

Elektrische Felder im Vakuum bei vorgegebener Ladungsverteilung

2

2.1	Feldberechnung mit dem Coulombschen Gesetz	22
2.2	Feldberechnung mit dem Gaußschen Gesetz	22
2.3	Elektrische Dipole, Quadrupole und Multipole	25
	Übungsaufgaben	32

Wir haben nun verschiedene Methoden in der Hand, um das elektrische Feld zu berechnen, wenn bekannt ist, wie die felderzeugenden Ladungen im Raume verteilt sind. Sie sind in Tab. 2.1 zusammengestellt. Im obersten Teil stehen die Formeln, die sich unmittelbar aus dem Coulombschen Gesetz und dem Superpositionsprinzip ergeben, im mittleren Teil, darauf aufbauend, die Formeln für das Potential und im untersten Teil die Grundgleichungen der Elektrostatik. Die Gleichungen sind sowohl für den Fall diskreter Punktladungen q_i als auch für den Fall einer kontinuierlichen Ladungsverteilung angegeben. Die Definition der in Tab. 2.1 verwendeten Vektoren wurde in Abb. 1.9 gegeben. Sie ist in Abb. 2.1 nochmals gezeigt.

Wir werden zunächst die direkte Anwendung des Coulombschen Gesetzes erläutern und dann einige Beispiele zur Anwendung des Gaußschen Gesetzes behandeln. Sie beschränken sich auf Ladungsverteilungen hoher Symmetrie, sind aber gerade deshalb auch von praktischer Bedeutung. Eine andere Klasse von Ladungsverteilungen und Feldern baut auf dem Konzept und den Feldern des elektrischen Dipols auf; das wird im dritten Abschnitt diskutiert. Dort werden wir zunächst die Potentialfelder berechnen und dann aus ihnen die Feldstärke $E(r)$ ableiten.

2.1 Feldberechnung mit dem Coulombschen Gesetz

Die direkte Anwendung des Coulombschen Gesetzes führt schnell zum Ziel, wenn das von wenigen Punktladungen erzeugte Feld zu berechnen ist (Aufgabe 2.1). Bei kontinuierlichen Ladungsverteilungen sind die in Tab. 2.1 angegebenen Integrale für $E(r)$ oder $\phi(r)$ zu berechnen, was im Allgemeinen recht mühsam ist. Das Volumenintegral für $E(r)$ steht als Kurzform für drei Gleichungen, mit denen die Vektorkoordinaten E_x , E_y und E_z berechnet werden können. Das für E_x zu berechnende Integral, voll ausgeschrieben mit $r = (x, y, z)$ und $r' = (x', y', z')$, sieht folgendermaßen aus:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho_q(x', y', z') (x - x')}{|r' - r|^3} dx' dy' dz'. \quad (2.1)$$

Entsprechende Ausdrücke wären für E_y und E_z zu integrieren. Gewöhnlich ist es einfacher, das Integral

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho_q(x', y', z')}{|r' - r|} dx' dy' dz' \quad (2.2)$$

Tabelle 2.1 Formeln zur Berechnung elektrischer Felder im Vakuum aus einer bekannten Ladungsverteilung

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i(r - r_i)}{|r - r_i|^3} \quad (1.23)$$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_q(r')(r - r')}{|r - r'|^3} dV' \quad (1.24)$$

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|r - r_i|} \quad (1.39)$$

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_q(r')}{|r - r'|} dV' \quad (1.40)$$

$$\oint \epsilon_0 E \cdot dA = q, \quad \oint E \cdot ds = 0 \quad (1.45)$$

$$\Delta\phi = -\frac{\rho_q}{\epsilon_0} \quad (1.51)$$

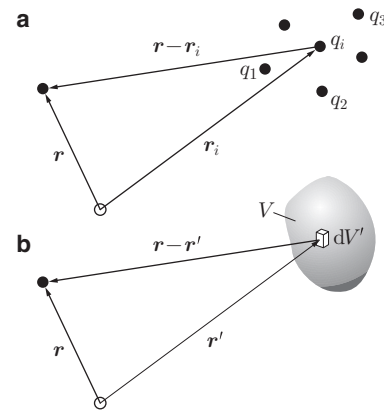


Abbildung 2.1 Definition der Vektoren in Tab. 2.1. a diskrete Ladungen, b kontinuierliche Ladungsverteilung

zu berechnen und anschließend $E_x = -\partial\phi/\partial x$, $E_y = -\partial\phi/\partial y$ und $E_z = -\partial\phi/\partial z$ zu berechnen, aber auch das ist im Allgemeinen recht mühsam. Ein Beispiel zur Feldberechnung mit (2.1) haben wir schon in Bd. I/3.3 behandelt, als es darum ging, die Gravitationskraft einer kugelsymmetrischen Massenverteilung zu berechnen. Das ging verhältnismäßig leicht, aber genau in solchen Fällen hoher Symmetrie kann man das Feld noch viel einfacher mit dem Gaußschen Gesetz berechnen.

2.2 Feldberechnung mit dem Gaußschen Gesetz

Kugelsymmetrische Ladungsverteilungen

Wir betrachten eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung vom Radius R . Zunächst untersuchen wir das Feld

im Abstand $r \geq R$ vom Kugelzentrum. Wegen der Kugelsymmetrie der Ladungsverteilung muss auch das Feld kugelsymmetrisch sein, und die Feldlinien müssen in radialer Richtung verlaufen. Der Fluss durch eine konzentrische Kugelfläche vom Radius r ist nach (1.45)

$$\oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E_r(r) 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

wenn Q die Gesamtladung der Kugel ist. Die Feldstärke im Außenraum ist also

$$r \geq R: \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{r}. \quad (2.3)$$

Sie verhält sich so, als ob die gesamte Ladung im Zentrum der Kugel säße. Das gilt offenbar für jedes $1/r^2$ -Kraftgesetz, also auch für die Gravitation, wenn man Q durch die Masse m ersetzt. Wir haben davon schon in Bd. I/3.3 Gebrauch gemacht. – Da sich die Feldstärke für $r \geq R$ wie das Feld einer Punktladung verhält, ist das Potential durch (1.38) gegeben:

$$r \geq R: \quad \phi(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r}. \quad (2.4)$$

Um das Feld im Innern der Kugel zu untersuchen, betrachten wir zunächst den Fall, dass die Gesamtladung Q auf der Kugeloberfläche gleichmäßig verteilt ist. Der Fluss durch eine konzentrische Kugelfläche vom Radius $r < R$ ist Null, da keine Ladung eingeschlossen ist. Nach (1.45) gilt also innerhalb der geladenen Kugelschale

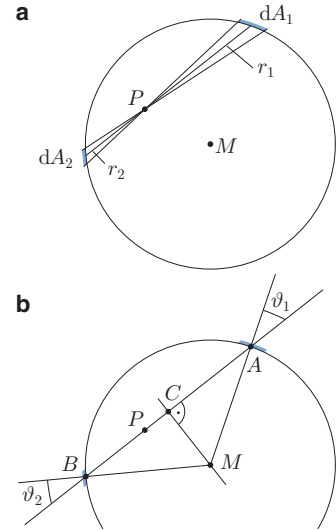
$$r < R: \quad E(r) = 0. \quad (2.5)$$

Dies ist eine unmittelbare Folge des $1/r^2$ -Gesetzes, wie die folgende Überlegung zeigt: In Abb. 2.2a betrachten wir einen spitzen Doppelkegel, ausgehend von einem beliebigen Punkt P im Innern der Kugelschale. Er schneidet aus der Kugeloberfläche die Flächenelemente dA_1 und dA_2 aus. Die Raumwinkel, unter denen dA_1 und dA_2 von P aus gesehen erscheinen, sind bei dieser Konstruktion gleich, es ist

$$d\Omega = \frac{\cos \vartheta_1 dA_1}{r_1^2} = \frac{\cos \vartheta_2 dA_2}{r_2^2}.$$

Nun ist $\vartheta_1 = \vartheta_2$, denn in Abb. 2.2b sind die Dreiecke AMC und BMC kongruent. Es folgt also $dA_1/r_1^2 = dA_2/r_2^2$. Bei einer homogen geladenen Kugelfläche sind die Ladun-

Abbildung 2.2 Zur Begründung von (2.5)



gen $dq \propto dA$. Die Beiträge der beiden Flächenelemente zur Feldstärke am Punkt P heben sich genau dann exakt auf, wenn $E \propto dq/r^2$ ist. Da man die gesamte Kugeloberfläche mit Paaren von Flächenelementen dieser Art erfassen kann, muss bei Gültigkeit des $1/r^2$ -Gesetzes die Feldstärke im Innern der homogen geladenen Kugelfläche verschwinden. Man könnte eine elektrische Ladung *kräftefrei* beliebig innerhalb der Kugelschale herumführen; sobald die Ladung aber die Kugelfläche durchbricht, spürt sie sofort die Gesamtladung der Kugelschale, als ob diese im Kugelmittelpunkt vereint säße – ein merkwürdiges Ergebnis.

Damit ist es ganz einfach, das Feld im Innern einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung zu berechnen. Es ist

$$E(r) = \frac{q(r)}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{r}, \quad (2.6)$$

wenn $q(r)$ die Ladung *innerhalb* des Radius r ist. Speziell im Fall einer homogen geladenen Kugel ist

$$\rho_q = Q / \left(\frac{4\pi}{3} R^3 \right), \quad q(r) = \frac{4\pi}{3} \rho_q r^3 = Q \frac{r^3}{R^3}.$$

Wir erhalten für das Feld im Innern der **homogen geladenen Kugel**:

$$r < R: \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{r}{R^3}. \quad (2.7)$$

Das Potential kann man mit (1.34) berechnen (Aufgabe 2.2):

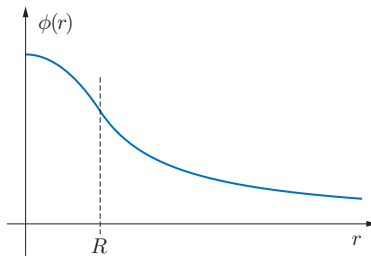


Abbildung 2.3 Potential einer homogen positiv geladenen Kugel vom Radius R

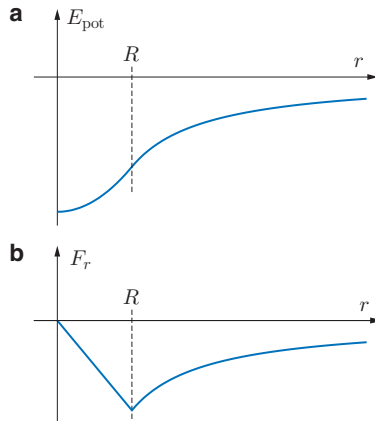


Abbildung 2.4 Zu Gl. (2.8) und (2.7): **a** Potentielle Energie einer positiven Punktladung im Felde einer homogen negativ geladenen Kugel vom Radius R , **b** die Kraft auf die Punktladung

$$r < R : \quad \phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3}{2R} - \frac{r^2}{2R^3} \right). \quad (2.8)$$

Es ist in Abb. 2.3 für $Q > 0$ aufgetragen. Im Innern einer homogen negativ geladenen Kugel ist demnach ein positiv geladenes Teilchen *elastisch* gebunden: Die potentielle Energie wächst quadratisch, der Betrag der anziehenden Kraft wächst linear mit dem Abstand vom Mittelpunkt der Kugel (Abb. 2.4b). Man beachte: $F_r = \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{r}}$ ist hier negativ.

Die Linienladung

Wir betrachten den in Abb. 2.5 gezeigten Fall, dass elektrische Ladungen gleichmäßig entlang einer geraden Linie, der z -Achse, verteilt sind. Diese Ladungsverteilung soll sich bis ins Unendliche erstrecken. λ_q sei die Dichte der Ladung auf dieser Linie, d. h. die Ladung auf der Länge l ist

$$q = \lambda_q l. \quad (2.9)$$

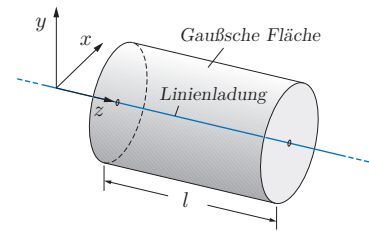


Abbildung 2.5 Linienladung und Integrationsfläche für (2.11)

Das elektrische Feld muss zylindersymmetrisch und für $\lambda_q > 0$ radial nach außen gerichtet sein. Mit

$$E_r = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}, \quad E_z = 0 \quad (2.10)$$

erhält man für den Fluss durch die in Abb. 2.5 eingezeichnete geschlossene Fläche

$$\Phi_{\text{el}} = \oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E_r \cdot 2\pi r l = \frac{\lambda_q l}{\epsilon_0}, \quad (2.11)$$

denn nur der Zylindermantel gibt einen Beitrag zum elektrischen Fluss. Es folgt für die Feldstärke

$$\mathbf{E}(r) = \frac{\lambda_q}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{\mathbf{r}}. \quad (2.12)$$

Hier ist also die Feldstärke proportional zu $1/r$. Der Einheitsvektor $\hat{\mathbf{r}}$ steht senkrecht auf der Zylinderachse und zeigt zum Aufpunkt \mathbf{r} hin. Bei der Berechnung des Potentials muss man aufpassen: Da sich die Ladungsverteilung in z -Richtung bis ins Unendliche erstreckt, kann man nicht einfach $\phi(\infty) = 0$ setzen. Man setzt daher $\phi = 0$ für $r = \rho$, wobei ρ im Bereich $0 < \rho < \infty$ beliebig gewählt werden kann. Man erhält dann mit (1.34)

$$\begin{aligned} \phi(r) &= - \int_{\rho}^r E(u) du = - \frac{\lambda_q}{2\pi\epsilon_0} \int_{\rho}^r \frac{du}{u} \\ &= - \frac{\lambda_q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{\rho} = \frac{\lambda_q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho}{r}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Für $\lambda_q > 0$ sind Feldstärke und Potential in Abb. 2.6 als Funktion von r aufgetragen.

Ebene Flächenladungen

Auf einer Ebene seien gleichmäßig elektrische Ladungen mit der Flächendichte σ_q verteilt. Ein Flächenelement trägt

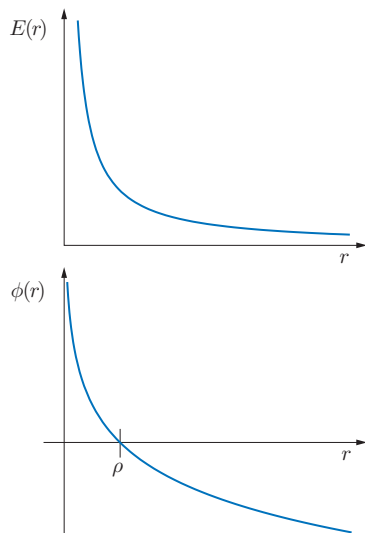
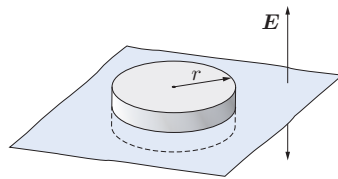


Abbildung 2.6 Feldstärke und Potential der Linienladung mit $\lambda_q > 0$

Abbildung 2.7 Ausschnitt aus einer ebenen Flächenladung. Zur Berechnung von (2.15)



die Ladung

$$dq = \sigma_q dA. \quad (2.14)$$

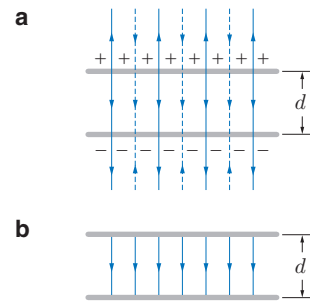
Wir nehmen an, die Fläche sei unendlich ausgedehnt. Aus Symmetriegründen müssen die Feldlinien des elektrischen Feldes senkrecht auf der Fläche stehen und auf beiden Seiten der Fläche dieselbe Dichte haben. Zur Berechnung der Feldstärke betrachten wir den Fluss durch die in Abb. 2.7 gezeigte Integrationsfläche, die die Ladung $\pi r^2 \sigma_q$ einschließt. Diesmal tragen nur die Deckflächen des Zylinders zum Fluss bei. Wir erhalten

$$\oint_F \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 2\pi r^2 E = \frac{\pi r^2 \sigma_q}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{\sigma_q}{2\epsilon_0}. \quad (2.15)$$

Auf beiden Seite der Ebene besteht ein homogenes elektrisches Feld, dessen Stärke allein durch die Flächenladungsdichte σ_q gegeben ist.

Nun nehmen wir an, dass sich zwei parallele Ebenen im Abstand d gegenüberstehen, von denen die eine mit der Flächendichte $+\sigma_q$, die andere mit der Flächendichte $-\sigma_q$ aufgeladen ist. Aufgrund des Superpositionsprinzips addieren sich die beiden Felder, wie in Abb. 2.8a gezeigt. Es

Abbildung 2.8 Zur Ableitung von (2.16). **a** ausgezogen: Feldlinien der positiven, gestrichelt: Feldlinien der negativen Platte. **b** Resultierendes Feld



entsteht zwischen den Ebenen ein homogenes elektrisches Feld der Stärke

$$E = \frac{\sigma_q}{\epsilon_0}, \quad (2.16)$$

und im Außenraum ist die Feldstärke Null (Abb. 2.8b). Diese Feldverteilung wird uns im nächsten Kapitel bei der Diskussion des Plattenkondensators wieder begegnen.

Lässt man in Abb. 2.8 den Abstand sehr klein werden ($d \rightarrow \delta$), entsteht eine Ladungsverteilung, die man **elektrische Doppelschicht** nennt. Außerhalb der Doppelschicht ist die Feldstärke $E = 0$. Von der Doppelschicht ist dennoch etwas zu merken, denn es findet an der Doppelschicht eine sprunghafte Änderung des Potentials statt. Solche Doppelschichten spielen in der Biologie und Zellphysiologie eine wichtige Rolle; auch an der Berührungsfläche zwischen zwei verschiedenen Metallen und an Grenzflächen von Elektrolyten bildet sich eine elektrische Doppelschicht aus (Abschn. 7.4 und 9.5).

2.3 Elektrische Dipole, Quadrupole und Multipole

Der elektrische Dipol

Ein **elektrischer Dipol** entsteht, wenn sich zwei Ladungen $+q$ und $-q$ im Abstand d gegenüberstehen (Abb. 2.9). Der Feldverlauf im Bereich $r \approx d$ wurde bereits in Abb. 1.10a gezeigt. Wir interessieren uns hier für das elektrische Feld im Abstand $r \gg d$. Diesmal benutzen wir eine Formel aus dem mittleren Teil von Tab. 2.1. Das Potential am Punkt P ist nach (1.39)

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\left| r - \frac{d}{2} \right|} + \frac{(-q)}{\left| r + \frac{d}{2} \right|} \right). \quad (2.17)$$

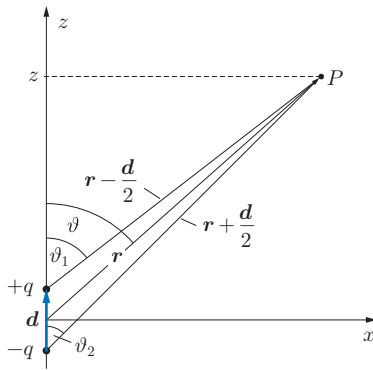


Abbildung 2.9 Elektrischer Dipol

Nach Abb. 2.9 ist

$$\begin{aligned} \left| r - \frac{d}{2} \right| &= \sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4} - rd \cos \vartheta} \\ &= r \sqrt{1 + \frac{d^2}{4r^2} - \frac{d}{r} \cos \vartheta}, \\ \left| r + \frac{d}{2} \right| &= \sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4} + rd \cos \vartheta} \\ &= r \sqrt{1 + \frac{d^2}{4r^2} + \frac{d}{r} \cos \vartheta}. \end{aligned}$$

Für $\epsilon \ll 1$ ist $1/\sqrt{1+\epsilon} \approx 1 - \epsilon/2$. Damit erhält man für $r \gg d$

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \phi(r, \vartheta) = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 - \frac{d^2}{8r^2} + \frac{d}{2r} \cos \vartheta - 1 + \frac{d^2}{8r^2} + \frac{d}{2r} \cos \vartheta \right), \\ \phi(r) &= \frac{qd}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \vartheta}{r^2} = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r^3}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Das Produkt qd bezeichnet man als das **Dipolmoment** p . Da d ein Vektor und q ein Skalar ist, ist auch p ein Vektor:

$$p = qd. \quad (2.19)$$

Die Vektoren d und p zeigen von der negativen zur positiven Ladung in z -Richtung. Wir können damit (2.18) auch folgendermaßen schreiben:

$$\phi(r) = \frac{p \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (2.20)$$

Das Dipolpotential fällt proportional zu $1/r^2$ ab und ist zusätzlich noch vom Winkel zwischen r und p abhängig.

Die Feldstärke berechnen wir mit $E = -\text{grad } \phi$:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) \\ &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3zx}{r^5}, \\ E_y &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) \\ &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3zy}{r^5}, \\ E_z &= -\frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) \\ &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right). \end{aligned}$$

In vektorieller Schreibweise kann man dies wie folgt formulieren:

$$E(r) = \frac{3(p \cdot r)r - r^2 p}{4\pi\epsilon_0 r^5}. \quad (2.21)$$

Mit $p = (0, 0, p)$ erhält man die oben angegebenen Formeln. Da das Feld rotationssymmetrisch um die z -Achse ist, können wir es auch in zwei Komponenten parallel und senkrecht zu p zerlegen:

$$\begin{aligned} E_{\parallel} = E_z &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3z^2 - r^2}{r^5} \\ &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3 \cos^2 \vartheta - 1}{r^3}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} E_{\perp} &= \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3z}{r^5} (x^2 + y^2)^{1/2} \\ &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3 \cos \vartheta \sin \vartheta}{r^3}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Im Abstand r vom Dipolzentrum ist der Betrag der Feldstärke auf der z -Achse doppelt so groß wie in der (x, y) -Ebene, und in jeder Richtung fällt die Feldstärke proportional zu $1/r^3$ ab. In Abb. 2.10 ist das Feldlinienbild gezeigt. Man sollte es sich merken und zugleich die Proportionalitäten

$$\begin{aligned} \text{Elektrischer Dipol, } r \gg d : \phi(r) &\propto \frac{1}{r^2}, \\ |E|(r) &\propto \frac{1}{r^3}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Auf der z -Achse und in der (x, y) -Ebene verschwindet die transversale Feldkomponente E_{\perp} .

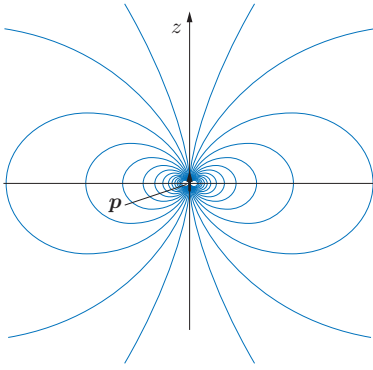
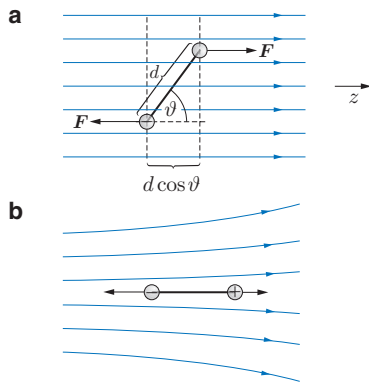


Abbildung 2.10 Feldlinien eines elektrischen Dipols

Abbildung 2.11 Kräfte auf einen Dipol **a** im homogenen, **b** im inhomogenen elektrischen Feld

Kräfte auf einen Dipol im elektrischen Feld. Im homogenen elektrischen Feld wird auf einen elektrischen Dipol ein Drehmoment M ausgeübt (Abb. 2.11a). Es ist

$$M = d \times F = p \times E. \quad (2.25)$$

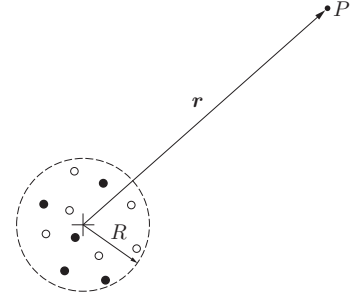
Um den Dipol gegen die Wirkung dieses Drehmoments im elektrischen Feld zu verdrehen, muss Arbeit geleistet werden. Der Dipol besitzt also im homogenen elektrischen Feld eine potentielle Energie E_{pot} , die vom Winkel ϑ zwischen p und E abhängt. Setzt man $E_{\text{pot}} = 0$ für $\vartheta = 90^\circ$, dann ist die potentielle Energie in der in Abb. 2.11a gezeigten Stellung

$$E_{\text{pot}} = -(d \cos \vartheta) qE,$$

denn die Ladung $+q$ wurde gegenüber der Stellung $\vartheta = 90^\circ$ um die Strecke $d \cos \vartheta$ in Feldrichtung verschoben. In vektorieller Schreibweise erhalten wir

$$E_{\text{pot}} = -p \cdot E. \quad (2.26)$$

Abbildung 2.12 Zur Multipolentwicklung des Potentials.
 • Positive, ○ negative Ladungen



Im inhomogenen Feld wirkt auf den Dipol außer dem Drehmoment eine Kraft, und zwar wird er in den Bereich hoher Feldstärke hineingezogen, wenn er wie in Abb. 2.11b orientiert ist. In diesem Fall ist die Kraft

$$F = p \frac{\partial E_z}{\partial z} = -p \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}. \quad (2.27)$$

Multipolentwicklung des elektrischen Feldes

Wir betrachten n Punktladungen an den Orten r_i , die innerhalb eines Abstands R um den Nullpunkt des Koordinatensystems in beliebiger Weise verteilt sind (Abb. 2.12), oder auch eine kontinuierliche Ladungsverteilung $\rho_q(r')$ innerhalb des Abstands R . Wie sieht in einem Abstand von dieser Ladungsverteilung, z. B. am Punkt P , das elektrische Feld aus? Zur Beantwortung dieser Frage kann man für $r > R$ die Gln. (1.39) bzw. (1.40) nach Potenzen von $1/r$ entwickeln. Wir übergehen die mathematischen Details und geben nur das Ergebnis an. Man erhält die sogenannte **Multipolentwicklung** des Potentials:

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \frac{a_0}{r} + \frac{a_1(\vartheta, \varphi)}{r^2} + \frac{a_2(\vartheta, \varphi)}{r^3} + \dots \\ &= \sum \frac{a_l(\vartheta, \varphi)}{r^{l+1}} \quad \text{mit } l = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.28)$$

Das Potential hängt von den Winkeln ϑ und φ ab, die die zum Ortsvektor r gehörigen sphärischen Polarkoordinaten sind (siehe Abb. 2.9 und Bd. I, Gl. (21.10)). a_0 ist durch die Gesamtladung $q = \sum q_i$ gegeben, die man hier auch das **Monopolmoment** der Verteilung nennt:

$$a_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}. \quad (2.29)$$

a_1 ist durch das Dipolmoment der Ladungsverteilung gegeben. Wenn man dieses durch

$$p = \sum_{i=1}^n q_i r_i, \quad \text{bzw.} \quad p = \int_V \rho_q(r') r' dV' \quad (2.30)$$

definiert, wobei \mathbf{r}_i bzw. \mathbf{r}' die Ortsvektoren der Ladungen sind, ergibt die Reihenentwicklung (2.28)

$$a_1 = \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0}. \quad (2.31)$$

Der zweite Term der Reihenentwicklung stimmt mit (2.20) überein.

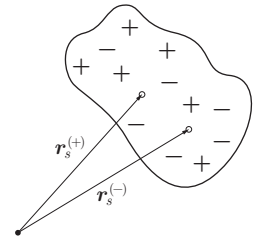
a_2 ist das **Quadrupolmoment** der Ladungsverteilung, multipliziert mit einer Winkelfunktion, und allgemein sind die Terme a_i/r^{i+1} die Beiträge des 2^i -Polmoments zum Feld der Ladungsverteilung. Man kann sich im Allgemeinen auf die ersten Terme der Reihenentwicklung beschränken, denn für $r \gg R$ wird der Beitrag der höheren Multipole vernachlässigbar. Nähert man eine Probeladung der Ladungsverteilung, so zeigt sich zunächst, ob die Gesamtladung $q \neq 0$ ist ($1/r^2$ -Abfall der Feldstärke), dann macht sich das Dipolmoment der Verteilung bemerkbar ($1/r^3$ -Abfall der Feldstärke), und schließlich spürt die Probeladung etwas von den eventuell vorhandenen höheren Multipolmomenten. Wir betrachten hier nur das Dipolmoment und das Quadrupolmoment der Ladungsverteilung etwas genauer.

Dipolmoment einer Ladungsverteilung

Das Dipolmoment einer Ladungsverteilung ist durch (2.30) definiert. Diese Formel ist etwas verblüffend, weil damit auch eine *einzelne* Ladung q_1 , die nicht im Nullpunkt des Koordinatensystems sitzt, ein Dipolmoment $\mathbf{p} \neq 0$ hat. Auch hängt das Resultat, das (2.30) liefert, vom Nullpunkt des Koordinatensystems ab, denn bei einer Verschiebung um \mathbf{s} würde sich das Dipolmoment um $\mathbf{s} \sum q_i$ ändern, was nur bei verschwindender Gesamtladung Null ist. Um zu einer eindeutigen Definition des Dipolmomentes zu gelangen, ist es zweckmäßig, den *Massenschwerpunkt* als Nullpunkt festzulegen. Befindet sich ein beliebiges System von Ladungen in einem homogenen elektrischen Feld, wird nämlich nach dem Impulssatz sein Massenschwerpunkt mit der Kraft $E \sum q_i$ beschleunigt, also so, als ob die Gesamtladung und die Gesamtmasse an diesem Punkt konzentriert wären. Das zeichnet diesen Punkt als einzigen aus.

Den endlichen Beitrag einer Einzelladung q_1 zum Dipolmoment kann man verstehen, wenn man sich im Nullpunkt noch zusätzlich zwei Ladungen $+q_1$ und $-q_1$ angebracht denkt. Die erste sorgt für das mit $1/r$ abfallende Coulomb-Potential, die zweite bildet zusammen mit der Ladung q_1 ein Dipolmoment $\mathbf{p} = q_1 \mathbf{r}_1$. Das ist allerdings nicht am Koordinatenursprung lokalisiert. Man kann am Nullpunkt zwei gleich starke entgegengesetzt gerichtete Dipole hinzufügen, wodurch man einen zentrierten Dipol und einen unzentrierten Quadrupol erhält.

Abbildung 2.13 Eine Ladungsverteilung mit elektrischem Dipolmoment



Das Spiel lässt sich fortsetzen: Die Felder der Multipole stellen die Korrektur für die exzentrische Position der Ladung q_1 gegenüber dem Schwerpunkt dar. Interessanter als die Einzelladung ist der Fall, dass viele Punktladungen mit der Gesamtladung $\sum q_i = 0$ vorliegen, dass aber der Ladungsschwerpunkt der positiven Ladungen $q_i^{(+)}$ nicht mit dem der negativen Ladungen $q_i^{(-)}$ zusammenfällt (Abb. 2.13). Die Ladungsschwerpunkte werden in Analogie zu den Massenschwerpunkten berechnet:

$$\mathbf{r}_s^{(+)} = \frac{\sum q_i^{(+)} \mathbf{r}_i}{\sum q_i^{(+)}}, \quad \mathbf{r}_s^{(-)} = \frac{\sum q_i^{(-)} \mathbf{r}_i}{\sum q_i^{(-)}}. \quad (2.32)$$

Wenn $\sum q_i^{(+)} = -\sum q_i^{(-)}$ ist, dann ist nach (2.30) das Dipolmoment der Ladungsverteilung

$$\mathbf{p} = \left(\sum q_i^{(+)} \right) \left(\mathbf{r}_s^{(+)} - \mathbf{r}_s^{(-)} \right) = \left(\sum q_i^{(+)} \right) \mathbf{d}, \quad (2.33)$$

in strikter Analogie zu (2.19). Wie bereits erwähnt, ist in diesem Fall das Dipolmoment unabhängig von der Wahl des Koordinatennullpunkts, es ist hier eine Eigenschaft der Ladungsverteilung, die nichts mit den Massen zu tun hat.

Molekulare Dipolmomente. Die Elektronen und Atomkerne in Molekülen bilden Ladungsverteilungen, die zwar nicht statisch sind, da sich besonders die Elektronen in ständiger Bewegung befinden, auf die man aber dennoch die hier entwickelten Konzepte anwenden kann, weil die Bewegung der Elektronen viel rascher erfolgt als die Bewegung des Moleküls. Man denkt sich die Ladung der Elektronen entsprechend ihrer Aufenthaltswahrscheinlichkeit räumlich verteilt. Viele Moleküle besitzen aufgrund ihrer chemischen Konstitution oder ihrer geometrischen Form ein elektrisches Dipolmoment, gemessen in Coulomb-Metern¹. Man nennt sie **polare Moleküle**. Die Ladungsschwerpunkte $\mathbf{r}_s^{(+)}$ und $\mathbf{r}_s^{(-)}$ fallen nicht zusammen, weil die Atome mit der größeren Kernladung die Elektronenhülle des Moleküls stärker anziehen als die Atome mit kleinerer Kernladungszahl. Einige

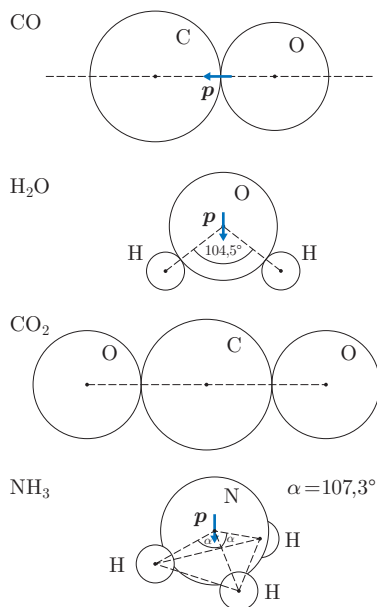
¹ In der älteren Literatur werden molekulare Dipolmomente meist in der Einheit „Debye“ (abgekürzt: D) angegeben. $1 \text{ D} = 3,336 \cdot 10^{-30} \text{ Cm}$.

Tabelle 2.2 Dipolmomente einiger Moleküle

Molekül	p (C m)
HCl	$3,43 \cdot 10^{-30}$
CO	$0,40 \cdot 10^{-30}$
H ₂ O	$6,2 \cdot 10^{-30}$
NH ₃	$5,0 \cdot 10^{-30}$
CO ₂	0
CH ₄	0

Beispiele sind in Tab. 2.2 aufgeführt. Die Größenordnung der Dipolmomente ist leicht zu verstehen: $d = 10^{-10}$ m ist ein typischer Atomdurchmesser, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C die Elementarladung. Damit ist $ed \approx 10^{-29}$ C m. In Abb. 2.14 ist die Lage des Vektors p für CO und H₂O gezeigt. Das CO₂-Molekül hat das Dipolmoment $p = 0$. Man kann daraus schließen, dass die drei Atome exakt auf einer geraden Linie angeordnet sind. Ebenso folgt aus $p = 0$ beim Methan, dass das CH₄-Molekül vollkommen symmetrisch aufgebaut sein muss. Umgekehrt lässt das gemessene Dipolmoment des H₂O-Moleküls auf eine gewinkelte Form schließen. Auch das NH₃-Molekül hat ein elektrisches Dipolmoment. Die Atome sitzen an den Eckpunkten einer flachen dreiseitigen Pyramide. Eine Methode zur experimentellen Bestimmung von molekularen Dipolmomenten werden wir in Abschn. 4.2 kennenlernen.

Das Dipolmoment ist nicht nur maßgeblich für das Verhalten des Moleküls im äußeren elektrischen Feld, es

**Abbildung 2.14** Geometrische Struktur einiger Moleküle (schematisch). Die Radien der Kreise entsprechen den sogenannten Normal-Valenzradien der Atome bei homöopolarer Bindung

bestimmt auch die Wechselwirkung der Moleküle untereinander. Da das Dipolfeld für Abstände groß gegen den Moleküldurchmesser proportional zu p/r^3 , der Feldgradient in radialer Richtung also proportional zu p/r^4 ist, wirkt zwischen zwei polaren Molekülen eine Kraft proportional zu p^2/r^4 . Das permanente Dipolmoment hat also einen großen Einfluss auf die van der Waals-Kräfte (Bd. I/6.1).

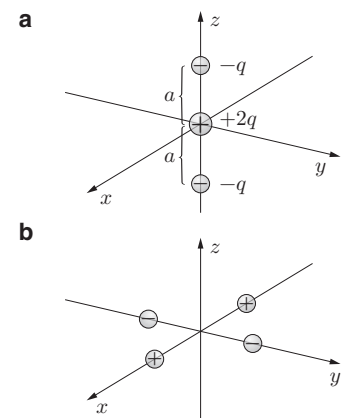
Elektrische Quadrupole

Wir betrachten die in Abb. 2.15 dargestellten Anordnungen von elektrischen Ladungen. Die Gesamtladungen $\sum q_i$ und die Dipolmomente $\sum q_i r_i$ sind Null. In beiden Fällen erkennt man zwei entgegengesetzt gerichtete Dipole gleicher Größe, $p_2 = -p_1$, die gegeneinander verschoben sind. Es handelt sich um Prototypen elektrischer **Quadrupole**. Das elektrische Feld in großem Abstand ist in beiden Fällen gegeben durch das Quadrupolmoment der Anordnung.

Die elektrische Ladung ist ein Skalar, das Dipolmoment ein Vektor. Das Quadrupolmoment hat eine kompliziertere mathematische Struktur, es ist ein symmetrischer Tensor, wie z. B. das Trägheitsmoment eines starren Körpers (Bd. I/10.6). Wie beim Trägheitsmoment kann man drei zueinander senkrechte Richtungen finden, die die Hauptachsen des Tensors darstellen. Bezüglich dieser Achsen ist das Quadrupolmoment durch drei Zahlen gegeben:

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= \sum q_i (3x_i^2 - r_i^2), \\ Q_{yy} &= \sum q_i (3y_i^2 - r_i^2), \\ Q_{zz} &= \sum q_i (3z_i^2 - r_i^2). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Um eine Verwechslung mit der Gesamtladung Q in (2.3) und (2.8) auszuschließen, bezeichnen wir die Quadrupolmomente mit dem kalligraphischen \mathcal{Q} . x_i , y_i und z_i sind

Abbildung 2.15 Elektrische Quadrupole. Die Ladungen $\pm q$ befinden sich im Abstand a vom Nullpunkt des Koordinatensystems

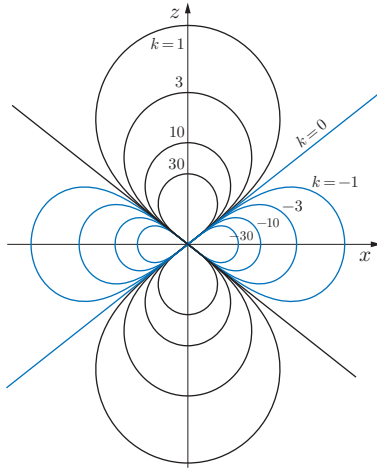


Abbildung 2.16 Schnitt durch die Äquipotentialflächen $\phi(r) = k$ eines rotationssymmetrischen Quadrupols (Abb. 2.15a)

die Koordinaten der Ladung q_i , und es ist $x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = r_i^2$. Für die in Abb. 2.15 gezeigten Anordnungen berechnet man bei Bild (a)

$$Q_{xx} = -q(0 - a^2) + 2q(0 - 0) - q(0 - a^2) = 2qa^2,$$

und entsprechend $Q_{yy} = 2qa^2$, $Q_{zz} = -4qa^2$. Bei Bild (b) erhält man $Q_{xx} = 6qa^2$, $Q_{yy} = -6qa^2$, $Q_{zz} = 0$.

Die Addition der drei Gleichungen (2.34) führt zu der Erkenntnis, dass allgemein zwischen Q_{xx} , Q_{yy} und Q_{zz} die Beziehung

$$Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = 0 \quad (2.35)$$

besteht. Ist die Ladungsverteilung rotationssymmetrisch um die z-Achse, muss $Q_{xx} = Q_{yy}$ sein, und es folgt aus (2.35)

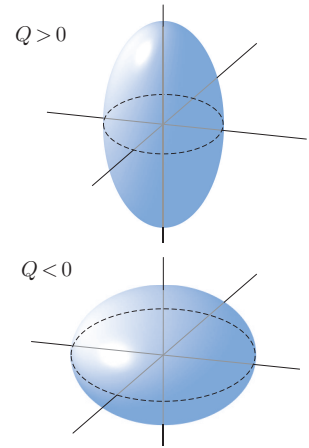
$$Q_{xx} = Q_{yy} = -\frac{1}{2} Q_{zz}. \quad (2.36)$$

Das ist bei der Anordnung in Abb. 2.15a der Fall. Das Quadrupolmoment ist dann bereits durch *eine* Zahl vollständig charakterisiert. Gewöhnlich nennt man dann Q_{zz} einfach *das* Quadrupolmoment Q . Wenn r groß gegen die Abstände zwischen den Ladungen ist, lautet die Gleichung für das elektrische Potential eines um die z-Achse rotationssymmetrischen Quadrupols

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\cos^2\vartheta - 1}{4r^3}. \quad (2.37)$$

Hierin ist ϑ der Winkel zwischen r und der Symmetrieachse. Man kann dieses Potential für die Anordnung in Abb. 2.15 relativ leicht berechnen, indem man das Dipolpotential (2.18) nach der z-Koordinate differenziert und mit a multipliziert. Ein Schnitt durch die Äquipotentialflächen ist in Abb. 2.16 gezeigt. Das Potential fällt in großer Entfernung mit $1/r^3$ ab, die Feldstärke mit $1/r^4$.

Abbildung 2.17 Quadrupolmomente von Atomkernen



Ladungsverteilungen, bei denen mehrere Multipolmomente eine Rolle spielen, findet man z. B. bei Atomkernen, die häufig näherungsweise die Form eines Rotationsellipsoids haben. Die Ladung des Atomkerns (das Monopolmoment) ist positiv und durch die Zahl der Protonen im Kern gegeben. Bei einer solchen, nur aus positiven Ladungen aufgebauten Ladungsverteilung ist das Quadrupolmoment positiv, wenn der Kern zigarrenförmig deformiert ist und negativ bei abgeplatteten Kernen (Abb. 2.17). Kernquadrupolmomente spielen bei einer Reihe von interessanten Effekten eine wichtige Rolle, nicht nur in der Kernphysik, auch in der Atomphysik und in der Festkörperphysik.

Das ebene Quadrupolfeld. Wir betrachten vier Linienladungen $\pm\lambda_q$, die auf parallelen Geraden im Abstand a von der z-Achse angebracht sind (Abb. 2.18). Das von ihnen erzeugte elektrische Feld hängt nur von x und y ab, es handelt sich um ein **ebenes Quadrupolfeld**. Diesmal interessieren wir uns nicht für das Feld bei $r \gg a$, sondern für den Feldverlauf in der Nähe der z-Achse. Wir benutzen (2.12) und das Superpositionsprinzip und berechnen die Feldstärke für $x \ll a$, $y \ll a$. Die Abstände des Punkts (x, y) von den Linienladungen sind $r \approx a \pm x$ und

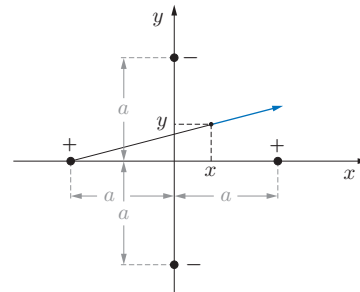


Abbildung 2.18 Erzeugung eines ebenen Quadrupolfeldes mit vier Linienladungen parallel zur z-Achse. Nicht maßstäblich: $a \gg x, y$

Lehrbuch zur Experimentalphysik Band 3: Elektrizität
und Magnetismus

Heintze, J. - Bock, P. (Hrsg.)

2016, XV, 373 S. 476 Abb., 371 Abb. in Farbe. Book +
eBook., Softcover

ISBN: 978-3-662-48450-0