

Kapitel 2

Von π bis zu einer Trillion: Zahlen



Zahlen sind meist die erste Bekanntschaft mit Mathematik. Durch Lieder aus der Sesamstraße lernen Kinder zählen und schnell kennen sie haargenau den Unterschied zwischen drei und vier Bonbons. Aber es gibt sehr viel mehr Arten von Zahlen als Zahlworte. Wenn wir all diese Zahlen beschreiben müssten, würde dieses Buch unendlich dick. Darum wählen wir in diesem Kapitel ein paar unserer Lieblingszahlen aus.

Zum Beispiel die Primzahlen, Zahlen, die nur durch sich selbst oder durch eins teilbar sind. Diese für Mathematiker wichtigen Zahlen scheinen auch für bestimmte Insekten sehr nützlich zu sein.

Natürlich kennt jeder die Quadratzahlen: 1, 4, 8, 16, 25, 36, ... Wir werden zeigen, dass diese Zahlenfolge auch noch eine andere auffällige Regelmäßigkeit besitzt.

Der schwierigste Teil dieses Kapitels behandelt normale Zahlen. Es ist bewiesen, dass es unendlich viele dieser Zahlen gibt, aber Mathematiker können nur eine Handvoll davon konstruieren. Was ist dann so normal an diesen Zahlen?

Apropos normal: Wir sind so an das Dezimalsystem gewöhnt, dass es uns schwer fällt, uns ein anderes System vorzustellen. In einem historischen Teil zeigen wir, wie die Babylonier ein 60-stelliges System benutzten und welche Spuren wir davon noch in unserer heutigen Zeit finden können.

Zwei Zahlen, die in diesem Kapitel nicht fehlen dürfen, sind π (Pi) und der Goldene Schnitt. Wir zeigen, wie man π annähern kann, und fragen uns, wie schön der Goldene Schnitt eigentlich ist. Aber wir beginnen mit Zahlen, die so groß sind, dass wir uns darunter beinahe nichts mehr vorstellen können.



Wie viel ist eine Trillion?

Als Barack Obama gerade Präsident war, gab er den Auftrag, 100 Millionen Dollar zu sparen. Das klingt nach einer ganzen Menge Geld, aber man sollte bedenken, dass das amerikanische Regierungsbudget schlappe 3,5 Billionen Dollar betrug und das damalige jährliche Defizit 1,2 Billionen Dollar. Waren die Einsparungen also wirklich so beeindruckend?

Greg Mankiw, Professor für Wirtschaftswissenschaften an der Harvard Universität, verdeutlichte, wie klein die Einsparungen waren, indem er sie auf das Niveau einer Familie herunterskalierte. Nimm an, dass ein Haushalt jährlich 100.000 Dollar ausgibt und dass er ein Defizit von 34.000 Dollar hat. Nun trifft das Familienoberhaupt den drastischen Entschluss, in diesem Jahr 3 Dollar zu sparen. Kurzum, eine Einsparung von einer Tasse Kaffee bei einem Defizit von der Größe eines netten Mittelklassewagens. Die Verhältnisse zwischen den Beträgen sind genau die der vorgeschlagenen Regierungseinsparungen, und so klingen sie mit einem Mal lächerlich.

Obamas Einsparungen waren natürlich vor allem als gutes Vorbild gemeint und es wurden allerlei weitere Maßnahmen getroffen, um das Defizit zu verringern. Wirtschaftswissenschaftler können darüber sicher vernünftige Aussagen treffen. Für Mathematiker ist es in erster Linie verrückt zu bemerken, dass wir so schlecht begreifen, wie groß der Unterschied zwischen 100 Millionen und 3,5 Billionen ist.

Übersetzungsfehler

Wir haben einfach kein Gefühl für große Zahlen und oft notiert jemand versehentlich ein paar Nullen zu viel oder zu wenig. Zu allem Unglück ist die amerikanische *billion* nicht die gleiche wie unsere Billion (zwölf Nullen), sondern wie unsere Milliarde (neun Nullen). Unsere Billion heißt in Amerika eine *trillion* und unsere Trillion (18 Nullen) ist dann wiederum eine *quintillion*. Und, um noch mehr Verwirrung zu stiften, es war früher im britischen Englisch wieder anders, aber inzwischen sind in Großbritannien die amerikanisch-englischen *billion* und *trillion* auch gängig. Auch wenn britische Wissenschaftler lieber den europäischen Standard gebrauchen. Das ist also sehr verwirrend!

Wer das nicht weiß und kein Gefühl für große Zahlen hat, kommt schnell durcheinander. Neulich stand über einer Buchrezension über Entwicklungshilfe in Afrika die Schlagzeile „1.000.000.000.000.000.000 Dollar halfen nicht“. Dieser Betrag ist eine Trillion (zähl ruhig die 18 Nullen nach), und er hat sechs Nullen mehr als die *trillion*, die zweifellos im ursprünglichen Text stand.

Anzahl der Nullen	Deutsch	(Amerikanisches) Englisch
6	Million	million
9	Milliarde	billion
12	Billion	trillion
15	Billiarde	quadrillion
18	Trillion	quintillion

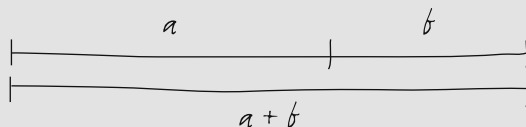
Um zu erkennen, wie lächerlich dieser Betrag mit den 18 Nullen ist, kannst du ausrechnen, auf wie viel Entwicklungshilfe pro Person pro Jahr das ungefähr hinausläuft. Das Geld ging dem Artikel zufolge innerhalb von 60 Jahren nach Afrika. Da wohnen etwas weniger als eine Milliarde Menschen. Teile den Gesamtbetrag von 1.000.000.000.000.000.000 Dollar durch 60 Jahre und durch die Anzahl der Einwohner und das Ergebnis ist, dass pro Einwohner mehr als 18 Millionen Dollar Entwicklungshilfe pro Jahr gezahlt wurden. Es wäre wirklich sehr merkwürdig, wenn ein derart großer Betrag pro Person nicht geholfen hätte. In Wirklichkeit lief es auf etwas mehr als 18 Dollar Entwicklungshilfe pro Person pro Jahr hinaus – diesen Unterschied machen die sechs Nullen aus.

Wir können so schlecht einschätzen, wie viel Geld 1.000.000.000.000.000.000 Dollar sind, dass wir nicht auf Anhieb merken, dass dieser Betrag viel zu hoch ist. Bei 18 Millionen Dollar pro Person sehen wir aber gleich, dass damit etwas nicht stimmt. Überprüfe bei so großen Zahlen daher am besten immer kurz mit einer kleinen Überschlagsrechnung, ob die Anzahl der Nullen richtig ist.

Der etwas überschätzte Goldene Schnitt

Über wenige Zahlen wird so viel Unsinn erzählt wie über den Goldenen Schnitt. Der Goldene Schnitt ist ungefähr 1,618 und soll ein besonders schönes Verhältnis sein, das man beinahe überall finden kann. Mathematisch gesehen, ist das Verhältnis sicher sehr schön. Bei einem Linienstück, das entsprechend des Goldenen Schnittes aufgeteilt ist, verhält sich das größere der beiden Stücke zu dem kleineren, wie sich das ganze Linienstück zu dem größeren Stück verhält.

Der Wert des Goldenen Schnittes



Aus diesem Verhältnis kann man den Wert des Goldenen Schnitts berechnen, wir notieren diesen Wert mit g . Nenn das längere Stück der Linie a , das kürzere b . Per Definition gilt, dass $g = \frac{a}{b} = \frac{(a+b)}{a}$.

Hieraus folgt, dass $a = b \cdot g$, und durch Einsetzen in $g = \frac{(a+b)}{a}$ erhältst du $g = \frac{(b \cdot g + b)}{(b \cdot g)} = \frac{(g+1)}{g}$ bzw. $g^2 - g - 1 = 0$. Auflösen dieser Gleichung (zum Beispiel mit der p-q-Formel, siehe auch Seite 159) gibt als einzige positive Lösung $g = \frac{(1+\sqrt{5})}{2} = 1,618\dots$

Man sagt, dass man den Goldenen Schnitt überall wiederfindet: in alten griechischen Bauwerken wie dem Parthenon, in Gemälden von Leonardo da Vinci und selbst im Gesicht von Angelina Jolie. Natürlich haben manche Künstler wie Salvador Dalí den Goldenen Schnitt ganz bewusst eingesetzt. Aber häufiger ist es unwahrscheinlich, dass der Goldene Schnitt absichtlich gebraucht wird. Es gibt zum Beispiel keine Hinweise darauf, dass die alten Griechen oder Leonardo Da Vinci verrückt nach diesem Verhältnis waren. Und wenn man nur lange genug sucht, ist beinahe jedes Verhältnis schon irgendwo in einem Gesicht oder großen Bauwerk wie dem Parthenon wiederzufinden.



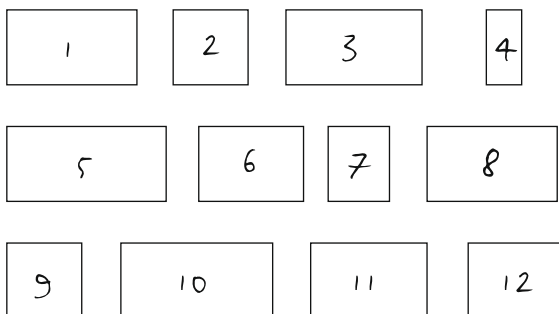
Such den Goldenen Schnitt. Die Basis des Parthenons ist 69,5 mal 30,9 Meter: Mit einem Verhältnis von ungefähr 2,24 erinnert das nicht besonders an den Goldenen Schnitt. Beim Lagerraum („cella“^a für die Kenner) kommst du schon besser in die Nähe: Der ist 29,8 mal 19,2 Meter, mit einem Verhältnis von ungefähr 1,55.

^a Als „cella“ bezeichnet man eigentlich den Raum, in dem die Götterstatue aufgestellt wurde. Dieser Raum wurde als der Raum der Gottheit angesehen und war nicht frei zugänglich.

Wird der Goldene Schnitt wirklich bevorzugt?

Es ist auch noch die Frage, ob Menschen den Goldenen Schnitt wirklich so schön finden. Betrachte mal selbst die untenstehenden Rechtecke: Welches findest du am schönsten?

Miss jetzt einmal nach, wie lang und breit dein Lieblingsrechteck ist, und teile die Angaben durcheinander. Ähnelte das Verhältnis 1,618? Bei einem kleinen Test mit 485 Freiwilligen war Rechteck 8 mit 94 Stimmen der Favorit. Danach folgten Rechteck 11 und 10. Aber ... das Rechteck mit dem Verhältnis, das dem Goldenen Schnitt am nächsten kommt, war nicht unter diesen drei Favoriten. Welches es ist? Das musst du selbst nachmessen.



π -Tag



Am 14. März ist π -Tag. In der amerikanischen Schreibweise ist der 14. März nämlich 3-14 und 3,14 ist der Anfang der dezimalen Entwicklung der Zahl π . Aber was ist denn nun so besonders an der Zahl π , dass ihr ein Tag gewidmet werden muss? Und was macht man dann eigentlich, am π -Tag?

Die Zahl π ist definiert als der Umfang eines Kreises geteilt durch seinen Durchmesser. Wenn man die Oberfläche oder den Umfang eines Kreises, von dem man den Radius weiß, ausrechnen will, braucht man π .

Bei Annäherung ist die Zahl π ungefähr 3,14159265. Bei Annäherung, denn die Zahlenfolge in der Dezimaldarstellung von π hört niemals auf. π ist kein Bruch und π ist daher auch nicht $\frac{22}{7}$, was manche Menschen denken. Der Bruch $\frac{22}{7}$ ist eine Annäherung von π , die aber nur bis auf zwei

Dezimalstellen stimmt. Im 17. Jahrhundert berechnete Ludolph van Ceulen bereits 35 Dezimalstellen von π (siehe auch Seite 80). Inzwischen hat man mehr als 10^{12} (das ist eine 1 mit zwölf Nullen) Dezimalstellen von π berechnet und das sind viel, viel mehr, als wir jemals benötigen werden.

Man hat noch kein Muster in den Dezimalstellen von π gefunden (außer, dass es Dezimalstellen von π sind) und es sieht daher so aus, als seien es vollkommen zufällige Ziffern. Aber es ist auch nicht bewiesen, dass die Dezimalzahlen von π genauso verteilt sind wie zufällige Ziffern.

Es gibt Menschen, die von π so fasziniert sind, dass sie eine beeindruckende Menge an Dezimalstellen auswendig gelernt haben. Der Rekord eines chinesischen Studenten liegt bei 67.890 Dezimalstellen. Jetzt finde ich die Dezimalstellen von π nicht so interessant, aber die Zahl selbst schon. Sie taucht nämlich an allerlei unerwarteten Orten in der Mathematik auf, auch an Orten, die auf den ersten Blick nichts mit Kreisen zu tun haben.

Wenn du zum Beispiel eine Nadel der Länge l auf einen Boden mit Holzlanken hast fallen lassen, die ebenfalls die Breite l haben, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel über einem Spalt liegt (und nicht ganz auf einer Planke) gleich $\frac{2}{\pi}$ (siehe Seite 28). Außerdem kommt die Zahl in dem Ergebnis einiger bestimmter, unendlicher Summen vor:

$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$. Auch in der Normalverteilung, die zum Beispiel beschreibt, wie Frauen über mögliche Schuhgrößen verteilt sind, kommt ein π vor (siehe auch Seite 110).

Weil π im Englischen genauso klingt wie *pie* (Torte), wird am π -Tag oft Torte gegessen. (Ein zusätzlicher Vorteil ist natürlich, dass Torten meist rund sind.) Auch π -zza steht gut da. Einem befreundeten Mathematiklehrer ist es selbst gelungen, seinen Schülern weiszumachen, dass er am π -Tag auf eine Torte eingeladen werden muss!

Schade, dass der π -Tag auch mal auf ein Wochenende fällt, denn er ist eine schöne Gelegenheit, um in der Klasse über π zu erzählen, oder um selbst mit einem Maßband die Umfänge und Durchmesser von Kreisen zu messen. Aber du kannst natürlich auch dein π -T-Shirt anziehen, Schuhe mit einem π darauf kaufen oder π -förmige Eiskwürfel machen: Wirklich, all das gibt es im Internet zu kaufen.

Und ich? Ich esse schon mein ganzes Leben lang am π -Tag Torte, denn da hat meine Mutter Geburtstag!

Jeanine

Geschenktipp π -Eiswürfel

Jeder Cocktail und jeder Fruchtsaft wird durch ein Stück Eis in π -Form aufgefrischt. Viel hübscher als Würfel!

Du erhältst sie auf: www.thinkgeek.com



Do-it-yourself: Das Buffon'sche Nadelproblem

Mit einem Stapel Zahnstocher kannst du auf überraschende Weise eine Näherung von π berechnen.

Du brauchst:

- Papier
- einen Bleistift
- ein Lineal
- Zahnstocher

Und so geht es:



1. Zeichne gerade parallele Linien auf das Papier, die genau eine Zahnstocherlänge auseinanderliegen.

2. Werf einen Zahnstocher auf das Papier und schau, ob er eine Linie berührt.



3. Wiederhole diesen Vorgang ganz oft oder wirf mit einem Mal eine Menge Zahnstocher auf das Papier.

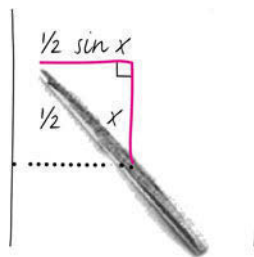
4. Zähle, wie viele Zahnstocher du geworfen hast und wie viele davon eine Linie berühren. Multipliziere die Anzahl der geworfenen Zahnstocher mit zwei und teile das Ergebnis durch die Anzahl der Male, die du getroffen hast. Wenn du zum Beispiel 177 Zahnstocher verwendest und dabei 113-mal getroffen hast, dann erhältst du: $\pi = \frac{2 \cdot 177}{113} \approx 3,13$.

Oft sind die Annäherungen übrigens nicht so gut wie in diesem Beispiel: Es kann durchaus sein, dass du erst nach 1000 Zahnstochern ein bisschen in die Nähe von π kommst. Aber wenn du lange genug fortfährst, dann solltest du letztendlich immer näher an 3,14... kommen.

Warum erhältst du π ?



Nimm der Bequemlichkeit halber an, dass die Länge der Zahnstocher eins ist (und der Abstand zwischen zwei Linien also auch). Betrachte einen der Zahnstocher. Wir zeichnen den Abstand von seiner Mitte zu der nächsten Linie mit einer gestrichelten Linie in das Bild hier. Nenne den unteren Winkel in dem pinken Dreieck x . Dann hat die oberste Seite des pinken Dreiecks die Länge $\frac{1}{2} \sin x$. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Zahnstocher eine Linie berührt, ist jetzt die Wahrscheinlichkeit, dass $\frac{1}{2} \sin x$ größer ist als der gestrichelte Abstand zwischen der Mitte des Zahnstochers und der nächsten Linie. Und die Wahrscheinlichkeit ist genau $\frac{2}{\pi}$.



Warum heißt das „das Buffon'sche Nadelproblem“?

Im 18. Jahrhundert stellte der Graf von Buffon eine Frage über Nadeln: Nimm an, dass du einen Boden aus Holzplanken hast, die alle gleich breit sind, und dass du auf diesem Boden eine Nadel fallen lässt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel zwischen zwei Planken fällt? Wenn die Länge l einer Nadel kürzer ist als die Breite b der Planken, dann ist die Antwort auf diese allgemeinere Frage $\frac{(2 \cdot l)}{(\pi \cdot b)}$.

Mit dieser Formel kannst du π also auch mit einem hölzernen Boden und einer Dose Nadeln annähern. Oder du bildest mit gefärbten Seilen Linien auf einer Rasenfläche und wirfst mit Schaschlikspießen.

π -Fans

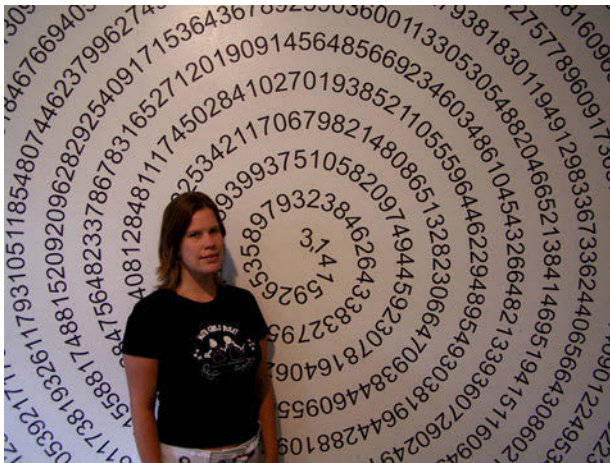


Manche Menschen finden π so prima, dass sie das Symbol darstellen. Hier bilden Schüler der flämischen Schule KSO Glorieux aus Ronse ein großes π zu Ehren des π -Tages ab.

Museumstipp Mathematikum

In Gießen steht ein echtes Mathematikmuseum: das Mathematikum. Der Zweck dieses Museums ist es, Mathematik vor allem Kindern und Jugendlichen zugänglich zu machen. Eine Menge Themen werden dort behandelt: Rätsel, täuschende Spiegel, Seifenblasen und noch viel mehr. Und es ist interaktiv: Du kannst selbst mitmachen!

Mehr Informationen unter www.mathematikum.de



Rätsel Große Zahlen

a) Welche dieser Zahlen ist die größte?

$$40^4$$

$$4^{40}$$

$$4^{(4^4)}$$

$$4 \cdot 4 \cdot 4$$

$$(4^4)^4$$

b) Schreib hier die größte Zahl auf, die du dir ausdenken kannst!

(Die Lösungen findest du hinten.)

Die Einsamkeit der Primzahlen



Vor einiger Zeit lag das Buch *Die Einsamkeit der Primzahlen* des italienischen Debütanten Paolo Giordano stapelweise in den Geschäften. Ein Buch mit so einem Titel konnte ich natürlich nicht einfach liegenlassen. Und obwohl ich fand, dass es sicher gut geschrieben ist, hatte ich nach einiger Zeit doch von den problematischen Charakteren genug. Wenden

wir uns stattdessen doch mal den Primzahlen selbst zu, denn die sind auch sehr interessant.

Eine Primzahl ist eine Zahl, die keine anderen Teiler als 1 und sich selbst hat. Nach Übereinkunft ist die Zahl 1 keine Primzahl. Die ersten Primzahlen sind also 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Und sind diese Primzahlen wirklich so einsam, wie Giordanos Titel vermuten lässt?

Es gibt unendlich viele Primzahlen, also sind sie in diesem Sinne nicht einsam. Aber sie stehen in der Reihe der ganzen Zahlen fast nie nebeneinander: 2 und 3 stehen nebeneinander und sind beides Primzahlen, aber danach sind Primzahlen immer mindestens zwei Zahlen auseinander (denn wenn zwei Zahlen nur den Abstand 1 haben, ist eine von beiden immer durch 2 teilbar). Primzahlen, die fast nebeneinander stehen, mit nur einer anderen ganzen Zahl dazwischen, heißen Primzahlzwillinge (also sind zum Beispiel 3 und 5 Primzahlzwillinge, und 11 und 13 auch). Giordanos Hauptfigur Mattia gebraucht diese Eigenschaft als Metapher: „Mattia dachte, dass Alice und er so waren, zwei Primzahlzwillinge, allein und verlassen, dicht beieinander, aber nicht dicht genug, um sich wirklich zu berühren.“ Daher die Einsamkeit.

In dem Maße, wie die Zahlen größer werden, werden die Primzahlen immer seltener: In der Nähe der Zahl 10.000 ist ungefähr eine von neun Zahlen eine Primzahl und um 1.000.000.000 eine von 21.

Auch in der Natur kommen Primzahlen vor. Ein bekanntes Beispiel ist der Lebenszyklus eines bestimmten Insekts, der Zikade. Zikaden sind etwas seltsame Tierchen. Je nach Sorte sitzen sie erst 13 oder 17 Jahre unter der Erde, wo sie von Säften aus Baumwurzeln leben, und danach kommen sie alle gleichzeitig nach oben, um sich fortzupflanzen. Einen Monat später sterben sie. Aber die Larven lassen sich wieder aus den Baumästen nach unten fallen und kriechen dann wieder für 13 oder 17 Jahre in die Erde und so weiter.



Wissenschaftler fragen sich natürlich: Ist es Zufall, dass die Länge dieser Zyklen Primzahlen sind, oder liegt darin ein evolutionärer Vorteil? Es zu beweisen ist schwer, aber man hat die Hypothese aufgestellt, dass eine Primzahl als Zyklus praktisch ist, um natürlichen Feinden aus dem Weg zu gehen. Wenn ihr Feind jedes Jahr da ist, ist es ganz egal, wann die Zikade

nach oben kommt. Aber wenn ein natürlicher Feind auch periodisch erscheint oder mit einer bestimmten Periode immer mehr oder weniger zahlreich auftaucht, dann willst du als Zikade lieber nicht in dem Moment nach oben kommen, in dem die Anzahl der Feinde auch ihre Spitze hat.

Wenn du als Zikade einen zwölfjährigen Zyklus hättest, dann könntest du deinen Feinden, die alle 1, 2, 3, 4, 6 oder 12 Jahre da sind, jedes Mal, wenn du nach oben kommst, begegnen. Wenn du einen 13-jährigen Zyklus hast, kannst du nur Feinden mit einem Zyklus von einem oder 13 Jahren jedes Mal begegnen. Und einem Feind mit einem sechsjährigen Zyklus begegnest du dann nur einmal alle $6 \cdot 13 = 78$ Jahre.

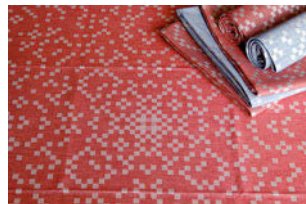
Zikaden richten übrigens kaum Schaden an. Sie sind aber sehr imposant: Auf einem Quadratkilometer können schon rund eine halbe Million Tierchen aus dem Boden kommen! Primzahlen sind vielleicht einsam, Zikaden sind es sicher nicht.

Jeanine

Geschenktipp Primzahlservietten

Decke deinen Tisch schön und in mathematischer Verantwortung mit diesen Primzahlservietten. Die Würfel in dem Muster stellen nicht die normalen Primzahlen dar, sondern die Primzahlen in den Gauß'schen Zahlen. Die Gauß'schen Zahlen sind alle Zahlen, die man als $a + bi$ schreiben kann, wobei a und b ganze Zahlen sind und wobei $i^2 = -1$. Bitte einen Mathematiker zu Tisch und lass ihn oder sie zwischen Vorspeise und Hauptgericht einmal haargenau erklären, wie es bei den Gauß'schen Zahlen mit den Primzahlen aussieht.

Erhältlich über www.sannydezoete.nl



Die klugen Babylonier

Unsere Art Zahlen aufzuschreiben, ist eigentlich sehr klug. Wir haben nur zehn Symbole (0, 1, 2, ..., 9) und doch können wir damit im Prinzip alle Zahlen aufschreiben, die wir uns ausdenken können, und das sind unendlich viele!

Das klappt deshalb so gut, weil unser Zahlensystem ein sogenanntes Stellenwertsystem ist. Das bedeutet, dass die Stellung eines Symbols in der Zahl bestimmt, wie viel das Symbol wert ist. In der Zahl 525 kommt das Symbol 5 zweimal vor, aber die zwei Fünfen bedeuten nicht genau das Gleiche: Die vordere 5 gibt an, dass in

der Zahl fünf Hunderter enthalten sind, und die letzte, dass es fünf Einer sind. Die 2 gibt die Anzahl der Zehner an. Kurzum: Die Zahl 525 bedeutet fünfmal Hundert, zweimal Zehn und fünfmal Eins zusammengezählt.

Weil wir ein Dezimalsystem haben, unterscheiden sich zwei nebeneinanderstehende Positionen immer um einen Faktor 10. Die Zahl 1729 zum Beispiel steht für $1 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$ (wobei 10^0 gleich 1 ist, denn außer für 0 gilt für jede Zahl, dass die Zahl hoch null gleich 1 ist). Und diese Idee funktioniert auch nach dem Komma immer noch gut: 1,3 bedeutet ein Einer und drei Zehntel, bzw.: $1 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1}$.

Diese kluge Art, Zahlen aufzuschreiben, gibt es schon sehr lange. Die Babylonier hatten vor ungefähr 4000 Jahren schon so ein Stellenwertsystem. Ihr Stellenwertsystem war nicht dezimal, sondern sexagesimal. Sie gebrauchten nur zwei Symbole: einen Nagel und einen Winkel. Mit diesen beiden Symbolen schrieben sie alle Zahlen von 1 bis 59 auf die folgende Weise auf:

𐎶 1	𐎶𐎶 11	𐎶𐎶𐎶 21	𐎶𐎶𐎶𐎶 31	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 41	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 51
𐎶𐎶 2	𐎶𐎶𐎶 12	𐎶𐎶𐎶𐎶 22	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 32	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 42	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 52
𐎶𐎶𐎶 3	𐎶𐎶𐎶𐎶 13	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 23	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 33	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 43	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 53
𐎶𐎶𐎶𐎶 4	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 14	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 24	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 34	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 44	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 54
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 5	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 15	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 25	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 35	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 45	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 55
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 6	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 16	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 26	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 36	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 46	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 56
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 7	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 17	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 27	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 37	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 47	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 57
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 8	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 18	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 28	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 38	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 48	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 58
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 9	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 19	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 29	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 39	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 49	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 59
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 10	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 20	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 30	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 40	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 50	

Das Interessanteste passiert natürlich direkt nach der 59. Wie schrieben sie 60 auf? Nun ja, 60 wurde einfach wieder als 1 aufgeschrieben! Also fast so, wie wir es tun: Wir beginnen nach 9 auch wieder mit der 1. Es gibt natürlich schon einen wichtigen Unterschied. Bei uns steht nach der 1 noch eine 0. Die 0 gibt an, dass die 1 nicht für einen Einer steht, sondern für den Zehner.

Wie würde ein Babylonier die Zahl 345 aufschreiben? Es passt fünfmal 60 hinein und dann noch 45. Oder besser: Erst kommt das Symbol für 5 (fünf Nägel also) und danach das Symbol für 45. Und 45 sah wie vier Zehner (Winkel) und fünf Einer (Nägel) aus, wie wir gerade gesehen haben.

Die Babylonier konnten also einer Zahl nicht ansehen, ob sie für Einer, 60er, 3600er oder sogar noch höhere Potenzen stand. Ist das unpraktisch? Manchmal vielleicht ja, aber meist wahrscheinlich nicht. In einer konkreten Situation kann man am Kontext wirklich gut sehen, welche Zahl gemeint ist, und um einen Faktor 60 wird man sich in der Praxis nicht so schnell täuschen.

Aber trotzdem: Manchmal willst du vielleicht eine Zahl wie 3601 aufschreiben und da stehen dann zwei Einsen nebeneinander. Das könnte natürlich auch 3660 bedeuten! Und das ist dann schon ein bisschen irritierend.

Auch hierfür fanden die Babylonier etwas. Erst gebrauchten sie einfach eine Leerstelle, aber später hatten sie ein eigenes Symbol für so eine leere Stelle. Das Symbol ähnelt gewissermaßen unserer Null, aber es gibt schon einen Unterschied. Das Symbol für eine leere Stelle war nämlich selbst keine Zahl und stand somit, anders als unsere Null, für „nichts“. Dieses Symbol wurde übrigens nie ans Ende einer Zahl gesetzt, also sahen 60 und 1 weiterhin gleich aus.

Aber das ist noch nicht alles: Auch $\frac{1}{60}$ sah so aus und $\frac{1}{3600}$ auch. Die Babylonier gebrauchten nämlich für Bruchzahlen dasselbe System. Das machen wir natürlich auch: Unsere 0,25 bedeutet einfach zwei Zehntel und fünf Hundertstel. Der größte Unterschied zu unserem System ist, dass die Babylonier so etwas wie ein Komma nicht kannten. Ein Nagel mit zwei Winkeln dahinter kann also sowohl $60 + 20 = 80$ als auch $1 + \frac{20}{60} = 1\frac{1}{3}$ bedeuten.

Das babylonische Zahlensystem wurde zum Beispiel bei Berechnungen in der Astronomie gebraucht, aber auch im Handel. Die Babylonier beschäftigten sich außerdem mit abstrakter Mathematik, sie konnten also mehr als alle anderen ein bisschen rechnen. Sie kannten beispielsweise bereits den Satz des Pythagoras und konnten bestimmte Arten von quadratischen Gleichungen lösen.

Die Babylonier waren auch diejenigen, die den Kreis in 360 Grad aufteilten. Wir wissen nicht genau, warum sie das taten. Aber sie teilten ein Grad in 60 Minuten und diese wiederum in 60 Sekunden und darin ist der Einfluss ihres Sexagesimalsystems gut zu erkennen. Die Aufteilung des Tages in 24 Stunden kommt aus Ägypten, aber in unserer Stunde mit 60 Minuten und unserer Minute mit 60 Sekunden sehen wir noch immer den babylonischen Einfluss.

Eine Reihe Quadrate



Neulich machte ich mit meinen Schülern der Orientierungsstufe ein Mathe-Quiz. Ich stellte unter anderem die Frage: Welche drei Zahlen folgen in der Reihe 1, 4, 9, 16 ... ?

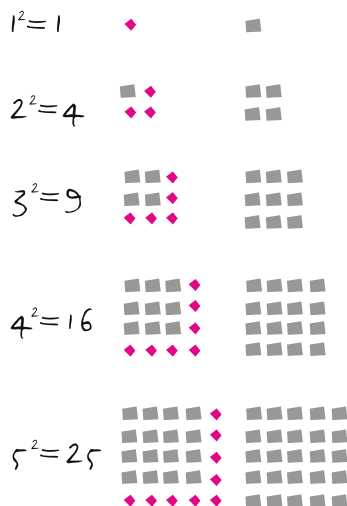
Jetzt kann man sich streng genommen zu drei beliebig folgenden Zahlen eine mathematische Regel ausdenken, die genau die Zahlen ergibt, aber meine Schüler gingen lebhaft

auf die Suche nach einem nicht zu komplizierten Muster, und sie fanden eines. Alle Gruppen nannten als folgende drei Zahlen 25, 36 und 49. Auf Nachfrage nach dem Muster, das sie gefunden hatten, sagten sie: „Nun, erst hast du 1, dann fügst du 3 hinzu, dann 5, dann 7 und so weiter, also du fügst immer die folgende ungerade Zahl hinzu.“ Das stimmt ganz und gar.

Aber vielleicht denkst du nun überrascht: „Hey, aber das sind doch genau die Quadrate?“ Das stimmt auch: $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$ und $4^2 = 16$. Das ist lustig. Meine Schüler aus der Orientierungsstufe hatten noch nicht gelernt, was ein Quadrat ist. Offenbar ist ihre übliche Vorgehensweise bei so einer Folgenbildungsaufgabe, nach den Unterschieden zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zahlen zu suchen und zu schauen, ob darin eine offensichtliche Regelmäßigkeit enthalten ist. Und sie hatten sie gefunden.

Nun ist es auf den ersten Blick wirklich verrückt, dass die Regelmäßigkeit meiner Schüler (immer die folgende ungerade Zahl dazu zu addieren) und die Regelmäßigkeit, die mir direkt ins Auge springt (die Reihe der Quadrate), dieselben drei folgenden Zahlen ergeben. Also kannst du dich fragen: Ist das Zufall? Oder geben diese zwei Arten auch bei der vierten, fünften, sechsten und hundertmillionsten Zahl dieselben Antworten?

Bei der Regel meiner Schüler zählst du nacheinander etwas zur 1 hinzu: erst 3, dann 5, dann 7, 9 und so weiter. Die achte Zahl in der Reihe ist also die Summe (Addition) der ersten acht ungeraden Zahlen. Allgemein formuliert: Die n -te Zahl in der Reihe ist die Summe der ersten n ungeraden Zahlen, egal, welche Zahl n ist. Aber wenn wir die Reihe mit der Quadratregel fortsetzen, ist die n -te Zahl in der Reihe das Quadrat der Zahl n , oder n^2 . Die Frage ist also: Sind die Reihen wirklich dieselben, oder: Ist die Summe der ersten n ungeraden Zahlen gleich n^2 , für alle n ? Ja, das ist so, und es ist sogar ziemlich einfach zu erkennen, warum!



Eine einfache Bilderreihe zeigt, was dabei passiert. Wir beginnen mit der Zahl 1: das eine pinke Quadrat links oben. Dann zählen wir 3 dazu, in dem Bild darunter angedeutet durch die drei pinken Quadrate. Diese drei Quadrate sind so hingelegt, dass genau ein Quadrat von 2×2 entsteht, also

siehst du sofort, dass dort 2^2 Quadrate liegen. Und so machen wir weiter. Wenn dort ein Quadrat von n mal n Quadraten liegt, das also aus n^2 Quadraten besteht, dann müssen wir $n + n + 1$ oder $2n + 1$ Quadrate dazulegen, um das nächste Quadrat zu legen. Und $2n + 1$ ist genau die nächste ungerade Zahl.

Übrigens, mach dir keine Sorgen: Inzwischen wissen meine Schüler auch, was Quadrate sind.

Jeanine

Wo sind die normalen Zahlen?

- ☞ Eine der merkwürdigsten Fragen in der Mathematik handelt von normalen Zahlen.
- ☞ Eine Zahl heißt normal, wenn in ihren Dezimalen jede Ziffernfolge genauso oft vorkommt, wie du aufgrund einer zufälligen Verteilung erwarten würdest. Die 1 muss also genauso oft vorkommen wie die 4 oder die 7. Und ordentlicherweise muss eine von zehn Ziffern eine 3 sein, eines von hundert Paaren muss 56 sein und so weiter. Bei der Champernowne-Zahl (die nach dem Mathematiker benannt ist, der sie 1933 als Erster aufschrieb), geht das zum Beispiel ausgezeichnet:

0,12345678910111213141516171819202122...

Nach dem Komma schreibst du einfach alle Zahlen, die du durch Durchzählen erhältst, auf, und damit machst du unendlich lange weiter. In dieser Konstante ist eine von zehn Ziffern eine 3, eines von hundert Paaren eine 56 und so weiter. Es gibt nur eine kleine Tücke: Eine Zahl heißt nur dann normal, wenn diese gleichmäßige Verteilung für alle Zahlensysteme gilt. Wenn du eine Zahl binär oder – wie die Babylonier – in einem Sexagesimalsystem aufschreibst, muss auch jede Zahlenfolge mit der richtigen Häufigkeit vorkommen. Und leider ist die Champerown'sche Konstante nicht in jedem Zahlensystem normal.

Gibt es überhaupt normale Zahlen?

1909 bewies der französische Mathematiker Émile Borel, dass es sehr viele normale Zahlen gibt. Mehr noch, er bewies, dass fast jede Zahl normal ist. Wenn man aus einem Zahlenstrahl eine willkürliche Zahl heraussticht, dann ist die Wahrscheinlichkeit 1, dass man eine normale Zahl erwischt. Aber jetzt kommt das Verrückte: Borel konnte keine einzige konkrete normale Zahl vorzeigen. Er wusste also, dass fast jede Zahl normal war, aber konnte nicht einmal ein einziges Beispiel finden.

Erst 1917 gelang es Waław Sierpiński (dem Mathematiker des Sierpiński-Fraktals aus Kap.1) als Erstem, ein Beispiel für eine normale Zahl zu geben. Er

gebrauchte dafür eine verzwickte Konstruktion mit unendlich vielen Intervallen. Mit seinen eigenen Worten: „Es war sicher nicht leicht, eine normale Zahl zu konstruieren. Beispiele solcher Zahlen sind ziemlich verzwick.“

Mittlerweile sind wir eigentlich nicht so viel weiter gekommen. Wir können eine Handvoll normale Zahlen konstruieren, aber von der Mehrzahl der Zahlen haben wir keine Ahnung, ob sie normal sind. Es gibt starke Vermutungen, dass zum Beispiel π und $\sqrt{2}$ normale Zahlen sind. Aber sicher wissen wir es nicht. Das Traurige ist, dass wir eigentlich herzlich wenig über die Dezimalstellen von π wissen. Wir wissen, dass π unendlich viele Dezimalstellen hat und dass es kein wiederholendes Muster in diesen Dezimalen gibt. Aber ob unendlich viele Einsen darin enthalten sind, ist eine offene Frage. Es ist theoretisch sehr gut möglich, dass π nach einer endlichen Anzahl von Dezimalen nur mit Dreien und Siebenen weitergeht. . .

Das Suchen nach verschlüsselten Botschaften in der unendlichen Reihe der Dezimalstellen von π ist ein populäres Hobby. Indem man die Ziffern in Buchstaben umsetzt, kann man Sätze wie „God bestaat“ (dt.: Gott existiert) in den Dezimalstellen entdecken. Aber wenn π wirklich eine normale Zahl ist, dann kommt jede Ziffernreihe darin vor. Dann müsste auch der Satz „God bestaat niet“ (dt.: Gott existiert nicht) von selbst einmal in den Dezimalstellen auftauchen, genau wie der gesamte Text von *Hamlet* oder dieses komplette Buch.

Mit den Mathemädels durch die Welt

Daems, J.; Smeets, I.

2016, X, 169 S. 107 Abb., 12 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-662-48098-4