2 Grundkonzepte

Zusammenfassung

In diesem Kapitel stellen wir die Grundprinzipien vor, die zur Konstruktion von Entscheidungsverfahren benutzt werden sollen, geben konkrete Beispiele für darauf basierende Verfahren an und notieren erste Eigenschaften dieser Verfahren.

2.1 Entscheidungsprozesse

Wir wollen uns mit dem Problem des *gemeinschaftlichen Entscheidens* (im englischen Sprachraum als *social choice* bezeichnet) befassen. Den Begriff der *Wahl* vermeiden wir an dieser Stelle bewusst, denn unsere Konzepte werden nicht nur auf klassische (politische) Wahlen anwendbar sein, sondern auch auf viele andersartige Fragen.

Die Grundsituation eines gemeinschaftlichen Entscheidungsprozesses besteht, in abstrakter Weise dargestellt, aus drei Komponenten:

1. einer gewissen Anzahl von *Alternativen*, zwischen denen entschieden werden soll,
2. einer gewissen Anzahl von *Kriterien*, nach denen die einzelnen Alternativen bewertet werden, sowie
3. einem *Entscheidungsverfahren*, das unter den gegebenen Alternativen unter Berücksichtigung der Kriterien einen oder mehrere Sieger findet.

Dieses abstrakte Konzept lässt zahlreiche verschiedene Konkretisierungen zu, von denen hier einige wichtige Beispiele erwähnt werden sollen.

Beispiel 2.1 Im Fall einer politischen Wahl sind die Alternativen einfach die zur Wahl stehenden Kandidaten, und als Kriterien ziehen wir die Prioritäten der Wählerinnen und Wähler heran. Einige hierfür verwendbare Entscheidungsverfahren haben wir in Kap. 1 schon erwähnt, z. B. das Verfahren der einfachen Mehrheit, die Mehrheitswahl mit anschließender Stichwahl oder die Methode der Binärvergleiche.

K. Diethelm, *Gemeinschaftliches Entscheiden*, Mathematik im Fokus,
DOI 10.1007/978-3-662-48780-8_2

Beispiel 2.2 Auch die Situation, dass jemand ein Auto kaufen möchte, kann in diesen Rahmen eingeordnet werden. Die verschiedenen auf dem Markt befindlichen Fahrzeugmodelle sind hier die Alternativen, und als Kriterien verwendet man die Bewertungen, inwieweit die Autos die für den Käufer wichtigen Anforderungen erfüllen.

Beispiel 2.3 Schließlich lassen sich auch viele sportliche Wettbewerbe unter unserem Begriff subsumieren. Bei der Ermittlung eines Weltcupsiegers im Skisport etwa würden die Teilnehmer der Rennen die Alternativen sein und ihre Platzierungen in den einzelnen Rennen die Kriterien. Typische Entscheidungsverfahren für solche Wettbewerbe verteilen für jedes Rennen Punkte in Abhängigkeit von der jeweiligen Platzierung und addieren die Punkte über die gesamte Saison. Je nachdem, wie viele Punkte für jeden Platz vergeben werden, erhält man unterschiedliche Entscheidungsverfahren.

In diesen und vergleichbaren Fällen sind neben den genannten auch zahlreiche andere Entscheidungsverfahren denkbar und in der Praxis auch im Einsatz. Unsere aufzustellende allgemeine Theorie soll möglichst viele dieser speziellen Verfahren erfassen. Auf eine Eigenschaft unseres abstrakten Konzepts sei hierbei noch ausdrücklich hingewiesen: Aus dem dritten Punkt der obigen Beschreibung des Konzepts geht hervor, dass wir neben den Verfahren, die eine eindeutige Entscheidung treffen, auch solche zulassen wollen, bei denen mehrere Sieger möglich sind. Gerade bei Anwendungen im Sport kann dies sinnvoll sein.

Für die Untersuchung wollen wir zunächst unser bisher nur in Worte gefasstes Konzept in mathematischer Form ausdrücken. Dazu benötigen wir einige Vorarbeiten.

Definition 2.1 Eine strikte Anordnung der Elemente einer endlichen Menge A heißt *Prioritätenliste* von A. Die Menge aller Prioritätenlisten von A bezeichnen wir mit $\mathcal{O}(A)$.

Unter einer *strikten Anordnung* der Elemente einer n-elementigen Menge verstehen wir dabei ein n-Tupel von paarweise verschiedenen Elementen der Menge. Die Interpretation ist dabei, dass das erste Element des n-Tupels eine höhere Priorität hat als das zweite, das zweite eine höhere als das dritte usw. (dies ist die Anordnungseigenschaft); außerdem soll nicht erlaubt sein, zwei Elementen die gleiche Priorität zuzuordnen (das ist mit dem Begriff *strikt* gemeint).

Damit können wir den entscheidenden Begriff dieser Theorie mathematisch definieren.

Definition 2.2 Ein *Entscheidungsprozess* ist ein Tripel (A, K, C), bestehend aus

1. einer endlichen und nichtleeren Menge A, deren Elemente *Alternativen* genannt werden,
2. einer endlichen und nichtleeren Menge K, deren Elemente als *Kriterien* bezeichnet werden, und
3. einer Abbildung $C : P_K^A \to \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$, dem sog. *Entscheidungsverfahren*.

Hier ist $\mathcal{P}(A)$ die *Potenzmenge* von A, also die Menge aller Teilmengen von A, und mit P_K^A bezeichnen wir die Menge aller (K, A)-Profile, wobei wir unter einem (K, A)-*Profil* eine Abbildung von K nach $\mathcal{O}(A)$ verstehen.

Ein (K, A)-Profil ordnet demnach jedem Kriterium (also jedem Wähler o. ä.) eine eindeutig definierte Prioritätenliste zu, wie wir es bereits in den Beispielen in Kap. 1 gesehen hatten. Das Entscheidungsverfahren nimmt als Eingabedaten dann ein solches (K, A)-Profil (d. h. die Information, welche Prioritätenliste zu jedem einzelnen Kriterium gehört) und gibt eine nichtleere Teilmenge der Alternativenmenge A aus. Die Elemente dieser Teilmenge sind dann die Sieger der Wahl, des sportlichen Wettbewerbs, … Im Regelfall wird man an Verfahren interessiert sein, bei denen in möglichst vielen Situationen eine Menge ausgegeben wird, die genau ein Element enthält, aber wir wollen – wie oben erwähnt – auch solche Verfahren betrachten, die das nicht gewährleisten.

Für unsere Zwecke ist es völlig unerheblich, wie wir die Kriterien bezeichnen. Wir werden daher fast immer die einfachste denkbare Form wählen und die Kriterien schlicht durchnummerieren, d. h. es gilt grundsätzlich

$$K = \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

mit einem $n \in \mathbb{N}$.

Hat die Alternativenmenge die Elemente Anton, Berti, Conni, Det, Edi und Fritzchen, wäre also

$$(\text{Anton}, \text{Conni}, \text{Det}, \text{Berti}, \text{Fritzchen}, \text{Edi})$$

eine denkbare Prioritätenliste. Diese Art der mathematischen Formulierung ist sehr praktisch, wenn man Prioritätenlisten konkret angeben möchte. Allerdings erweist sie sich manchmal als etwas unhandlich, wenn mathematische Untersuchungen vorgenommen werden sollen. Für solche Zwecke kann es nützlicher sein, eine anders geartete (aber äquivalente) Darstellung zu benutzen. Hierzu betrachten wir jedes Paar von Alternativen und jedes Kriterium und sagen dann, dass die eine Alternative bezüglich dieses Kriteriums besser abschneidet als die andere. In symbolischer Schreibweise stellen wir dies durch das Zeichen $\succ_j$ dar, wobei der Index j auf die Nummer des Kriteriums verweist. Wenn die oben genannte Prioritätenliste beispielsweise zum Kriterium Nr. 4 gehört, können wir dies in der formal etwas umständlich erscheinenden, aber leicht analysierbaren Form

$$\begin{array}{rlrlrl}
\text{Anton} & \succ_4 \text{Conni}, & \text{Anton} & \succ_4 \text{Det}, & \text{Anton} & \succ_4 \text{Berti}, \\
\text{Anton} & \succ_4 \text{Fritzchen}, & \text{Anton} & \succ_4 \text{Edi}, & \text{Conni} & \succ_4 \text{Det}, \\
\text{Conni} & \succ_4 \text{Berti}, & \text{Conni} & \succ_4 \text{Fritzchen}, & \text{Conni} & \succ_4 \text{Edi}, \\
\text{Det} & \succ_4 \text{Berti}, & \text{Det} & \succ_4 \text{Fritzchen}, & \text{Det} & \succ_4 \text{Edi}, \\
\text{Berti} & \succ_4 \text{Fritzchen}, & \text{Berti} & \succ_4 \text{Edi}, & \text{Fritzchen} & \succ_4 \text{Edi}
\end{array}$$

darstellen.

Wenn die Menge der Alternativen und die Menge der Kriterien aus dem Kontext klar sind, werden wir im Folgenden statt (K, A)-Profil kurz *Profil* schreiben.

Für die Eigenschaften der auf diese Weise abstrakt beschriebenen Entscheidungsverfahren ist es nicht nur irrelevant, wie die Menge K im Einzelnen aussieht; auch die genaue Form der Elemente von A ist unbedeutend. Wichtig ist tatsächlich nur, wie viele Elemente die Mengen K und A haben. Diese Beobachtung motiviert uns zu einer Definition, bei der wir mit $|M|$ die *Mächtigkeit* der Menge M, also die Anzahl ihrer Elemente, bezeichnen.

Definition 2.3 Seien $n, q \in \mathbb{N}$. Eine Abbildung $C : P_K^A \to \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ mit $|K| = n$ und $|A| = q$ heißt *(n, q)-Entscheidungsverfahren*.

Offensichtlich sind (n, q)-Entscheidungsverfahren mit $n = 1$ (nur ein Wähler) oder $q = 1$ (nur eine Alternative) uninteressant. Den einfachsten nichttrivialen Fall erhalten wir für $n = q = 2$:

Beispiel 2.4 Für $q = 2$ setzen wir $A = \{a_1, a_2\}$. Dann gibt es genau zwei Prioritätenlisten (a_1, a_2) bzw. (a_2, a_1) und somit ist $\mathcal{O}(A) = \{(a_1, a_2), (a_2, a_1)\}$. Wegen $n = 2$ ergeben sich damit vier mögliche Prioritätenprofile:

Profil 1	
Kriterium	Prioritätenliste
1	(a_1, a_2)
2	(a_1, a_2)

Profil 2	
Kriterium	Prioritätenliste
1	(a_1, a_2)
2	(a_2, a_1)

Profil 3	
Kriterium	Prioritätenliste
1	(a_2, a_1)
2	(a_1, a_2)

Profil 4	
Kriterium	Prioritätenliste
1	(a_2, a_1)
2	(a_2, a_1)

Die Menge P_K^A, d. h. der Definitionsbereich des Entscheidungsverfahrens C, hat also vier Elemente. Der Wertebereich von C ist die dreielementige Menge $\{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_1, a_2\}\}$. Aus allgemeinen mengentheoretischen Überlegungen folgt damit, dass es $3^4 = 81$ unterschiedliche (2,2)-Entscheidungsverfahren gibt. Hierzu gehören auch Verfahren von zweifelhafter Sinnhaftigkeit wie etwa das durch $C(P) = \{a_1\}$ für alle $P \in P_K^A$ definierte, das unabhängig von den tatsächlich vorliegenden Prioritäten immer die Alternative a_1 zum einzigen Sieger erklärt.

Bemerkung 2.1 Die Anzahl der möglichen Entscheidungsverfahren erscheint in Beispiel 2.4 noch überschaubar. Sie wächst aber für größer werdende n und q sehr schnell an. Allgemein haben wir bei q Alternativen offenbar $q!$ verschiedene Prioritätenlisten. Somit ergeben sich bei n Kriterien $(q!)^n$ verschiedene Profile. Der Wertebereich des Entscheidungsverfahrens hat immer $2^q - 1$ Elemente. Damit existieren für beliebige n und q genau

$(2^q - 1)^{(q!)^n}$ verschiedene (n, q)-Entscheidungsverfahren. Selbst für den noch relativ „kleinen“ Fall von 4 Kriterien und 3 Alternativen führt dies schon auf $(3!)^4 = 1296$ Profile und $7^{1296} \approx 10^{1095}$ verschiedene Verfahren.

2.2 Mengentheoretische Konzepte

Für unsere Untersuchungen benötigen wir einige elementare Begriffe der Mengenlehre:

Definition 2.4 Gegeben sei eine Menge X. Eine Teilmenge R von $X \times X$, also eine Menge von Paaren von Elementen der Menge X, heißt *Relation* über X.

Wenn unsere Menge $X = \{x_1, x_2\}$ ist, wären denkbare Relationen also z. B.

$$R_1 = \emptyset, \quad R_2 = \{(x_1, x_1)\}, \quad R_3 = \{(x_1, x_2)\}, \quad R_4 = \{(x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_1)\}, \quad \dots$$

Für uns werden Relationen R über der Alternativenmenge A wichtig sein. Hierbei interpretieren wir die Aussage $(a_1, a_2) \in R$ als „Alternative a_1 ist besser als a_2“ bzw. „a_1 wird a_2 vorgezogen“. Damit können wir die oben erwähnte Beziehung $\succ_j$ als Relation interpretieren, die aus einer Prioritätenliste entstanden ist. Eine Prioritätenliste (a_1, a_2, a_3, a_4) etwa entspricht der Relation

$$\succ \; = \{(a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_1, a_4), (a_2, a_3), (a_2, a_4), (a_3, a_4)\}.$$

Bestimmte Eigenschaften von Relationen sind für uns besonders relevant.

Definition 2.5 Sei R eine Relation über einer Menge X.

(a) R heißt *asymmetrisch*, wenn für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt: $(x_1, x_2) \in R \Rightarrow (x_2, x_1) \notin R$.
(b) R heißt *vollständig*, wenn für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ gilt: $(x_1, x_2) \notin R \Rightarrow (x_2, x_1) \in R$.
(c) R heißt *transitiv*, wenn für alle $x_1, x_2, x_3 \in X$ gilt: $(x_1, x_2), (x_2, x_3) \in R \Rightarrow (x_1, x_3) \in R$.
(d) R heißt *strikte Ordnung*, wenn R asymmetrisch, vollständig und transitiv ist.

Auf unsere Situation, d. h. auf Relationen, die aus Prioritätenlisten hervorgehen, bezogen kann man diese Eigenschaften folgendermaßen interpretieren:

(a) Die Asymmetrie verbietet, dass bezüglich eines Kriteriums Alternative a_1 besser als a_2 und gleichzeitig a_2 besser als a_1 abschneidet.
(b) Die Vollständigkeit zwingt jedes Kriterium dazu, für je zwei verschiedene Alternativen a_1 und a_2 immer eine Reihenfolge festzulegen. Es darf also nicht gesagt werden, dass bezüglich eines Kriteriums beide Alternativen gleich gut bewertet werden oder dass für dieses Kriterium die Reihenfolge der beiden Alternativen gleichgültig ist.
(c) Die Transitivität sichert die Konsistenz der Reihenfolge, d. h. wenn a_1 besser ist als a_2 und a_2 besser als a_3, dann muss auch a_1 besser als a_3 sein.

Da eine Relation, die sich als „besser als"-Relation $\succ_j$ aus der Prioritätenliste des Kriteriums j ergibt, notwendigerweise alle diese Eigenschaften aufweist, handelt es sich bei $\succ_j$ um eine strikte Ordnung im Sinne dieser Definition.

Das klassische Beispiel einer strikten Ordnung ist, wie das Symbol $\succ$ bereits suggeriert, die übliche „größer als"-Relation $>$ über einer Teilmenge X der reellen Zahlen. Wenn die Zahlenmenge X endlich ist, dann wissen wir, dass sie ein eindeutiges größtes, also bezüglich der Relation $>$ extremes, Element hat. Auch in unserer Anwendung treten endliche (Alternativen-)Mengen auf, und die „besser als"-Relation $\succ$ liefert ebenfalls ein eindeutiges extremes, also bestes, Element.

Für den Beweis dieser Aussage und in vielen anderen Situationen (aber nicht immer) ist es praktischer, statt $(a_1, a_2) \in \succ$, wie oben schon angedeutet, kurz und prägnant $a_1 \succ a_2$ zu schreiben. Wir halten daher fest, dass beide Formulierungen das gleiche bedeuten, und verwenden bei Bedarf immer die in der vorliegenden Situation günstigere. Dabei wollen wir wegen der suggestiven Nähe der Symbole $\succ$ und $>$ die Schreibweise $a_1 \succ a_2$ in der Regel bevorzugen, wenn die Relation $\succ$ ebenso wie die klassische „größer als"-Relation $>$ eine strikte Ordnung ist.

Lemma 2.1 *Ist $\succ$ eine strikte Ordnung über der endlichen Menge X, dann existiert genau ein $x^* \in X$ mit der Eigenschaft $x^* \succ x$ für alle $x \in X$ mit $x \neq x^*$.*

Das in Lemma 2.1 beschriebene Element x^* ist also besser als jedes andere Element der Menge X und kann daher als das erwähnte erste oder beste Element der Relation $\succ$ gedeutet werden. Wenn man dieses gefunden hat, kann man x^* aus der Grundmenge X streichen und eine neue Relation auf der kleineren Grundmenge $X \setminus \{x^*\}$ bestimmen, indem man alle Beziehungen, in denen x^* vorkommt, aus $\succ$ entfernt. Auch diese neue Relation, die man der Einfachheit halber wieder mit $\succ$ bezeichnet, ist eine strikte Ordnung und hat nach Lemma 2.1 ein erstes Element, das sich dann als zweites Element der ursprünglichen Relation interpretieren lässt. Sukzessives Wiederholen dieses Schrittes führt dann zu der aus dem Konzept der Prioritätenliste bekannten strikten Anordnung der Elemente in der Reihenfolge erstes, zweites, drittes und so weiter. Nachdem wir oben bereits beschrieben hatten, wie aus einer Prioritätenliste eine strikte Ordnung entsteht, liefert uns dieses Ergebnis nun also die Möglichkeit, aus der strikten Ordnung die zugehörige Prioritätenliste zu rekonstruieren.

Für den Beweis von Lemma 2.1 benötigen wir ein Hilfsergebnis.

Lemma 2.2 *Ist $\succ$ eine asymmetrische und transitive Relation über der endlichen Menge X, so existiert mindestens ein $x^* \in X$ mit der Eigenschaft $x \not\succ x^*$ für alle $x \in X$.*

Beweis Wir müssen ein x^* finden, zu dem es in der Relation $\succ$ kein besseres Element gibt. Hierzu wählen wir zunächst ein beliebiges $x_0 \in X$. Wenn es hierzu kein besseres $x \in X$ gibt, ist der Beweis erbracht. Anderenfalls existiert ein $x_1 \in X$ mit $x_1 \succ x_0$. Wir prüfen erneut, ob es ein besseres Element gibt. Wenn nicht, dann ist x_1 das gesuchte Element und der Beweis ist wiederum erbracht. Anderenfalls bezeichnen wir das gefundene Element mit x_2 und wiederholen diesen Schritt iterativ. Wenn dieser Prozess irgendwann abbricht, weil kein besseres Element als das zuletzt gefundene existiert, haben wir das gesuchte Element ermittelt und den Beweis erbracht. Anderenfalls entsteht durch diesen Prozess eine unendliche Folge $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$. Nach Konstruktion gilt für alle j die Aussage $x_j \succ x_{j-1}$. Weil X nach Voraussetzung eine endliche Menge ist, muss nach dem Schubfachprinzip mindestens ein Element von X mehrfach in der Folge auftreten, d. h. es muss Indizes k, l geben mit $k < l$ und $x_k = x_l$. Für diese Folgenglieder gilt nach unserer obigen Überlegung

$$x_l \succ x_{l-1}, \quad x_{l-1} \succ x_{l-2}, \ldots, \quad x_{k+1} \succ x_k$$

und somit wegen der Transitivität $x_l \succ x_k$, woraus wegen $x_k = x_l$ die Aussage $x_k \succ x_k$ folgt, die im Widerspruch zur Asymmetrie steht. Damit ist gezeigt, dass die unendliche Folge nicht entstehen kann; der Prozess muss also nach endlich vielen Schritten enden und das gesuchte Element liefern. □

Beweis von Lemma 2.1 Nach Lemma 2.2 existiert ein $x^* \in X$ mit $x \not\succ x^*$ für alle $x \in X$. Aus der Vollständigkeit von $\succ$ folgt für dieses x^* sofort die Eigenschaft $x^* \succ x$ für alle $x \neq x^*$. Daher existiert das gesuchte Element. Für den Beweis der Eindeutigkeit nehmen wir an, dass ein zweites Element $\tilde{x} \neq x^*$ mit dieser Eigenschaft existiert. Dann folgt aus den Eigenschaften der beiden Elemente $x^* \succ \tilde{x}$ und gleichzeitig $\tilde{x} \succ x^*$, was der Asymmetrie widerspricht. Also kann ein zweites Element mit der gesuchten Eigenschaft nicht existieren, und die Eindeutigkeit ist bewiesen. □

2.3 Das Verfahren der einfachen Mehrheit und verwandte Methoden

In diesem und den folgenden Abschnitten wollen wir erste Entscheidungsverfahren konstruieren und formal beschreiben. Zu diesem Zweck und für die spätere systematische Untersuchung der Verfahren ist die folgende Definition hilfreich:

Definition 2.6 Sei P ein (K, A)-Profil, $a \in A$ eine Alternative und $k \in \mathbb{N}$. Mit $\phi_k(P, a)$ bezeichnen wir die Anzahl der k-ten Plätze, die die Alternative a in den einzelnen Prioritätenlisten des Profils P einnimmt.

Beispiel 2.5 Für das durch

Kriterien	Prioritätenliste
1	(Alice, Bob, Carol)
2, 3	(Bob, Alice, Carol)

gegebene Profil P gilt

$$\begin{aligned}\phi_1(P,\text{Carol}) = \phi_2(P,\text{Carol}) = \phi_3(P,\text{Alice}) = \phi_3(P,\text{Bob}) &= 0,\\ \phi_1(P,\text{Alice}) = \phi_2(P,\text{Bob}) &= 1,\\ \phi_1(P,\text{Bob}) = \phi_2(P,\text{Alice}) &= 2,\\ \phi_3(P,\text{Carol}) &= 3.\end{aligned}$$

Zur späteren Verwendung notieren wir an dieser Stelle eine Eigenschaft der Funktionen ϕ_j:

Lemma 2.3 *Für alle $a \in A$ und alle Profile P mit n Kriterien gilt*

$$\sum_{j=1}^{|A|} \phi_j(P,a) = n.$$

Beweis Die Summe auf der linken Seite der Gleichung gibt an, wie oft die Alternative a insgesamt auf irgendeinen Platz eingeordnet wird. Jedes der n Kriterien setzt a auf genau einen Platz, also ergeben sich insgesamt genau n Platzierungen. □

Mit Hilfe der Funktionen ϕ_j können wir nun als erstes konkretes Verfahren das Verfahren der einfachen Mehrheit formal definieren.

Definition 2.7 Das Entscheidungsverfahren der *einfachen Mehrheit* ist definiert durch $C^{\text{eM}}(P) := \{a \in A : \phi_1(P,a) = \max_{x\in A} \phi_1(P,x)\}$.

Man nimmt also alle Alternativen, prüft für jede davon nach, auf wie vielen Prioritätenlisten sie auf dem ersten Platz steht, und erklärt dann alle diejenigen zu Siegern, die die größte Zahl an ersten Plätzen aufweisen.

Beispiel 2.6 Das Profil P sei gegeben durch

Kriterien	Prioritätenliste
1, 2	(Alice, Bob, Carol)
3, 4	(Bob, Carol, Alice)
5	(Carol, Bob, Alice)

In diesem Fall ist $\phi_1(P,\text{Alice}) = \phi_1(P,\text{Bob}) = 2$ und $\phi_1(P,\text{Carol}) = 1$, also liefert das Verfahren $C^{\text{eM}}(P) = \{\text{Alice},\text{Bob}\}$.

Beispiel 2.7 Das Profil P sei gegeben durch

Kriterien	Prioritätenliste
1, 2	$(a_1, a_2, b_1, b_2, \ldots, b_{m-1}, b_m)$
3	$(b_1, a_2, b_2, b_3, \ldots, b_m, a_1)$
4	$(b_2, a_2, b_3, b_4, \ldots, b_m, b_1, a_1)$
$\vdots$	$\vdots$
$m+2$	$(b_m, a_2, b_1, b_2, \ldots, b_{m-1}, a_1)$

In diesem Beispiel ist dann $\phi_1(a_1) = 2$, $\phi_1(a_2) = 0$ und $\phi_1(b_j) = 1$ für $j = 1, 2, \ldots, m$. Damit ergibt sich $C^{\text{eM}}(P) = \{a_1\}$. Dieses Beispiel verdeutlicht insbesondere für große m einen Nachteil des Verfahrens: Die Alternative a_1 wird zum eindeutigen Sieger erklärt, obwohl sie bei fast allen Kriterien am schlechtesten abschneidet.

In Abschn. 1.2 hatten wir schon gesehen, dass es sinnvoll sein kann, das Verfahren der einfachen Mehrheit durch eine Stichwahl zu ergänzen. Diese Idee kann man in einen allgemeineren Kontext einordnen, für dessen Herleitung wir zunächst einige Begriffe zur Verfügung stellen wollen.

Definition 2.8 Sei P ein (K, A)-Profil und W eine nichtleere Teilmenge der Alternativenmenge A. Dann bezeichnen wir mit $P_{|W}$ die *Restriktion* des Profils P auf die Alternativenmenge W, d. h. dasjenige (K, W)-Profil, das sich dadurch ergibt, dass aus den Prioritätenlisten des gegebenen Profils P alle Alternativen gestrichen werden, die nicht zu W gehören.

Beispiel 2.8 Für $A = \{\text{Alice}, \text{Bob}, \text{Carol}, \text{Dave}\}$ und $K = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ sei durch

Kriterien	Prioritätenliste
1, 2, 3, 4	(Alice, Bob, Carol, Dave)
5, 6	(Bob, Carol, Dave, Alice)
7, 8	(Carol, Dave, Bob, Alice)
9	(Dave, Carol, Bob, Alice)

das Profil P gegeben. Schränken wir uns dann auf $W = \{\text{Bob}, \text{Dave}\} \subset A$ ein, so können wir $P_{|W}$ durch

Kriterien	Prioritätenliste
1, 2, 3, 4, 5, 6	(Bob, Dave)
7, 8, 9	(Dave, Bob)

beschreiben.

Definition 2.9 Gegeben sei ein Entscheidungsverfahren C^{el}, das wir als *Elementarverfahren* bezeichnen. Das zu diesem Elementarverfahren gehörige *Eliminationsverfahren* ist gegeben durch

$$C^{\text{el}}_{\text{Elim}}(P) := \lim_{i\to\infty} W_i$$

mit $W_0 := A$ und $W_{i+1} := C^{\text{el}}(P_{|W_i})$.

Hierbei interpretieren wir den Limes einer Folge von Mengen derart, dass wir $\lim_{i\to\infty} W_i$ mit derjenigen Menge W_{i_0} identifizieren, für die $W_{i_0} = W_{i_0+1} = W_{i_0+2} = \ldots$ gilt.

Die Vorgehensweise eines Eliminationsverfahrens besteht also darin, zunächst das zugehörige Elementarverfahren auf das gegebene Profil anzuwenden und die entsprechende Siegermenge zu ermitteln und dann ein neues Profil dadurch zu konstruieren, dass das vorherige Profil auf diese Siegermenge eingeschränkt wird. Auf dieses neue Profil wendet man die gleichen Arbeitsschritte erneut an und wiederholt diesen Prozess so lange, bis sich keine Änderung der Siegermenge mehr ergibt. Diese zuletzt gefundene Siegermenge ist dann die endgültige Siegermenge des Eliminationsverfahrens.

Beispiel 2.9 Wir wollen ein Elementarverfahren mathematisch formal beschreiben, das folgende Eigenschaften hat:

1. Für jede Alternative wird die Anzahl der Kriterien ermittelt, bezüglich derer sie als beste bewertet wird.
2. Eine Alternative, die von mehr als der Hälfte der Kriterien als beste bewertet wird, ist alleinige Siegerin.
3. Wenn keine solche Alternative existiert, gewinnen die beiden Bestplatzierten. Falls es mehr als zwei Alternativen gibt, die nach dieser Beschreibung in Frage kommen (weil es entweder mehr als zwei Erstplatzierte oder genau einen Erst- und mehr als einen Zweitplatzierten gibt), siegen alle diese Alternativen.

Da es sich um ein Elementarverfahren handelt, das als Basis für ein Eliminationsverfahren dienen soll, ist der Begriff des Siegs hier nicht als endgültiger Sieg zu verstehen, sondern als Qualifikation für die nächste Runde. Formal kann das zugehörige Elementarverfahren wie folgt beschrieben werden:

$$C^{\text{el}}(P) = \begin{cases} \{x\} & \text{falls } \phi_1(P,x) > |K|/2, \\ H & \text{sonst,} \end{cases}$$

mit

$$H' := \left\{x \in A : \phi_1(P,x) = \max_{y\in A} \phi_1(P,y)\right\} = C^{\text{eM}}(P)$$

und

$$H := \begin{cases} H' & \text{falls } |H'| \geq 2, \\ \left\{x \in A : \phi_1(P,x) \geq \max\limits_{y\in A\setminus H'} \phi_1(P,y)\right\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

http://www.springer.com/978-3-662-48779-2

Gemeinschaftliches Entscheiden
Untersuchung von Entscheidungsverfahren mit mathematischen Hilfsmitteln
Diethelm, K.
2016, IX, 138 S. 6 Abb. in Farbe., Softcover
ISBN: 978-3-662-48779-2