treten jenseits der Baumgraphennäherung sog. Schleifendiagramme auf. Im Impulsraum beinhalten sie Integrale über die Komponenten von Viererimpulsen, die im Limes unendlicher Integrationsgrenzen divergieren. Weil große Impulse großen Wellenzahlen und somit kleinen Wellenlängen entsprechen, spricht man von sog. ultravioletten Divergenzen. Vereinfacht gesprochen wird die Beseitigung dieser Divergenzen als *Renormierung* bezeichnet [siehe z. B. [Collins \(1984\)](#)]. Mit ein Grund für die Popularität von Yang-Mills-Theorien ist die Tatsache, dass sie im traditionellen Sinne renormierbar sind, d. h. dass die Divergenzen sich systematisch in einer Redefinition der vorhandenen Parameter absorbieren lassen. Wichtig ist in diesem Zusammenhang, dass die Eichbosonen auch in der renormierten Theorie masselos sind, d. h. durch die Wechselwirkung sich kein Masseterm aufbaut [[’t Hooft \(1971\)](#)]. Eine Ausnahme bildet eine Theorie mit einer spontanen Symmetriebrechung in der Form des Higgs-Mechanismus wie z. B. das Standardmodell. Auch hier konnte gezeigt werden, dass die Theorie trotz massiver Eichbosonen nach wie vor renormierbar ist [[’t Hooft \(1971\)](#), [’t Hooft und Veltman \(1972\)](#)].

In der Zwischenzeit hat die Forderung nach Renormierbarkeit im traditionellen Sinne etwas an Zugkraft verloren [siehe [Weinberg \(1995\)](#), Kapitel 12]. Ausgangspunkt ist eine Überlegung Weinbergs aus dem Jahre 1979, dass eine störungs-

theoretische Beschreibung im Rahmen der allgemeinsten Lagrange-Dichte, die *alle* mit einer angenommenen Symmetrie verträglichen Terme enthält, die allgemeinste störungstheoretische S -Matrix liefert, die sowohl die fundamentalen Prinzipien der Quantenfeldtheorie als auch die Anforderungen der vorgegebenen Symmetrie erfüllt [Weinberg (1979)]. In Verbindung mit einem Zählschema, nach dem die einzelnen Wechselwirkungsterme zu gewichten sind, wird diese Herangehensweise als *effektive Feldtheorie* bezeichnet. Vielerorts wird das Standardmodell selbst als die führende Ordnung einer effektiven Feldtheorie interpretiert und wäre somit nur eine Niederenergieapproximation an eine fundamentalere Theorie [siehe Weinberg (2009) für einen Überblick].

7.2 Die Lagrange-Dichte der Quantenchromodynamik

Die *Quantenchromodynamik* (QCD) ist eine nicht-abelsche Eichtheorie mit einer lokalen Symmetriegruppe $G = \text{SU}(3)$ [Gross und Wilczek (1973), Weinberg (1973), Fritzsche et al. (1973)]. Ein umfassender Überblick über die Literatur zur QCD findet sich in Kronfeld und Quigg (2010). Bei den Materiefeldern, den sog. Quarks, handelt es sich um Fermionen mit Spin $\frac{1}{2}$, die in sechs verschiedenen Arten oder *Flavors* (engl. „Geschmack“) vorkommen (siehe Abschn. 5.1). Für jeden Quarkflavor f führen wir ein komplexwertiges, dreikomponentiges Objekt

$$q_f = \begin{pmatrix} q_{f,1} \\ q_{f,2} \\ q_{f,3} \end{pmatrix} \quad (7.30)$$

ein, das bzgl. einer mit dem Gruppenelement $g(x)$ assoziierten lokalen Transformation wie

$$q_f \mapsto q'_f = \exp \left(-i \sum_{a=1}^8 \Theta_a(x) \frac{\lambda_a^c}{2} \right) q_f = U(g(x)) q_f \quad (7.31)$$

transformieren soll. Hierbei sind die λ_a^c die Gell-Mann-Matrizen aus Abschn. 5.4.2, und die Hochstellung c an den Gell-Mann-Matrizen erinnert daran, dass die Matrizen auf den Farbfreiheitsgrad wirken (c für *color*).

Wegen des Spins $\frac{1}{2}$ ist jeder Eintrag von q_f , z. B. $q_{f,1}$, selbst ein vierkomponentiger Dirac-Spinor [vgl. mit dem Nukleonendublett Ψ in (6.45)]. Für die Quarkfeldkomponenten führen wir die Bezeichnung

$$q_{f,A,\alpha}$$

ein, wobei $f = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ der Flavorindex für u, d, s, c, b , und t ist, $A = 1, 2, 3$ der Farbindex für rot, grün und blau und schließlich $\alpha = 1, 2, 3, 4$ der Dirac-Spinorindex. Demnach enthält ein Sammelausdruck q für die Gesamtheit aller Quarkfelder

insgesamt 72 komplexe Felder. Die „freie“ Lagrange-Dichte für die Quarks,

$$\mathcal{L}_0 = \sum_{f,f'=1}^6 \sum_{A,A'=1}^3 \sum_{\alpha,\alpha'=1}^4 \bar{q}_{f,A,\alpha} (\gamma_{\alpha\alpha'}^\mu i \partial_\mu - m_f \delta_{\alpha\alpha'}) \delta_{AA'} \delta_{ff'} q_{f',A',\alpha'}, \quad (7.32)$$

besitzt eine globale SU(3)-Symmetrie bzgl. der Transformationen in (7.31).⁴ Wir wenden auf diese SU(3)-Symmetrie das in Abschn. 7.1.2 beschriebene Verfahren des Eichprinzips an und konstruieren die Lagrange-Dichte der QCD:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QCD}} = & \sum_{f,f'=1}^6 \sum_{A,A'=1}^3 \sum_{\alpha,\alpha'=1}^4 \bar{q}_{f,A,\alpha} \left[(\gamma_{\alpha\alpha'}^\mu i \partial_\mu - m_f \delta_{\alpha\alpha'}) \delta_{AA'} \right. \\ & \left. - g_3 \underbrace{\sum_{a=1}^8 \mathcal{A}_{a\mu} \frac{\lambda_{a,AA'}^c}{2} \gamma_{\alpha\alpha'}^\mu}_{\text{aus dem Eichprinzip}} \right] \delta_{ff'} q_{f',A',\alpha'} - \sum_{a=1}^8 \frac{1}{4} G_{a\mu\nu} G_a^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Die kovariante Ableitung enthält wegen der Gruppe SU(3) acht Eichfelder $\mathcal{A}_{a\mu}$:

$$D_\mu \begin{pmatrix} q_{f,1} \\ q_{f,2} \\ q_{f,3} \end{pmatrix} = \partial_\mu \begin{pmatrix} q_{f,1} \\ q_{f,2} \\ q_{f,3} \end{pmatrix} + i g_3 \sum_{a=1}^8 \frac{\lambda_a^c}{2} \mathcal{A}_{a\mu} \begin{pmatrix} q_{f,1} \\ q_{f,2} \\ q_{f,3} \end{pmatrix}. \quad (7.33)$$

Insbesondere ist die Wechselwirkung der Quarks mit den sog. *Gluonen* (engl. *glue*, „Klebstoff“) flavorunabhängig. Damit (7.37) lokal invariant ist, müssen die acht Eichfelder wie

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\mu(x) &:= \frac{\lambda_a^c}{2} \mathcal{A}_{a\mu}(x) \quad (\text{Einstein'sche Summenkonvention}) \\ &\mapsto U(g(x)) \mathcal{A}_\mu(x) U^\dagger(g(x)) + \frac{i}{g_3} \partial_\mu U(g(x)) U^\dagger(g(x)) \end{aligned} \quad (7.34)$$

oder kurz

$$\mathcal{A}_\mu \mapsto U \mathcal{A}_\mu U^\dagger + \frac{i}{g_3} \partial_\mu U U^\dagger$$

transformieren. Anders als in Abschn. 7.1.2 lassen wir hier eine Tilde wie in (7.19) weg. Ferner haben wir acht *Feldstärketensoren*

$$G_{a\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_{a\nu} - \partial_\nu \mathcal{A}_{a\mu} - g_3 f_{abc} \mathcal{A}_{b\mu} \mathcal{A}_{c\nu} \quad (7.35)$$

⁴ Tatsächlich besitzt \mathcal{L}_0 in (7.32) eine viel größere Symmetrie, denn die Anteile der einzelnen Quarkflavors sind invariant bzgl. *unabhängiger* SU(3)-Transformationen. Würde man jede SU(3)-Symmetrie der Flavors separat einem Eichprinzip unterwerfen, entstünden für jeden Flavor acht eigene Gluonen, die insbesondere jeweils nur Wechselwirkungen zwischen ein und demselben Flavor vermitteln würden. Demnach würden zwei verschiedene Quarkflavors auf diese Weise gar nicht miteinander wechselwirken, also eine Bindung wie z. B. in einem Nukleon nicht entstehen.

definiert, die wie

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}(x) := \frac{\lambda_a^c}{2} \mathcal{G}_{a\mu\nu}(x) \mapsto U(g(x)) \mathcal{G}_{\mu\nu}(x) U^\dagger(g(x)) \quad (7.36)$$

transformieren.

Schließlich geben wir noch die gängige, kompakte Schreibweise für die *Lagrange-Dichte der QCD* an:⁵

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_{f=u,d,s,c,b,t} \bar{q}_f (i \not{D} - m_f) q_f - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{a\mu\nu} \mathcal{G}_a^{\mu\nu}. \quad (7.37)$$

Vom Standpunkt der Eichinvarianz aus könnte die Lagrange-Dichte der starken Wechselwirkung noch einen zusätzlichen Term der Form⁶

$$\mathcal{L}_\theta = \frac{g_3^2 \bar{\theta}}{64\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \mathcal{G}_a^{\mu\nu} \mathcal{G}_a^{\rho\sigma}, \quad \epsilon_{0123} = 1, \quad (7.38)$$

enthalten. Hierbei sind die $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ die kovarianten Komponenten des vollständig antisymmetrischen Levi-Civita-Tensors⁷ (siehe Abschn. A.7). Der sog. θ -Term aus (7.38) hat eine explizite P - und CP -Verletzung innerhalb der starken Wechselwirkung zur Folge. Die Paritätsverletzung erkennt man daran, dass der Epsilontensor ein Pseudotensor 4. Stufe ist und die Kontraktion mit den beiden Lorentz-Tensoren der Gluonenfeldstärke insgesamt zu einem *pseudoskalaren* Feld führen. Deshalb besitzt (nach einer Quantisierung) der zugehörige Hamilton-Operator eine negative Parität. Der θ -Term würde z. B. Anlass zu einem elektrischen Dipolmoment des Neutrons geben. Die gegenwärtige experimentelle Situation weist auf einen extrem kleinen θ -Term hin [Ottanad et al. (2010)], weshalb wir ihn im Folgenden nicht weiter diskutieren werden, sondern gleich null setzen.

⁵ Als extreme Kurzschreibweise findet man auch

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{q}(i \not{D} - \mathcal{M})q - \frac{1}{2} \text{Tr}_c(\mathcal{G}_{\mu\nu} \mathcal{G}^{\mu\nu}),$$

wobei $\mathcal{M} = \text{diag}(m_u, m_d, m_s, m_c, m_b, m_t)$ die Quarkmassenmatrix ist und $\mathcal{G}^{\mu\nu}$ für $\frac{\lambda_a^c}{2} \mathcal{G}_a^{\mu\nu}$ steht.

⁶ In der QED lässt sich ein entsprechender Term als totale Divergenz schreiben, $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \mathcal{F}^{\mu\nu} \mathcal{F}^{\rho\sigma} = 2\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\mu (\mathcal{A}^\nu \mathcal{F}^{\rho\sigma})$, die im Lagrange-Formalismus keinen Beitrag zur Bewegungsgleichung liefert und deshalb weggelassen werden kann.

⁷

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{für } (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ gerade Permutation von } (0, 1, 2, 3), \\ -1 & \text{für } (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ ungerade Permutation von } (0, 1, 2, 3), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

7.3 Zufällige globale Symmetrien von \mathcal{L}_{QCD}

Die sechs Quarkflavors lassen sich in zwei Gruppen unterteilen: die sog. leichten und schweren Quarks (siehe Abschn. 5.1). Wir beschränken uns im Folgenden auf die drei leichtesten Quarks. Für die Masse des Protons, $m_p = 938 \text{ MeV}$, gilt im Vergleich mit den Quarkmassen

$$m_p \gg 2m_u + m_d, \quad (7.39)$$

d. h. eine Interpretation der Protonenmasse mithilfe der Quarkmassen in Tab. 5.1 muss sich fundamental von der Situation im Wasserstoffatom unterscheiden, dessen Masse sich im Wesentlichen aus der Summe der Protonenmasse und der Elektronenmasse mit einer kleinen Korrektur aufgrund der Bindungsenergie ergibt. Im Falle des Protons wird die Masse von der *Energie* der masselosen Gluonen und der nahezu masselosen Quarks dominiert [Wilczek (2004)].

Die Quarkmassen in Tab. 5.1 sind fundamentale Parameter der QCD und dürfen nicht mit den Konstituentenquarkmassen des nichtrelativistischen Quarkmodells in Abschn. 5.5.6 verwechselt werden, die typischerweise von der Größenordnung 350 MeV sind. Wie wir in Abschn. 7.3.3 sehen werden, treten die Quarkmassen linear in den Divergenzen von Flavor-Noether-Strömen auf und werden deshalb in der Literatur auch als *Stromquarkmassen* (engl. *current-quark masses*) bezeichnet.

7.3.1 Chiraler Grenzfall

Wenn die drei leichtesten Quarks ein und dieselbe, nichtverschwindende Masse besäßen, ergäbe sich eine perfekte $\text{SU}(3)$ -Flavor-Symmetrie. Noch größer wäre die Symmetrie, wenn alle Quarkmassen gleich null wären. Angesichts (7.39) erscheint dies als eine vernünftige Approximation an die „reale“ Welt, weshalb wir zunächst den Grenzfall $m_u, m_d, m_s \rightarrow 0$ (*chiraler Grenzfall*⁸) als Ausgangspunkt für Symmetrieüberlegungen diskutieren. Wir kennzeichnen die zugehörige Lagrange-Dichte mit dem zusätzlichen Symbol 0:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 = \sum_{f=u,d,s} i \bar{q}_f \not{D} q_f - \frac{1}{4} G_{a\mu\nu} G_a^{\mu\nu} + \text{schwere Quarks}. \quad (7.40)$$

Im Folgenden werden wir die schweren Quarks komplett vernachlässigen, da sie für die entsprechenden Symmetriebetrachtungen nicht relevant sind. Die kovariante Ableitung $\not{D} q_f$ wirkt auf die Farb- und die Dirac-Indizes, ist aber unabhängig vom Flavor. Um die globalen Symmetrien von (7.40) vollständig zu identifizieren, betrachten wir die *Chiralitätsmatrix* $\gamma_5 = \gamma^5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \gamma_5^\dagger$, $\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0$,

⁸ Der Begriff chiral (grch. *cheir*, „Hand“) weist auf eine Händigkeit der entsprechenden Felder masseloser Quarks hin. Die noch zu definierenden Begriffe rechts- und linkshändiger Felder werden in Anlehnung an masselose, freie Dirac-Fermionen verwendet.

$\gamma_5^2 = \mathbb{1}$, und führen Projektionsoperatoren ein:

$$q = \left(\frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma_5) + \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma_5) \right) q = (P_R + P_L)q =: q_R + q_L, \quad (7.41)$$

wobei die Tiefstellungen R und L für rechts bzw. links stehen. Die $(4,4)$ -Matrizen P_R und P_L haben die Eigenschaften (siehe Aufgabe 7.6):

$$\begin{aligned} P_R + P_L &= \mathbb{1}, \\ P_R^\dagger &= P_R, \quad P_L^\dagger = P_L, \\ P_R^2 &= P_R, \quad P_L^2 = P_L, \\ P_R P_L &= P_L P_R = 0. \end{aligned} \quad (7.42)$$

Die Projektionsoperatoren P_R und P_L projizieren vom Dirac-Feld auf dessen chirale Komponenten q_R und q_L . Insbesondere gilt

$$\gamma_5 q_R = q_R \quad \text{und} \quad \gamma_5 q_L = -q_L.$$

Eine chirale (Feld-)Variable zeichnet sich dadurch aus, dass sie unter einer Paritätstransformation weder auf die ursprüngliche Variable noch auf ihr Negatives abgebildet wird. Für Felder ist eine Transformation des Arguments $\vec{x} \mapsto -\vec{x}$ impliziert. Unter der Parität wird ein Quarkfeld in sein paritätskonjugiertes Quarkfeld transformiert:

$$P : q(t, \vec{x}) \mapsto \gamma_0 q(t, -\vec{x}), \quad (7.43)$$

und damit

$$\begin{aligned} q_R(t, \vec{x}) &= P_R q(t, \vec{x}) \mapsto P_R \gamma_0 q(t, -\vec{x}) = \gamma_0 P_L q(t, -\vec{x}) \\ &= \gamma_0 q_L(t, -\vec{x}) \neq \pm q_R(t, -\vec{x}), \\ q_L(t, \vec{x}) &\mapsto \gamma_0 q_R(t, -\vec{x}). \end{aligned}$$

Anmerkung Im obigen Sinne ist auch q eine chirale Variable. Die Zuweisung einer Händigkeit ist allerdings nicht so plausibel wie im Falle von q_L und q_R .

Die Terminologie rechtshändig und linkshändig lässt sich anhand der Lösungen der freien Dirac-Gleichung motivieren. Dazu betrachte man eine hochrelativistische Lösung positiver Energie $E \gg m$ mit dem Dreierimpuls \vec{p} ,

$$u(\vec{p}, \pm) = \sqrt{E + m} \begin{pmatrix} \chi_\pm \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \chi_\pm \end{pmatrix} \xrightarrow{E \gg m} \sqrt{E} \begin{pmatrix} \chi_\pm \\ \pm \chi_\pm \end{pmatrix} \equiv u_\pm(\vec{p}),$$

wobei wir annehmen, dass der Spin im Ruhesystem entweder parallel oder antiparallel zur Richtung des Dreierimpulses ausgerichtet ist:

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{p} \chi_\pm = \pm \chi_\pm.$$

In der Standarddarstellung der Dirac-Matrizen lauten die Projektionsoperatoren

$$P_R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} & \mathbb{1}_{2 \times 2} \\ \mathbb{1}_{2 \times 2} & \mathbb{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad P_L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} & -\mathbb{1}_{2 \times 2} \\ -\mathbb{1}_{2 \times 2} & \mathbb{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix}.$$

Die Anwendung auf die hochrelativistischen Lösungen ergibt (siehe Aufgabe 7.7):

$$P_R u_+ = u_+, \quad P_L u_+ = 0, \quad P_R u_- = 0, \quad P_L u_- = u_-.$$

Im hochrelativistischen Grenzfall (oder besser, im masselosen Grenzfall) projizieren die Operatoren $P_{R/L}$ auf die Eigenzustände positiver bzw. negativer Helizität, d. h. in diesem Grenzfall sind Chiralität und Helizität dasselbe.

Unser Ziel ist eine Analyse der Symmetrien der QCD-Lagrange-Dichte im chiralen Grenzfall hinsichtlich unabhängiger globaler Transformationen der links- und rechtshändigen Felder. Zu diesem Zweck verwenden wir die folgende Zerlegung (siehe Aufgabe 7.8),

$$\bar{q} \Gamma_i q = \begin{cases} \bar{q}_R \Gamma_1 q_R + \bar{q}_L \Gamma_1 q_L & \text{für } \Gamma_1 \in \{\gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma_5\} \\ \bar{q}_R \Gamma_2 q_L + \bar{q}_L \Gamma_2 q_R & \text{für } \Gamma_2 \in \{\mathbb{1}, \gamma_5, \sigma^{\mu\nu}\} \end{cases}, \quad (7.44)$$

mit

$$\bar{q}_R = q_R^\dagger \gamma_0 = q^\dagger P_R^\dagger \gamma_0 = q^\dagger P_R \gamma_0 = q^\dagger \gamma_0 P_L = \bar{q} P_L \quad \text{und} \quad \bar{q}_L = \bar{q} P_R. \quad (7.45)$$

Insbesondere gilt diese Zerlegung ganz allgemein, d. h. sie macht keinen Gebrauch von masselosen Quarkfeldern. Sie funktioniert auch, wenn wir z. B. das Feld q durch $\partial_\mu q$ oder $D_\mu q$ ersetzen.

Wir wenden nun (7.44) auf die QCD-Lagrange-Dichte im chiralen Grenzfall an und berücksichtigen dabei, dass $\gamma^\mu \in \Gamma_1$ im Symbol \not{D} in kontrahierter Form vorkommt:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 = \sum_{f=u,d,s} (\bar{q}_R f i \not{D} q_{Rf} + \bar{q}_L f i \not{D} q_{Lf}) - \frac{1}{4} G_{a\mu\nu} G_a^{\mu\nu}. \quad (7.46)$$

Da die kovariante Ableitung flavorunabhängig ist, besitzt diese Lagrange-Dichte eine *globale*, klassische $U(3)_L \times U(3)_R$ -Symmetrie, d. h. sie ist invariant bzgl.

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix} \mapsto U_L \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix} = \exp \left(-i \sum_{a=1}^8 \Theta_a^L \frac{\lambda_a}{2} \right) e^{-i\Theta^L} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix} \mapsto U_R \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix} = \exp \left(-i \sum_{a=1}^8 \Theta_a^R \frac{\lambda_a}{2} \right) e^{-i\Theta^R} \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix}, \quad (7.47)$$

wobei U_L und U_R unabhängige, unitäre (3,3)-Matrizen sind. Hierbei gilt es zu beachten, dass die Gell-Mann-Matrizen auf den Flavor und nicht auf die Farbe wirken. In der Regel wird die Invarianz von $\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0$ unter $\text{SU}(N)_L \times \text{SU}(N)_R$, $N = 2$ oder 3, als *chirale Symmetrie* bezeichnet.

Wir erwarten insgesamt $2 \times (8 + 1) = 18$ erhaltene Ströme, die wir mittels (6.6a) bestimmen. Die Änderung der Lagrange-Dichte lautet für infinitesimale, lokale Transformationen (siehe Aufgabe 7.9)

$$\delta \mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 = \bar{q}_R \left(\sum_{a=1}^8 \partial_\mu \epsilon_a^R \frac{\lambda_a}{2} + \partial_\mu \epsilon^R \right) \gamma^\mu q_R + \bar{q}_L \left(\sum_{a=1}^8 \partial_\mu \epsilon_a^L \frac{\lambda_a}{2} + \partial_\mu \epsilon^L \right) \gamma^\mu q_L, \quad (7.48)$$

sodass sich mithilfe von (6.6a) die folgenden erhaltenen Ströme ergeben:

$$\begin{aligned} L_a^\mu &= \bar{q}_L \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q_L, & \partial_\mu L_a^\mu &= 0, \\ R_a^\mu &= \bar{q}_R \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q_R, & \partial_\mu R_a^\mu &= 0, \\ L^\mu &= \bar{q}_L \gamma^\mu q_L, & \partial_\mu L^\mu &= 0, \\ R^\mu &= \bar{q}_R \gamma^\mu q_R, & \partial_\mu R^\mu &= 0. \end{aligned} \quad (7.49)$$

Anmerkung Eine Summation über die Farbindizes ist in (7.48) und (7.49) impliziert, d.h. mit der Einstein'schen Summenkonvention lautet die ausführliche Schreibweise:

$$L_a^\mu = \bar{q}_{L f, A, \alpha} \gamma_{\alpha \alpha'}^\mu \frac{\lambda_{a f f'}}{2} \delta_{A A'} q_{L f', A', \alpha'} \quad \text{usw.}$$

Anstelle der Ströme aus (7.49) benutzt man häufig die Linearkombinationen

$$V_a^\mu = R_a^\mu + L_a^\mu = \bar{q} \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q, \quad (7.50)$$

$$A_a^\mu = R_a^\mu - L_a^\mu = \bar{q} \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} q. \quad (7.51)$$

In der Begründung für diese Gleichungen können wir die Gell-Mann-Matrizen unterdrücken, da sie für die Argumentation nicht relevant sind:

$$\begin{aligned} V^\mu &= \bar{q}_R \gamma^\mu q_R + \bar{q}_L \gamma^\mu q_L \stackrel{(7.44)}{=} \bar{q} \gamma^\mu q, \\ A^\mu &= \bar{q}_R \gamma^\mu q_R - \bar{q}_L \gamma^\mu q_L = \bar{q} \frac{1}{2} (\mathbb{1} - \gamma_5) \gamma^\mu q_R - \bar{q} \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \gamma_5) \gamma^\mu q_L \\ &= \bar{q} \gamma^\mu \underbrace{\frac{1}{2} (\mathbb{1} + \gamma_5) q_R}_{= \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \gamma_5) q} - \bar{q} \gamma^\mu \underbrace{\frac{1}{2} (\mathbb{1} - \gamma_5) q_L}_{= \frac{1}{2} (\mathbb{1} - \gamma_5) q} = \bar{q} \gamma^\mu \gamma_5 q. \end{aligned}$$

Bezüglich der Parität transformieren die sog. *Vektor- und Axialvektorströme* wie

$$P : V_a^\mu(t, \vec{x}) \mapsto V_{a\mu}(t, -\vec{x}), \quad (7.52)$$

$$P : A_a^\mu(t, \vec{x}) \mapsto -A_{a\mu}(t, -\vec{x}). \quad (7.53)$$

Tab. 7.1 Transformationseigenschaften der Matrizen Γ unter Parität

Γ	$\mathbb{1}$	γ^μ	$\sigma^{\mu\nu}$	γ_5	$\gamma^\mu \gamma_5$
$\gamma_0 \Gamma \gamma_0$	$\mathbb{1}$	γ_μ	$\sigma_{\mu\nu}$	$-\gamma_5$	$-\gamma_\mu \gamma_5$

Um dies zu sehen, benötigen wir das paritätskonjugierte Quarkfeld aus (7.43) sowie

$$\bar{q}(t, \vec{x}) = q^\dagger(t, \vec{x}) \gamma_0 \xrightarrow{P} q^\dagger(t, -\vec{x}) \underbrace{\gamma_0^\dagger}_{=\gamma_0} \gamma_0 = \bar{q}(t, -\vec{x}) \gamma_0.$$

In Verbindung mit den Eigenschaften der (4,4)-Matrizen Γ aus Tab. 7.1 ergibt sich die Behauptung.

Aus (7.49) erhält man einen erhaltenen Singulettvektorstrom

$$V^\mu = \bar{q} \gamma^\mu q, \quad \partial_\mu V^\mu = 0. \quad (7.54)$$

Dieser resultiert aus einer Transformation aller links- und rechtshändigen Quarkfelder mit derselben Phase. Der Singulettaxialvektorstrom

$$A^\mu = \bar{q} \gamma^\mu \gamma_5 q, \quad (7.55)$$

ergibt sich aus einer Transformation aller linkshändigen Quarkfelder mit einer Phase und aller rechtshändigen Felder mit der entgegengesetzten Phase. Dieser Strom ist allerdings nur auf dem *klassischen* Niveau eine Erhaltungsgröße. Quanteneffekte zerstören die Stromerhaltung und führen zu Zusatztermen in der Viererdivergenz, die als *Anomalien* bezeichnet werden [Bell und Jackiw (1969), Adler (1969), Adler und Bardeen (1969)]:

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{3g_3^2}{32\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} G_a^{\mu\nu} G_a^{\rho\sigma}, \quad \epsilon_{0123} = 1, \quad (7.56)$$

wobei der Faktor 3 seinen Ursprung in der Anzahl der Flavours hat.⁹ Aufgrund der Anomalie sprechen wir im Folgenden nur noch von einer $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ -Symmetrie der QCD im chiralen Grenzfall.

7.3.2 Die chirale Algebra

Die Invarianz von $\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0$ unter globalen $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ -Transformationen impliziert, dass auch der QCD-Hamilton-Operator im chiralen Grenzfall, H_{QCD}^0 , eine globale $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ -Symmetrie besitzt. Wie in Abschn. 6.2 definieren wir nun Ladungsoperatoren als Volumenintegrale über die Ladungsdichten,

$$Q_{La}(t) = \int d^3x q_L^\dagger(t, \vec{x}) \frac{\lambda_a}{2} q_L(t, \vec{x}) = \int d^3x q^\dagger(t, \vec{x}) P_L \frac{\lambda_a}{2} q(t, \vec{x}), \quad (7.57)$$

⁹ Betrachtet man die QCD im Grenzfall $N_c \rightarrow \infty$ [siehe 't Hooft (1974)], dann bleibt der Singulettaxialvektorstrom erhalten, weil die Kopplungskonstante sich wie $g_3^2 \sim N_c^{-1}$ verhält.

$$Q_{Ra}(t) = \int d^3x q_R^\dagger(t, \vec{x}) \frac{\lambda_a}{2} q_R(t, \vec{x}) = \int d^3x q^\dagger(t, \vec{x}) P_R \frac{\lambda_a}{2} q(t, \vec{x}), \quad (7.58)$$

$$Q_V(t) = \int d^3x \left[q_L^\dagger(t, \vec{x}) q_L(t, \vec{x}) + q_R^\dagger(t, \vec{x}) q_R(t, \vec{x}) \right] = \int d^3x q^\dagger(t, \vec{x}) q(t, \vec{x}), \quad (7.59)$$

wobei wir von den Eigenschaften gemäß (7.42) Gebrauch gemacht haben. Für erhaltene Symmetrieströme sind diese Operatoren zeitunabhängig, d. h. sie vertauschen mit dem Hamilton-Operator:

$$[Q_{La}, H_{\text{QCD}}^0] = [Q_{Ra}, H_{\text{QCD}}^0] = [Q_V, H_{\text{QCD}}^0] = 0. \quad (7.60)$$

Die Vertauschungsrelationen der Ladungsoperatoren untereinander ergeben sich durch Anwendung von (6.60) für die Quarkfelder,

$$\begin{aligned} & [q^\dagger(t, \vec{x}) \Gamma_1 F_1 q(t, \vec{x}), q^\dagger(t, \vec{y}) \Gamma_2 F_2 q(t, \vec{y})] = \\ & \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) [q^\dagger(t, \vec{x}) \Gamma_1 \Gamma_2 F_1 F_2 q(t, \vec{y}) - q^\dagger(t, \vec{y}) \Gamma_2 \Gamma_1 F_2 F_1 q(t, \vec{x})], \end{aligned} \quad (7.61)$$

wobei Γ_i und F_i (4,4)- Γ -Matrizen bzw. (3,3)-Flavormatrizen sind.¹⁰ Mithilfe des Einfügens geeigneter Projektionsoperatoren $P_{L/R}$ lässt sich (7.61) auf einfache Weise auf die Ladungsoperatoren aus (7.57) bis (7.59) anwenden, mit dem Resultat, dass diese Operatoren tatsächlich die Vertauschungsrelationen der zu $\text{SU}(3)_L \times \text{SU}(3)_R \times \text{U}(1)_V$ gehörigen Lie-Algebra erfüllen:

$$[Q_{La}, Q_{Lb}] = i f_{abc} Q_{Lc}, \quad (7.62a)$$

$$[Q_{Ra}, Q_{Rb}] = i f_{abc} Q_{Rc}, \quad (7.62b)$$

$$[Q_{La}, Q_{Rb}] = 0, \quad (7.62c)$$

$$[Q_{La}, Q_V] = [Q_{Ra}, Q_V] = 0. \quad (7.62d)$$

Diese Vertauschungsrelationen werden häufig auch als *chirale Algebra* bezeichnet. Wir betrachten exemplarisch

$$\begin{aligned} [Q_{La}, Q_{Lb}] &= \int d^3x d^3y \left[q^\dagger(t, \vec{x}) P_L \frac{\lambda_a}{2} q(t, \vec{x}), q^\dagger(t, \vec{y}) P_L \frac{\lambda_b}{2} q(t, \vec{y}) \right] \\ &= \int d^3x d^3y \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) q^\dagger(t, \vec{x}) \underbrace{P_L P_L}_{= P_L} \frac{\lambda_a}{2} \frac{\lambda_b}{2} q(t, \vec{y}) \\ &\quad - \int d^3x d^3y \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) q^\dagger(t, \vec{y}) P_L \frac{\lambda_b}{2} \frac{\lambda_a}{2} q(t, \vec{x}) \end{aligned}$$

¹⁰ Genau genommen sollten wir auch Farbindizes berücksichtigen. Da wir hier ausschließlich farbneutrale quadratische Formen betrachten, ist eine Summation über Farbindizes immer impliziert, sodass sie schließlich unterdrückt werden können.

$$\begin{aligned}
&= i f_{abc} \int d^3x q^\dagger(t, \vec{x}) P_L \frac{\lambda_c}{2} q(t, \vec{x}) \\
&= i f_{abc} Q_{Lc}.
\end{aligned}$$

Die restlichen Vertauschungsrelationen, (7.62b) bis (7.62d), werden in Aufgabe 7.10 behandelt. In Abschn. 8.5.1 werden wir noch einmal auf die Vertauschungsrelationen zu sprechen kommen, wenn wir das Phänomen einer spontanen Brechung der chiralen Symmetrie diskutieren.

7.3.3 Quarkmassen und explizite Brechung der chiralen Symmetrie

Bislang haben wir eine idealisierte Situation mit masselosen leichten Quarks diskutiert, die in einem hohen Maß an zusätzlicher, globaler Symmetrie in der QCD jenseits der SU(3)-Farbsymmetrie resultiert. Nichtverschwindende Quarkmassen m_u , m_d und m_s sorgen dafür, dass diese chirale Symmetrie *explizit* gebrochen ist,¹¹ sodass es zu Divergenzen der Symmetrieströme kommt. Eine Konsequenz daraus ist, dass die Ladungsoperatoren nicht mehr zeitunabhängig sind. Dennoch spielen die gleichzeitigen Vertauschungsrelationen weiterhin eine wichtige Rolle, selbst wenn eine Symmetrie explizit gebrochen ist [siehe Gell-Mann (1962)]. Wir hatten in Abschn. 6.2 am Beispiel der Gruppe U(1) gesehen, dass Symmetrieströme Bausteine für das Aufstellen von Ward-Identitäten sind. Die Verallgemeinerung auf der Basis der Ströme aus (7.49) resultiert in *chiralen Ward-Identitäten*, die unterschiedliche Green'sche Funktionen der QCD miteinander verknüpfen. Insbesondere treten in diesen Identitäten auf der rechten Seite nun auch die Divergenzen der Ströme auf. Wir werden im Folgenden sehen, dass diese Divergenzen die Quarkmassen enthalten.

Aus diesem Grund untersuchen wir mithilfe der Quarkmassenmatrix

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix}$$

den *Quarkmassenterm* der QCD:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_M &= -\bar{q} \mathcal{M} q \stackrel{(7.44)}{=} -(\bar{q}_R \mathcal{M} q_L + \bar{q}_L \mathcal{M} q_R) \\
&= -\bar{q} \left[m_s \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{m_u + m_d}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{m_u - m_d}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] q \\
&= -\bar{q} \left[m_s \left(\frac{1}{3} \mathbb{1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda_8 \right) + \frac{m_u + m_d}{2} \left(\frac{2}{3} \mathbb{1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda_8 \right) + \frac{m_u - m_d}{2} \lambda_3 \right] q.
\end{aligned} \tag{7.63}$$

¹¹ In Kap. 8 werden wir argumentieren, dass es auch eine *spontane* Symmetriebrechung in der QCD gibt.

Hierbei wurden die verschiedenen Terme gemäß ihren Stärken angeordnet. Aus \mathcal{L}_M resultiert folgende Änderung $\delta\mathcal{L}_M$ bzgl. der Transformationen gemäß (7.47) (siehe Aufgabe 7.9):

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_M = & -i \left[\sum_{a=1}^8 \epsilon_a^R \left(\bar{q}_R \frac{\lambda_a}{2} \mathcal{M} q_L - \bar{q}_L \mathcal{M} \frac{\lambda_a}{2} q_R \right) + \epsilon^R (\bar{q}_R \mathcal{M} q_L - \bar{q}_L \mathcal{M} q_R) \right. \\ & \left. + \sum_{a=1}^8 \epsilon_a^L \left(\bar{q}_L \frac{\lambda_a}{2} \mathcal{M} q_R - \bar{q}_R \mathcal{M} \frac{\lambda_a}{2} q_L \right) + \epsilon^L (\bar{q}_L \mathcal{M} q_R - \bar{q}_R \mathcal{M} q_L) \right]. \end{aligned} \quad (7.64)$$

Mithilfe von (6.6b) erhalten wir für die Divergenzen der Ströme

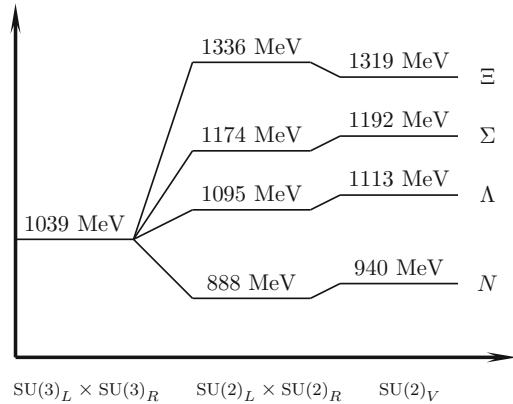
$$\begin{aligned} \partial_\mu L_a^\mu &= \frac{\partial \delta \mathcal{L}}{\partial \epsilon_a^L} = -i \left(\bar{q}_L \frac{\lambda_a}{2} \mathcal{M} q_R - \bar{q}_R \mathcal{M} \frac{\lambda_a}{2} q_L \right), \\ \partial_\mu R_a^\mu &= \frac{\partial \delta \mathcal{L}}{\partial \epsilon_a^R} = -i \left(\bar{q}_R \frac{\lambda_a}{2} \mathcal{M} q_L - \bar{q}_L \mathcal{M} \frac{\lambda_a}{2} q_R \right), \\ \partial_\mu L^\mu &= \frac{\partial \delta \mathcal{L}}{\partial \epsilon^L} = -i (\bar{q}_L \mathcal{M} q_R - \bar{q}_R \mathcal{M} q_L), \\ \partial_\mu R^\mu &= \frac{\partial \delta \mathcal{L}}{\partial \epsilon^R} = -i (\bar{q}_R \mathcal{M} q_L - \bar{q}_L \mathcal{M} q_R), \end{aligned} \quad (7.65)$$

wobei in den beiden letzten Gleichungen die Anomalie aus (7.56) noch nicht berücksichtigt ist. Umgeschrieben auf die Vektor- und Axialvektorströme lauten die Divergenzen

$$\begin{aligned} \partial_\mu V_a^\mu &= -i \bar{q}_R \left[\frac{\lambda_a}{2}, \mathcal{M} \right] q_L - i \bar{q}_L \left[\frac{\lambda_a}{2}, \mathcal{M} \right] q_R \stackrel{(7.44)}{=} i \bar{q} \left[\mathcal{M}, \frac{\lambda_a}{2} \right] q, \\ \partial_\mu A_a^\mu &= -i \left(\bar{q}_R \frac{\lambda_a}{2} \mathcal{M} q_L - \bar{q}_L \mathcal{M} \frac{\lambda_a}{2} q_R \right) + i \left(\bar{q}_L \frac{\lambda_a}{2} \mathcal{M} q_R - \bar{q}_R \mathcal{M} \frac{\lambda_a}{2} q_L \right) \\ &= i \left(\bar{q}_L \left\{ \frac{\lambda_a}{2}, \mathcal{M} \right\} q_R - \bar{q}_R \left\{ \frac{\lambda_a}{2}, \mathcal{M} \right\} q_L \right) \\ &= i \left(\bar{q} \left\{ \frac{\lambda_a}{2}, \mathcal{M} \right\} \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \gamma_5) q - \bar{q} \left\{ \frac{\lambda_a}{2}, \mathcal{M} \right\} \frac{1}{2} (\mathbb{1} - \gamma_5) q \right) \\ &= i \bar{q} \left\{ \frac{\lambda_a}{2}, \mathcal{M} \right\} \gamma_5 q, \\ \partial_\mu V^\mu &= 0, \\ \partial_\mu A^\mu &= 2i \bar{q} \mathcal{M} \gamma_5 q + \frac{3g_3^2}{32\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} G_a^{\mu\nu} G_a^{\rho\sigma}, \quad \epsilon_{0123} = 1, \end{aligned} \quad (7.66)$$

wobei wir jetzt die Anomalie berücksichtigt haben.

Abb. 7.1 Spektrum des Baryonenoktetts in Abhängigkeit von der zugrunde liegenden Flavorsymmetrie [Lehnhart et al. (2005)]



Anmerkungen

1. Im chiralen Grenzfall bleiben die 16 Ströme L_a^μ und R_a^μ bzw. V_a^μ und A_a^μ erhalten. Dasselbe gilt für den Singulettvektorstrom V^μ , während der Singulettaxialvektorstrom A^μ eine Anomalie besitzt.
2. Da die Wechselwirkung der Gluonen mit den Quarks unabhängig vom Flavor ist und die Quarkmassenmatrix diagonal ist, existiert für jeden Quarkflavor eine separate $U(1)_V$ -Symmetrie. In der starken Wechselwirkung bleiben demnach die einzelnen Flavorströme $\bar{u}\gamma^\mu u$, $\bar{d}\gamma^\mu d$ und $\bar{s}\gamma^\mu s$ völlig unabhängig vom Wert der Quarkmassen erhalten (siehe Aufgabe 7.11). Dies bedeutet, dass in Prozessen der starken Wechselwirkung z. B. die Differenz aus der Anzahl der u -Quarks und der \bar{u} -Antiquarks eine Erhaltungsgröße ist, was in analoger Weise auch für *alle* anderen Quarkflavors gilt. Der vektorielle Singulettstrom bleibt als Summe der einzelnen Ströme immer erhalten.
3. Der axiale Singulettstrom A^μ besitzt eine Anomalie sowie eine explizite Divergenz in Anwesenheit von Quarkmassen.
4. Für gleiche Quarkmassen, $m_u = m_d = m_s$, bleiben die acht Vektorströme V_a^μ erhalten, wegen $[\lambda_a, \mathbb{1}] = 0$. Dieser Fall ist der mikroskopische Ursprung der $SU(3)$ -Symmetrie des achtfachen Pfades [The Eightfold Way, Gell-Mann und Ne'eman (1964)]. Die acht Axialvektorströme A_a^μ bleiben nicht erhalten. Die Divergenzen des Oktetts der Axialvektorströme aus (7.66) sind proportional zu pseudoskalaren quadratischen Formen. Im Sprachgebrauch der 1960er Jahre handelt es sich dabei um teilweise erhaltene Axialvektorströme (Abk. PCAC für engl. *partially conserved axial-vector currents*) [siehe z. B. Gell-Mann (1964), Adler und Dashen (1968)]. Wie wir in Abschn. 8.5.1 noch sehen werden, kommt den Axialvektorströmen A_a^μ und den zugehörigen Ladungsoperatoren Q_{Aa} im Zusammenhang mit einer spontanen Symmetriebrechung eine besondere Bedeutung zu. Für eine weiterführende Diskussion der Konsequenzen der PCAC-Hypothese verweisen wir auf Adler und Dashen (1968), Treiman et al. (1972) und De Alfaro et al. (1973).

5. Realistischer ist die Approximation $m_s \neq 0$, $m_u = m_d = 0$. Damit ist zwar die $SU(3)_V$ -Symmetrie gebrochen, aber im u - d -Sektor existiert immer noch eine chirale $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -Symmetrie.
6. Schaltet man nun die u - und die d -Quarkmassen mit derselben Stärke $m_u = m_d = \hat{m}$ ein, so reduziert sich die $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -Symmetrie auf eine $SU(2)_V$ -Symmetrie (Isospin).
7. Mit $m_u \neq m_d$ ist selbst die Isospinsymmetrie gebrochen.
8. Abbildung 7.1 illustriert beispielhaft den Einfluss der Quarkmassen bzw. der entsprechenden Symmetrien auf das Spektrum des Baryonenoktetts [Lehnhart et al. (2005)] im Rahmen der sog. *chiralen Störungstheorie* [siehe Scherer und Schindler (2012) für eine Einführung].

7.4 Aufgaben

7.1 Gegeben sei der Ladungsoperator

$$Q = \int d^3x : \Psi^\dagger(t, \vec{x}) \Psi(t, \vec{x}) :,$$

der mit der globalen $U(1)$ -Invarianz der Lagrange-Dichte eines freien Dirac-Feldes verknüpft ist. Drücken Sie mithilfe der Zerlegung des Dirac-Feldes in Ebene-Welle-Lösungen den Ladungsoperator durch eine Summe bzw. ein Integral von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren aus.

7.2 Gegeben sei die Lagrange-Dichte eines freien geladenen Teilchens mit dem Spin 0 (siehe Aufgabe 6.1):

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi.$$

Unter einer lokalen $U(1)$ -Transformation sollen die Felder Φ und Φ^\dagger gemäß

$$\Phi(x) \mapsto e^{i\Theta(x)} \Phi(x), \quad \Phi^\dagger(x) \mapsto e^{-i\Theta(x)} \Phi^\dagger(x)$$

transformieren.

- a) Wie lauten $D_\mu \Phi$ und $D_\mu \Phi^\dagger$?
- b) Konstruieren Sie mithilfe des Prinzips der Eichsymmetrie die zugehörige Eichtheorie.
- c) Schreiben Sie die resultierende Lagrange-Dichte aus und sortieren Sie die Terme nach Potenzen der Elementarladung. Was ist der wesentliche Unterschied zur QED-Lagrange-Dichte eines Elektrons?
- d) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen für Φ und Φ^\dagger her.
- e) Bestimmen Sie den elektromagnetischen Stromoperator mithilfe von $J_{\text{em}}^\mu = -\partial \mathcal{L} / \partial \mathcal{A}_\mu$.

- f) Vergleichen Sie mit dem Noether-Strom der *globalen* U(1)-Symmetrie. Worin besteht der Unterschied?
- g) Zeigen Sie mithilfe der Bewegungsgleichungen, dass der elektromagnetische Strom erhalten bleibt.

7.3 Es sei $\{\sum_{a=1}^r \zeta_a T_a | \zeta_a \in \mathbb{R}\}$ die Darstellung einer Lie-Algebra in Form von hermiteschen (n, n) -Matrizen mit den Vertauschungsrelationen $[T_a, T_b] = i C_{abc} T_c$ und $\kappa \text{Sp}(T_a T_b) = \delta_{ab}$. Wir definieren

$$\widetilde{O} = \sum_{a=1}^r O_a T_a = O_a T_a.$$

- a) Zeigen Sie, dass das Transformationsverhalten

$$\widetilde{\mathcal{A}}_\mu \mapsto \widetilde{\mathcal{A}}_\mu + i [\widetilde{\mathcal{A}}_\mu, \widetilde{\epsilon}] + \frac{1}{g} \partial_\mu \widetilde{\epsilon}$$

für die einzelnen Eichfelder zu

$$\delta \mathcal{A}_{a\mu} = C_{bca} \epsilon_b \mathcal{A}_{c\mu} + \frac{1}{g} \partial_\mu \epsilon_a$$

führt.

- b) Wie transformiert $\partial_\mu \widetilde{\mathcal{A}}_\nu - \partial_\nu \widetilde{\mathcal{A}}_\mu$ bzgl. $\widetilde{\mathcal{A}}_\mu \mapsto \widetilde{\mathcal{A}}_\mu + i [\widetilde{\mathcal{A}}_\mu, \widetilde{\epsilon}] + \frac{1}{g} \partial_\mu \widetilde{\epsilon}$?
- c) Wir definieren

$$\widetilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu} = \partial_\mu \widetilde{\mathcal{A}}_\nu - \partial_\nu \widetilde{\mathcal{A}}_\mu + i g [\widetilde{\mathcal{A}}_\mu, \widetilde{\mathcal{A}}_\nu].$$

Zeigen Sie mithilfe der Jacobi-Identität $[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$, dass für $\widetilde{\mathcal{A}}_\mu \mapsto \widetilde{\mathcal{A}}_\mu + i [\widetilde{\mathcal{A}}_\mu, \widetilde{\epsilon}] + \frac{1}{g} \partial_\mu \widetilde{\epsilon}$ bis zur ersten Ordnung in $\widetilde{\epsilon}$ gilt:

$$\widetilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu} \mapsto \widetilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu} + i [\widetilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu}, \widetilde{\epsilon}].$$

- d) Zeigen Sie damit, dass

$$-\frac{\kappa}{4} \text{Sp}(\widetilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu} \widetilde{\mathcal{F}}^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4} \mathcal{F}_{a\mu\nu} \mathcal{F}_a^{\mu\nu}$$

bis zur ersten Ordnung in $\widetilde{\epsilon}$ invariant bzgl. $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu} \mapsto \widetilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu} + i [\widetilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu}, \widetilde{\epsilon}]$ ist.

7.4 Gegeben sei eine (fiktive) Lagrange-Dichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & D_\mu \varphi^\dagger D^\mu \varphi - m^2 \varphi^\dagger \varphi + D_\mu \Phi^\dagger D^\mu \Phi - M^2 \Phi^\dagger \Phi + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 \\ & + c_1 \Phi^\dagger \varphi \sigma + c_2 \varphi^\dagger \Phi \sigma - \frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}, \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} D_\mu \varphi &= (\partial_\mu - i e \mathcal{A}_\mu) \varphi, \\ D_\mu \varphi^\dagger &= (\partial_\mu + i e \mathcal{A}_\mu) \varphi^\dagger, \\ D_\mu \Phi &= (\partial_\mu - i e \mathcal{A}_\mu) \Phi, \\ D_\mu \Phi^\dagger &= (\partial_\mu + i e \mathcal{A}_\mu) \Phi^\dagger, \end{aligned}$$

d. h. φ und Φ beschreiben unterschiedliche (einfach) negativ geladene Teilchen mit den Massen m bzw. M , und σ beschreibt ein neutrales Teilchen mit der Masse m_σ .

a) Zeigen Sie, dass \mathcal{L} invariant bzgl. einer Eichtransformation der zweiten Art ist:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\mapsto e^{i\Theta(x)} \varphi(x), \\ \Phi(x) &\mapsto e^{i\Theta(x)} \Phi(x), \\ \sigma(x) &\mapsto \sigma(x), \\ \mathcal{A}_\mu(x) &\mapsto \mathcal{A}_\mu(x) + \partial_\mu \Theta(x)/e. \end{aligned}$$

(Die korrespondierenden Transformationen von φ^\dagger und Φ^\dagger sind impliziert.)

b) Betrachten Sie den Wechselwirkungsterm

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = c_1 \Phi^\dagger \varphi \sigma + c_2 \varphi^\dagger \Phi \sigma, \quad c_i \in \mathbb{C}.$$

Welche Bedingungen für die Koeffizienten c_i ergeben sich aus der Forderung $\mathcal{L}_{\text{int}} = \mathcal{L}_{\text{int}}^\dagger$?

c) Untersuchen Sie das Verhalten der verschiedenen Terme der Lagrange-Dichte unter der Ladungskonjugationstransformation

$$\mathcal{A}_\mu \mapsto -\mathcal{A}_\mu, \quad \varphi \leftrightarrow \varphi^\dagger, \quad \Phi \leftrightarrow \Phi^\dagger, \quad \sigma \mapsto \sigma.$$

Unter welcher Voraussetzung ist \mathcal{L} invariant bzgl. der Ladungskonjugation?

7.5 Zur Illustration des Eichprinzips diskutieren wir den ursprünglichen Vorschlag von [Yang und Mills \(1954\)](#), die Isospinerhaltung aus einer *lokalen* $SU(2)$ -Symmetrie herzuleiten. Gegeben sei

$$\mathcal{L}_0(\Psi, \partial_\mu \Psi) = \bar{\Psi} (i \not{\partial} - m_N) \Psi$$

mit einem Isospindublett

$$\Psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}.$$

Die Lagrange-Dichte \mathcal{L}_0 ist invariant bzgl. einer infinitesimalen, globalen, linearen Transformation der Felder

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = \left(\mathbb{1} - i \sum_{i=1}^3 \epsilon_i \frac{\tau_i}{2} \right) \Psi(x) = \left(\mathbb{1} - i \frac{\vec{\epsilon} \cdot \vec{\tau}}{2} \right) \Psi(x).$$

Wie lautet die aus dem Eichprinzip abgeleitete Lagrange-Dichte? Verifizieren Sie den Ausdruck

$$\mathcal{F}_{i\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_{i\nu} - \partial_\nu \mathcal{A}_{i\mu} - g\epsilon_{ijk} \mathcal{A}_{j\mu} \mathcal{A}_{k\nu}$$

für die drei Feldstärken.

7.6 Gegeben seien die Projektionsoperatoren

$$P_R = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma_5), \quad P_L = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma_5),$$

wobei die Tiefstellungen R und L für rechts bzw. links stehen. Verifizieren Sie

$$\begin{aligned} P_R + P_L &= \mathbb{1}, & P_R &= P_R^\dagger, & P_L &= P_L^\dagger, \\ P_R^2 &= P_R, & P_L^2 &= P_L, & P_R P_L &= P_L P_R = 0. \end{aligned}$$

Hinweis: $\gamma_5^\dagger = \gamma_5$, $\gamma_5^2 = \mathbb{1}$.

7.7 Betrachten Sie die hochrelativistische Lösung positiver Energie mit dem Impuls \vec{p} ,

$$u(\vec{p}, \pm) \approx \sqrt{E} \begin{pmatrix} \chi_\pm \\ \pm \chi_\pm \end{pmatrix} =: u_\pm(\vec{p}),$$

wobei wir annehmen, dass der Spin im Ruhesystem entweder parallel oder antiparallel zur Richtung des Impulses polarisiert sei:

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{p} \chi_\pm = \pm \chi_\pm.$$

In der Standarddarstellung der Dirac-Matrizen gilt

$$P_R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} & \mathbb{1}_{2 \times 2} \\ \mathbb{1}_{2 \times 2} & \mathbb{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad P_L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} & -\mathbb{1}_{2 \times 2} \\ -\mathbb{1}_{2 \times 2} & \mathbb{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie

$$P_R u_+ = u_+, \quad P_L u_+ = 0, \quad P_R u_- = 0, \quad P_L u_- = u_-.$$

7.8 In (7.41) und (7.45) wurden links- bzw. rechtshändige Felder definiert als

$$q_L = P_L q, \quad q_R = P_R q, \quad \bar{q}_L = \bar{q} P_R \quad \text{und} \quad \bar{q}_R = \bar{q} P_L.$$

Zeigen Sie

$$\bar{q} \Gamma_i q = \begin{cases} \bar{q}_R \Gamma_1 q_R + \bar{q}_L \Gamma_1 q_L & \text{für } \Gamma_1 \in \{\gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma_5\} \\ \bar{q}_R \Gamma_2 q_L + \bar{q}_L \Gamma_2 q_R & \text{für } \Gamma_2 \in \{\mathbb{1}, \gamma_5, \sigma^{\mu\nu}\} \end{cases}.$$

Hinweis: Schieben Sie „Einsen“ ein in der Form

$$\bar{q} \Gamma_i q = \bar{q} (P_R + P_L) \Gamma_i (P_R + P_L) q$$

und machen Sie von $\{\Gamma_1, \gamma_5\} = 0$ und $[\Gamma_2, \gamma_5] = 0$ Gebrauch sowie von den Eigenschaften der Projektionsoperatoren.

7.9 Gegeben sei die QCD-Lagrange-Dichte für masselose u -, d - und s -Quarks:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 = \sum_{f=u,d,s} (\bar{q}_{Rf} i \not{D} q_{Rf} + \bar{q}_{Lf} i \not{D} q_{Lf}) - \frac{1}{4} G_{a\mu\nu} G_a^{\mu\nu}.$$

a) Wenden Sie die Methode von Gell-Mann und Lévy an und bestimmen Sie die Änderung $\delta \mathcal{L}_{\text{QCD}}^0$ bzgl. folgender infinitesimaler, *lokaler* Transformationen:

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix} \mapsto \left(\mathbb{1} - i \sum_{a=1}^8 \epsilon_a^L \frac{\lambda_a}{2} - i \epsilon^L \mathbb{1} \right) \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix} \mapsto \left(\mathbb{1} - i \sum_{a=1}^8 \epsilon_a^R \frac{\lambda_a}{2} - i \epsilon^R \mathbb{1} \right) \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie die zugehörigen Noether-Ströme.

c) Wir addieren nun den Quarkmassenterm aus (7.63),

$$\mathcal{L}_M = -\bar{q} \mathcal{M} q = -(\bar{q}_R \mathcal{M} q_L + \bar{q}_L \mathcal{M} q_R),$$

zur Lagrange-Dichte $\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0$. Bestimmen Sie die Änderung $\delta \mathcal{L}_M$ bzgl. der Transformationen aus Teilaufgabe a).

7.10 Gegeben seien die Ladungsoperatoren $Q_{La}(t)$, $Q_{Ra}(t)$ und $Q_V(t)$ aus (7.57) bis (7.59). Verifizieren Sie die (gleichzeitigen) Vertauschungsrelationen

$$[Q_{Ra}, Q_{Rb}] = i f_{abc} Q_{Rc}, \quad [Q_{La}, Q_{Rb}] = 0, \quad [Q_{La}, Q_V] = [Q_{Ra}, Q_V] = 0.$$

Hinweis: $[Q_{La}, Q_{Lb}] = i f_{abc} Q_{Lc}$ wurde bereits in Abschn. 7.3.2 gezeigt.

7.11 Drücken Sie die Vektorströme $\bar{u} \gamma^\mu u$, $\bar{d} \gamma^\mu d$ und $\bar{s} \gamma^\mu s$ als Linearkombinationen des vektoriellen Singulettstroms $V^\mu = \bar{q} \gamma^\mu q$ und geeigneter Oktettkomponenten $V_a^\mu = \bar{q} \gamma^\mu (\lambda_a/2) q$ aus.

Literatur

- Abers, E.S., Lee, B.W.: Gauge theories. Phys. Rept. **9**, 1–141 (1973)
- Adler, S.L., Dashen, R.F.: Current Algebras and Applications to Particle Physics. Benjamin, New York (1968)
- Adler, S.L.: Axial-vector vertex in spinor electrodynamics. Phys. Rev. **177**, 2426–2438 (1969)
- Adler, S.L., Bardeen, W.A.: Absence of higher-order corrections in the anomalous axial-vector divergence equation. Phys. Rev. **182**, 1517–1536 (1969)
- Bell, J.S., Jackiw, R.: A PCAC puzzle: $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ in the σ -model. Nuovo Cim. A **60**, 47–61 (1969)
- Bjorken, J.D., Drell, S.D.: Relativistic Quantum Mechanics. McGraw-Hill, New York (1964)
- Bjorken, J.D., Drell, S.D.: Relativistic Quantum Fields. McGraw-Hill, New York (1965)
- Cheng, T.-P., Li, L.-F.: Gauge Theory of Elementary Particle Physics. Clarendon, Oxford (1984)
- Collins, J.: Renormalization. Cambridge University Press, Cambridge (1984)
- De Alfaro, V., Fubini, S., Furlan, G., Rossetti, C.: Currents in Hadron Physics. North-Holland, Amsterdam (1973)
- Fritzsch, H., Gell-Mann, M., Leutwyler, H.: Advantages of the color octet gluon picture. Phys. Lett. B **47**, 365–368 (1973)
- Gell-Mann, M., Lévy, M.: The axial vector current in beta decay. Nuovo Cim. **16**, 705–726 (1960)
- Gell-Mann, M.: Symmetries of baryons and mesons. Phys. Rev. **125**, 1067–1084 (1962)
- Gell-Mann, M., Ne’eman, Y.: The Eightfold Way. Benjamin, New York, Amsterdam (1964)
- Gell-Mann, M.: The symmetry group of vector and axial vector currents. Physics **1**, 63–75 (1964)
- Georgi, H.: Weak Interactions and Modern Particle Theory. Benjamin/Cummings, Menlo Park, Calif. (1984)
- Gross, D.J., Wilczek, F.: Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories. Phys. Rev. Lett. **30**, 1343–1346 (1973)
- Heisenberg, W., Pauli, W.: Zur Quantendynamik der Wellenfelder. Z. Phys. **56**, 1–61 (1929)
- Heisenberg, W., Pauli, W.: Zur Quantentheorie der Wellenfelder. II. Z. Phys. **59**, 168–190 (1930)
- Itzykson, C., Zuber, J.B.: Quantum Field Theory. McGraw-Hill, New York (1980)
- Kronfeld, A.S., Quigg, C.: Resource Letter QCD-1: Quantum chromodynamics. Am. J. Phys. **78**, 1081–1116 (2010)
- Lehnhart, B.C., Gegelia, J., Scherer, S.: Baryon masses and nucleon sigma terms in manifestly Lorentz-invariant baryon chiral perturbation theory. J. Phys. G **31**, 89–104. (2005)
- O’Raifeartaigh, L.: Group Structure of Gauge Theories. Cambridge University Press, Cambridge (1986)
- Otnad, K., Kubis, B., Meißner, U.-G., Guo, F.-K.: New insights into the neutron electric dipole moment. Phys. Lett. B **687**, 42–47 (2010)
- Peskin, M.E., Schroeder, D.V.: An Introduction to Quantum Field Theory. Westview Press, Boulder, Colo. (1995)
- Ryder, L.H.: Quantum Field Theory. Cambridge University Press, Cambridge (1985)
- Scherer, S., Schindler, M.R.: A Primer for Chiral Perturbation Theory. Lect. Notes Phys. **830**. Springer, Berlin (2012)
- ’t Hooft, G.: Renormalization of massless Yang-Mills fields. Nucl. Phys. B **33**, 173–199 (1971)

- 't Hooft, G.: Renormalizable lagrangians for massive Yang-Mills fields. Nucl. Phys. B **35**, 167–188 (1971)
- 't Hooft, G., Veltman, M.J.G.: Regularization and renormalization of gauge fields. Nucl. Phys. B **44**, 189–213 (1972)
- 't Hooft, G.: A planar diagram theory for strong interactions. Nucl. Phys. B **72**, 461–473 (1974)
- Treiman, S., Jackiw, R., Gross, D.J.: Lectures on Current Algebra and Its Applications. Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1972)
- Weinberg, S.: Non-Abelian gauge theories of the strong interactions. Phys. Rev. Lett. **31**, 494–497 (1973)
- Weinberg, S.: Phenomenological lagrangians. Physica A **96**, 327–340 (1979)
- Weinberg, S.: The Quantum Theory of Fields, Bd. 1. Foundations. Cambridge University Press, Cambridge (1995)
- Weinberg, S.: The Quantum Theory of Fields, Bd. 2. Modern Applications. Cambridge University Press, Cambridge (1996)
- Weinberg, S.: Effective field theory, past and future. PoS CD **09**, 001 (2009)
- Weyl, H.: Elektron und Gravitation. I. Z. Phys. **56**, 330–352 (1929)
- Wilczek, F.A.: Asymptotic Freedom: From Paradox to Paradigm. Nobel Lecture, December 8, 2004. http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2004/wilczek-lecture.html. (2004)
- Yang, C.N., Mills, R.L.: Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. Phys. Rev. **96**, 191–195 (1954)

Symmetrien und Gruppen in der Teilchenphysik

Scherer, S.

2016, XII, 459 S. 31 Abb., 30 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-662-47733-5