2 Mengenlehre
oder
„Von Mengen und Unmengen“

2.1 Mengen und ihre Elemente

Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung von wohlunterschiedenen Objekten zu einem neuen Objekt. *So ähnlich hat Cantor seinerzeit den von ihm eingeführten Mengenbegriff umschrieben. Heute, fast 150 Jahre später, verzichtet man auf eine Definition der Menge und stellt stattdessen eine Liste der Eigenschaften von Mengen und ihren Elementen zusammen.*

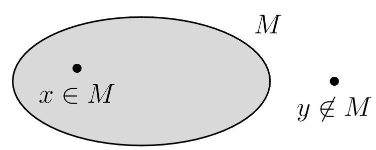
Was heißt „wohlunterschieden“? Ein Eimer voll Wasser ist eine Menge von Wassertropfen, aber das ist keine Menge im mathematischen Sinn. Hingegen sind die Einwohner von Berlin Objekte, die man gut voneinander unterscheiden kann. Also kann man aus ihnen eine Menge im mathematischen Sinn bilden. Das neue Objekt, das dann entsteht, ist die Einwohnerschaft von Berlin. Ein anderes Beispiel wäre die Menge aller Profifußballer mit deutschem Pass. Es ist dann zum Beispiel möglich, die Schnittmenge dieser beiden Mengen zu bilden. Es entsteht die Menge aller Profifußballer mit deutschem Pass, die in Berlin wohnen.

Man sieht, dass die Mengenlehre durchaus ein Teil unseres Alltags sein kann. Allerdings ist das hier nicht das Ziel, es geht fast ausschließlich um die Mengenlehre als Teil der Sprache der Mathematik. Sie erst ermöglicht die exakte Sprechweise der modernen Mathematik.

Man bezeichnet Mengen gerne mit Großbuchstaben und ihre Elemente mit Kleinbuchstaben. Ist x ein Element der Menge M, so schreibt man „$x \in M$“. In Wirklichkeit ist eine Unterscheidung zwischen Mengen und Elementen gar nicht unbedingt erforderlich. Man braucht nur zu wissen, dass es eine „Elementbeziehung“ zwischen gewissen mathematischen Objekten gibt, die bestimmte Regeln erfüllt. Diese Regeln sollen nun vorgestellt werden.

(Regel 1): Mit der Aussage „$x \in M$“ (die wahr oder falsch sein kann) ist auch deren Verneinung eine gültige Aussage, die man in der Form „$x \notin M$“ (x ist **nicht** Element von M) schreibt.

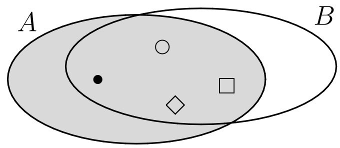
Abb. 2.1



© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2016
K. Fritzsche, *Tutorium Mathematik für Einsteiger*,
DOI 10.1007/978-3-662-48910-9_2

(Regel 2): Zwei Mengen A und B heißen ***gleich*** (in Zeichen: $A = B$), falls für alle x gilt: $x \in A \iff x \in B$. Die Verneinung der Aussage $A = B$ schreibt man in der Form $A \neq B$.

Abb. 2.2



$A = B$

Die Beziehung „Gleichheit" zwischen Mengen erfüllt drei besondere Eigenschaften:

- **Reflexivität:** Für jede Menge A ist $A = A$.
- **Symmetrie:** Ist $A = B$, so ist auch $B = A$.
- **Transitivität:** Ist $A = B$ und $B = C$, so ist auch $A = C$.

Die Menge A heißt ***Teilmenge*** der Menge B (in Zeichen: $A \subset B$), falls für alle x gilt: $x \in A \implies x \in B$. Manche Autoren schreiben dafür auch „$A \subseteq B$" (oder $A \subseteqq B$) und benutzen das Symbol $A \subset B$ nur, wenn A eine „echte Teilmenge" von B ist, wenn also $A \subseteq B$ und $A \neq B$ ist. Ich werde allerdings $A \subset B$ auch im Falle $A = B$ gebrauchen. Wenn ich betonen möchte, dass es um eine echte Teilmenge geht, dann schreibe ich $A \subsetneqq B$.

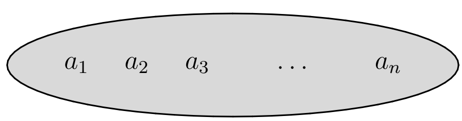
Es gilt: $A = B \iff A \subset B$ und $B \subset A$.

$\boxed{\textbf{Aufgabe 2.1}}$

Zeigen Sie, dass die Teilmengenbeziehung reflexiv und transitiv ist, und belegen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass sie nicht symmetrisch ist.

(Regel 3): Ist a irgend ein Objekt, so ist $\{a\}$ die Menge, deren einziges Element das Objekt a ist. Und analog ist $\{a_1, \ldots, a_n\}$ die Menge, die genau aus den Elementen a_1, a_2, …,a_n besteht.

Abb. 2.3



Ist A eine Menge und $\mathscr{E}(x)$ eine Aussageform, so ist $\{x \in A : \mathscr{E}(x)\}$ die Menge aller Elemente $x \in A$, für die $\mathscr{E}(x)$ wahr ist.

Beispiele 2.1.1 (Mengenbeschreibungen)

$\boxed{1}$ $\{\mathrm{E}, \mathrm{K}, \mathrm{L}, \mathrm{S}\}$ ist die Menge der Buchstaben des Wortes „Kessel" (unter Vernachlässigung der Groß- und Kleinschreibung). Da die Elemente einer Menge wohlunterschieden sein sollen, braucht jeder Buchstabe nur einmal geschrieben zu werden, und die Reihenfolge der Elemente ist auch egal.

2 $\{3, 13, 23, 43, 53, 73, 83\}$ ist die Menge aller Primzahlen < 100, deren letzte Ziffer eine 3 ist.

3 {Hamburg, Berlin, Köln, München} ist die Menge aller deutschen Millionenstädte.

4 $\{x : x^2 + 3x - 10 = 0\} = \{2, -5\}$.

Die Gleichheit der Mengen wird durch „Äquivalenzumformungen“ gezeigt:

$$\begin{aligned} x^2 + 3x - 10 = 0 \quad &\iff \quad \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = 10 + \frac{9}{4} \\ &\iff \quad x + \frac{3}{2} = \pm\frac{7}{2} \quad \iff \quad x = 2 \text{ oder } x = -5. \end{aligned}$$

♠

(Regel 4): Es gibt (genau) eine Menge, die kein Element enthält, nämlich die ***leere Menge***, die man mit dem Symbol $\varnothing$ bezeichnet. Weil dieses Symbol leicht mit dem Symbol für Durchschnitt oder Durchmesser zu verwechseln ist, wird – vor allem an der Schule – auch gerne $\{\}$ für die leere Menge geschrieben.

Zum Beispiel ist $\{x : x \text{ ganze Zahl und } x^2 + 1 = 0\} = \varnothing$. Ist x eine ganze Zahl, so ist $x^2 \geq 0$ und $x^2 + 1 \geq 1$. Niemals kann 0 herauskommen.

(Regel 5): Das **Unendlichkeitsaxiom** besagt, dass die Menge

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

aller natürlichen Zahlen tatsächlich eine zulässige Menge bildet und dass diese Menge unendlich ist. Was das genau bedeutet, wird später erklärt.

Abb. 2.4 $\qquad \mathbb{N} = \boxed{1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots \quad n \quad n+1 \quad \ldots\ldots\ldots}$

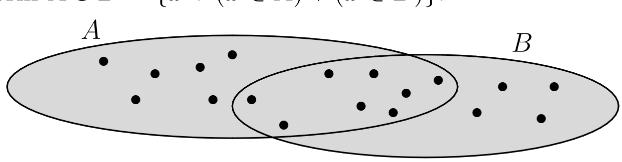
Andere unendliche Mengen sind die Menge $\mathbb{Z}$ aller ganzen Zahlen, die Menge $\mathbb{Q}$ aller rationalen Zahlen (d.h. aller Brüche p/q) und die Menge $\mathbb{R}$ aller reellen Zahlen (d.h. aller unendlichen Dezimalbrüche).

(Regel 6): Ist $\mathscr{S}$ ein System (d.h. eine Menge) von Mengen, so kann man die ***Vereinigungsmenge***

$$\bigcup_{A \in \mathscr{S}} A = \{x : \text{es gibt ein } A \in \mathscr{S} \text{ mit } x \in A\}$$

bilden. Besteht $\mathscr{S}$ nur aus den zwei Mengen A und B, so schreibt man deren Vereinigung auch in der Form $A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$.

Abb. 2.5 $\qquad A \cup B =$



Nachgefragt: *Jetzt wird es doch sehr abstrakt. Wer soll das verstehen?*

Zunächst muss man sich daran gewöhnen, dass die Mathematiker trotz der schönen Erfindung des Mengenbegriffs in manchen Fällen auch noch andere Wörter für die Zusammenfassungen von Objekten benutzen, wie etwa „System", „Familie" usw., insbesondere, wenn die Elemente selbst wieder Mengen sind.

Ist nun $\mathscr{S}$ eine solche Menge von Mengen A, B, C usw., so kann man die Elemente dieser Mengen (also die Elemente der Elemente von $\mathscr{S}$ in eine große Gesamtmenge packen, die „Vereinigung" aller Elemente von $\mathscr{S}$.

Sehr häufig benutzt man die „Indexschreibweise" zur Beschreibung eines Mengensytems und der zugehörigen Vereinigungsmenge:

$$\mathscr{S} = \{M_j \,:\, j \in J\} \quad \text{und} \quad \bigcup_{M \in \mathscr{S}} M = \bigcup_{j \in J} M_j.$$

Auch das ist sicher noch schwer verständlich. Etwas klarer wird es, wenn die Indexmenge J endlich ist: Ist zum Beispiel $J = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, so ist

$$\begin{aligned} \bigcup_{j \in J} M_j &= \{x \,:\, \exists\, j \in \{1,2,3,4,5\} \text{ mit } x \in M_j\} \\ &= \{x \,:\, (x \in M_1) \vee (x \in M_2) \vee \ldots \vee (x \in M_5)\} \\ &= M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_5. \end{aligned}$$

Ist in diesem Fall zum Beispiel $M_1 := \{1, 2, 3\}$, $M_2 := \{n \in \mathbb{N} \,:\, 2 < n < 10\}$, $M_3 := \{7, 8, 9, 10\}$, $M_4 := \{n \in \mathbb{N} \,:\, n \text{ ist Teiler von } 6\}$ und $M_5 := \varnothing$, so ist $M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_5 = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$.[1]

(Regel 7): Ist M eine Menge, so bildet die Gesamtheit aller Teilmengen von M die ***Potenzmenge*** von M, in Zeichen:

$$\mathbf{P}(M) = \{A \,:\, A \subset M\}.$$

Diese Regel ist notwendig, weil nicht von vornherein klar ist, dass $\mathbf{P}(M)$ eine Menge im Cantor'schen Sinne ist. Potenzmengen können sehr, sehr groß werden.

Beispiele 2.1.2 (Mengenbildungen)

$\boxed{1}$ Die Einführung der Zahlenmengen erweitert die Möglichkeiten, Mengen zu konstruieren. Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned} T_{24} &= \{x \in \mathbb{Z} \,:\, \text{es gibt ein } q \in \mathbb{Z} \text{ mit } q \cdot x = 24\} \\ &= \{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 6,\ \pm 8,\ \pm 12,\ \pm 24\} \end{aligned}$$

die Menge der (ganzzahligen) Teiler der Zahl 24. Dies ist eine endliche Menge.

[1] Das Zeichen „:=" spricht man „ist definiert als".

Dagegen ist

$$M = \{x \in \mathbb{N} : \text{es gibt ein } m \in \mathbb{Z} \text{ mit } x = 3m + 2\} = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, \ldots\}$$

eine unendliche Menge.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Es sollen alle Elemente der Menge $M = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x - 5 > 0\}$ bestimmt werden. Zunächst formt man die Aussageform um, die M beschreibt:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x - 5 > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (x-2)^2 > 9 \quad \Longleftrightarrow \quad (x - 2 > 3) \vee (x - 2 < -3) \\ &\Longleftrightarrow \quad (x < -1) \vee (x > 5) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich: $M = \{x \in \mathbb{R} : x < -1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x > 5\}$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Sind A und B zwei Mengen, so nennt man

$$A \cap B = \{x \in A : x \in B\} = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

den ***Durchschnitt*** oder die ***Schnittmenge*** der Mengen A und B.

Zum Beispiel ist $\{B, R, O, T\} \cap \{K, O, R, N\} = \{R, O\}$ oder

$$T_{12} \cap T_{18} = \{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6\}$$

(wenn man mit T_n die Menge der ganzzahligen Teiler von n bezeichnet).

$\boxed{\mathbf{4}}$ Die Menge

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\} = \{x : (x \in A) \wedge \neg(x \in B)\}$$

heißt die ***Differenz*** der Mengen A und B. Zum Beispiel ist

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \setminus \{n \in \mathbb{N} : n = 2k \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}\} = \{1, 3, 5, 7\}.$$

Bei der Differenz $A \setminus B$ darf die Menge B durchaus „größer“ als die Menge A sein, es kann ja $A \setminus B = \varnothing$ sein.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Die Potenzmenge $\mathbf{P}(M)$ einer Menge M enthält auf jeden Fall die leere Menge $\varnothing$ und die gesamte Menge M. Ist etwa M die Menge aller Sorten von Blumen in einem Floristikgeschäft, so kann man zum Beispiel die Teilmengen aller gelben oder auch aller roten Blumen betrachten. Eine andere Auswahl wäre die Menge aller Blumen, deren Name mit einem „A“ beginnt (etwa Anemone, Aster, Akelei usw.), oder die Menge aller Rosen.

Es gibt also sehr viele Teilmengen. Trotzdem ist die Potenzmenge einer endlichen Menge immer noch endlich. Um alle Teilmengen zu erwischen, bietet sich eine gewisse Systematik an: Teilmengen mit einem Element, Teilmengen mit zwei Elementen usw.

So ist etwa

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\{K,A,R,L\}) \;=\;& \{\varnothing,\{K\},\{A\},\{R\},\{L\},\{K,A\},\{K,R\},\{K,L\},\\ &\{A,R\},\{A,L\},\{R,L\},\{K,A,R\},\{K,A,L\},\\ &\{K,R,L\},\{A,R,L\},\{K,A,R,L\}\}.\end{aligned}$$

Die Menge M hat 4 Elemente, und $\mathbf{P}(M)$ hat $16 = 2^4$ Elemente. Dahinter steckt eine Regel, die in Kapitel 4 genauer behandelt wird. Dann wird auch klar, wie es zur Bezeichnung „Potenz“-Menge gekommen ist.

$\boxed{6}$ Gelegentlich arbeitet man mit einer festen Grundmenge, etwa G. Ist dann $A \subset G$, so nennt man die Differenz $A' = G \setminus A$ das ***Komplement*** von A. Ist zum Beispiel $G = \mathbb{N}$ und A die Menge aller **geraden** Zahlen in $\mathbb{N}$, so ist A' die Menge ♠ aller **ungeraden** Zahlen.

2.2 Mengenalgebra

Durchschnitt und Vereinigung von Mengen erinnern an das Rechnen mit Zahlen. Denkt man etwa bei „$\cup$“ an die Addition und bei „$\cap$“ an die Multiplikation, so findet man viele bekannte Regeln wieder, zum Beispiel das **Distributivgesetz** (auch **Verteilungsregel** genannt):

$$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c.$$

Tatsächlich gilt auch das

Distributivgesetz für Mengen:

$$(A\cup B)\cap C = (A\cap C)\cup(B\cap C).$$

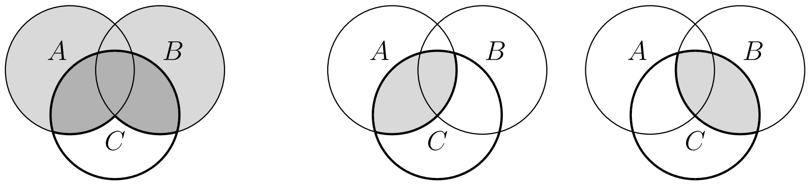
BEWEIS: Diese Formel ist kompliziert genug, um die Notwendigkeit eines Beweises einzusehen. Aber wie beweist man eine solche Formel?

Erste Überlegung: Es soll die Gleichheit zweier Mengen gezeigt werden, also für alle x die Beziehung

$$x \in (A\cup B)\cap C \iff x \in (A\cap C)\cup(B\cap C).$$

Zweite Überlegung: Manchmal (aber nicht immer) hilft eine Skizze (hier ein „Venn-Diagramm“):

Abb. 2.6



$A \cup B$ und $(A \cup B) \cap C$ $\qquad$ $A \cap C$ $\qquad$ $B \cap C$

3. Überlegung: Eine logische Äquivalenz $\mathscr{A} \iff \mathscr{B}$ besteht eigentlich aus zwei Implikationen $\mathscr{A} \implies \mathscr{B}$ und $\mathscr{B} \implies \mathscr{A}$. Die arbeitet man einzeln ab.

4. „Von links nach rechts“: Sei $x \in (A \cup B) \cap C$. Das bedeutet: $(x \in A \cup B) \wedge (x \in C)$, also $\big((x \in A) \vee (x \in B)\big) \wedge (x \in C)$. Damit liegt x auf jeden Fall in C, zugleich aber auch noch in A oder B. Liegt x in A, so liegt x in $A \cap C$. Liegt x dagegen in B, so liegt x in $B \cap C$. Beide Möglichkeiten sind mit „oder“ verknüpft, deshalb liegt x in $(A \cap C) \cup (B \cap C)$. Damit ist der eine Teil des Beweises geschafft. Da hier offensichtlich jede Folgerung umkehrbar ist, kann man sich den Schritt „von rechts nach links“ ersparen. So einfach geht es allerdings nicht immer! ■

Beim Distributivgesetz für Zahlen darf man Addition und Multiplikation nicht vertauschen, im Allgemeinen ist

$$(a + b) \cdot (a + c) \neq a + (b \cdot c).$$

Zum Beispiel ist $(2 + 3) \cdot (2 + 7) = 5 \cdot 9 = 45$, aber $2 + (3 \cdot 7) = 2 + 21 = 23$.

Bei den Mengenoperationen verhält es sich dagegen anders, $\cup$ und $\cap$ dürfen vertauscht werden. Es gilt ein zweites Distributivgesetz, nämlich die Gleichung

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Beispiel 2.2.1 (Zum Distributivgesetz für Mengen)

Ist W die Menge der Lehramtsstudenten und -studentinnen von Wuppertal, so könnte man folgende Eigenschaften für $x \in W$ einführen:

$$\begin{aligned} \mathscr{A}(x) &\ :\ x \text{ studiert das Fach Germanistik,} \\ \mathscr{B}(x) &\ :\ x \text{ studiert das Fach Mathematik,} \\ \mathscr{C}(x) &\ :\ x \text{ ist Studentin.} \end{aligned}$$

Setzt man $A := \{x \in W : \mathscr{A}(x)\}$, $B := \{x \in W : \mathscr{B}(x)\}$ und $C := \{x \in W : \mathscr{C}(x)\}$, so ist

$$(A \cup B) \cap C = \{\text{Studentinnen mit dem Fach Germanistik oder Mathematik}\}$$

und $(A \cap B) \cup C$ die Menge aller Studentinnen und zusätzlich der männlichen Studierenden mit den Fächern Germanistik und Mathematik. ♠

Es gelten auch jeweils zwei Kommutativ- und Assoziativgesetze:

Satz: *Sind A, B, C beliebige Mengen, so gilt*

$$A \cup B = B \cup A \quad \textit{und} \quad A \cap B = B \cap A,$$

sowie

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad \textit{und} \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

Aufgabe 2.2

Beweisen Sie für beliebige Mengen A, B:

1. $A \subset B \iff A \cup B = B$.
2. $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
3. $A \cap B = \varnothing \iff A \setminus B = A$.

Beispiel 2.2.2 (Ein Beispiel zur Mengenalgebra)

Behauptung: $(A \setminus B) \cup (C \setminus A) = (A \cup C) \setminus (A \cap B)$.

Beweis: 1) Sei $x \in (A \setminus B) \cup (C \setminus A)$. Statt alles in eine logische Formel umzuwandeln, die dann auch nicht übersichtlicher ist, kann man das Prinzip der Fallunterscheidung benutzen. Es gibt zwei Möglichkeiten:

(a) $x \in A \setminus B$. Dann liegt x in A und damit auch in $A \cup C$, und andererseits liegt x nicht in B und damit erst recht nicht in $A \cap B$. Zusammen bedeutet das, dass x in $(A \cup C) \setminus (A \cap B)$ liegt.

(b) Sei $x \in C \setminus A$. Dann liegt x in C und damit auch in $A \cup C$, und andererseits liegt x nicht in A und damit wieder nicht in $A \cap B$. Also gehört x auch in diesem Fall zu $(A \cup C) \setminus (A \cap B)$.

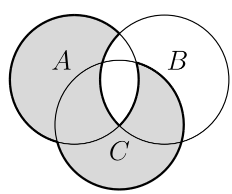
2) Nun sei umgekehrt $x \in (A \cup C) \setminus (A \cap B)$, also $x \in A \cup C$ und $x \notin A \cap B$. Wieder unterscheidet man zwei Möglichkeiten, aber auf etwas andere Weise:

(a) Liegt x in A, aber – nach Voraussetzung – nicht in $A \cap B$, so liegt x in $A \setminus B$.

(b) Liegt x nicht in A, so muss x nach Voraussetzung in C liegen, also in $C \setminus A$.

Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. ■

Abb. 2.7



♠

2.3 Mengen und Quantoren

Ist G eine Menge und $\mathscr{E}(x)$ eine Aussageform für Elemente von G, so definiert man:

$$(1) \qquad \exists\, x \in G \,:\, \mathscr{E}(x) \;:\Longleftrightarrow\; \{x \in G \,:\, \mathscr{E}(x)\} \neq \varnothing.$$

Das bedeutet: „Es ***existiert (mindestens) ein*** $x \in G$ mit der Eigenschaft $\mathscr{E}(x)$.“

$$(2) \qquad \forall\, x \in G \,:\, \mathscr{E}(x) \;:\Longleftrightarrow\; \{x \in G \,:\, \mathscr{E}(x)\} = G.$$

Das bedeutet: „***Für alle*** $x \in G$ gilt $\mathscr{E}(x)$.“

Bemerkung: Man kann die ***Quantoren*** $\exists$ und $\forall$ auch ohne eine vorher festgelegte Grundmenge G verwenden, zum Beispiel in der Form

$$A = B \iff \forall\, x \,:\, x \in A \iff x \in B.$$

In dieser allgemeinen Form sind die Quantoren schwieriger zu definieren: Ein ***Objekt*** ist eine Menge oder ein Element einer Menge. Sei nun $\mathscr{A}(x)$ eine Aussageform. Wenn es ein Objekt a gibt, so dass $\mathscr{A}(a)$ wahr ist, dann ist die Aussage

$$\exists\, x \,:\, \mathscr{A}(x)$$

wahr. Wenn dagegen $\neg\big(\exists\, x \,:\, \neg\mathscr{A}(x)\big)$ wahr ist, dann ist

$$\forall\, x \,:\, \mathscr{A}(x)$$

eine wahre Aussage. Mit dieser Definition ist auch unmittelbar klar, wie quantifizierte Aussagen verneint werden.

In der Literatur, insbesondere auch in Schulbüchern, werden oft andere Symbole für die Quantoren verwendet. Statt $\exists$ benutzt man auch das Symbol „$\bigvee$“, statt $\forall$ das Symbol „$\bigwedge$“. Das Symbol $\exists$ stammt von Giuseppe Peano[2], das Symbol $\forall$ von Gerhard Gentzen.[3] Populär wurde diese Schreibweise der Quantoren durch die Bücher von Bourbaki[4]

Der Gebrauch von Quantoren in der Umgangssprache kann leicht zu Verwirrung führen. Die Tatsache, dass auch an der Universität Wuppertal viele Dozenten den Professorentitel tragen, würde ein Mathematiker in der Form „Es gibt einen Professor an der Universität Wuppertal“ ausdrücken. Der Beweis ist nicht schwer

[2]Der italienische Mathematiker Giuseppe Peano (1858–1932) befasste sich unter anderem mit mathematischer Logik und der Axiomatik der natürlichen Zahlen. Er führte viele Symbole der Mengenlehre ein.

[3]Der deutsche Mathematiker und Logiker Gerhard Karl Erich Gentzen (1909–1945) war Mitbegründer der modernen mathematischen Beweistheorie.

[4]Nicolas Bourbaki ist das Pseudonym einer Gruppe französischer Mathematiker, die zwischen 1934 und 1998 unter dem Titel *Elemente der Mathematik* ein sehr anspruchsvolles und axiomatisch aufgebautes Lehrbuch der modernen Mathematik schufen.

zu erbringen. Schwieriger ist die Beweislage bei der Aussage „Es gibt Leben auf dem Mars“. Die Aussage „Keine Frau kann rückwärts einparken“ ist natürlich ein dümmlicher Macho-Spruch, von der logischen Struktur her ist es eine All-Aussage, so wie viele andere Vorurteile (ein historisches Beispiel ist die Aussage „Alle Kreter lügen“, mit der ein bekanntes Rätsel eingeleitet wird). Für Verblüffung sorgt sicher die folgende logische Konstruktion:

- „Nichts ist besser als ein reines Gewissen.“
- „Trockenes Brot ist besser als nichts.“
- „Also ist trockenes Brot besser als ein reines Gewissen.“

Man sollte daher bei der Quantisierung besser bei mathematichen Aussagen bleiben, zum Beispiel:

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}\; \exists\, m \in \mathbb{Z} \text{ mit } n + m = 0.$$

$$\forall\, x \in \mathbb{Q} \,:\, (x < 0) \vee (x \geq 0).$$

$$\forall\, n\; \exists\, a, b, c \in \mathbb{Z} \text{ mit } a^n + b^n = c^n.$$

(Die ersten beiden Aussagen sind wahr, die dritte ist falsch.)

Mengentheoretische Aussagen lassen sich mit Hilfe von Quantoren leicht in die Prädikatenlogik übersetzen. Die Aussage „$(A \subset B) \wedge (B \subset C) \implies (A \subset C)$“ bedeutet zum Beispiel:

$$\forall\, x \,:\, \Big(\big((x \in A \implies x \in B) \wedge (x \in B \implies x \in C)\big) \implies \big(x \in A \implies x \in C\big)\Big).$$

Für zwei Mengen A und B lässt sich die Aussage „$A \cap B = A \implies A \subset B$“ auch folgendermaßen ausdrücken:

$$\forall\, x \,:\, \big(x \in A \implies (x \in A \wedge x \in B)\big) \implies (x \in A \implies x \in B).$$

Dabei wurde benutzt, dass die Aussage $A \cap B \subset A$ automatisch wahr ist.

Aufgabe 2.3

Übersetzen Sie die folgenden Aussagen in die Prädikatenlogik.

1. $A \cap B \neq \varnothing \implies (A \neq \varnothing) \wedge (B \neq \varnothing)$
2. Für $A, B \subset G$ gilt:
   (a) $A \cap B = G \iff (A = G) \wedge (B = G)$.
   (b) $(A = G) \vee (B = G) \implies A \cup B = G$.

Geben Sie Beispiele dafür an, dass die Implikationen nicht durch Äquivalenzzeichen ersetzt werden können.

Aufgabe 2.4

Verneinen Sie die folgenden Aussagen:

1. $\forall\, x \in G\ :\ (\,\mathscr{A}(x) \implies \mathscr{B}(x)\,)$.
2. $\exists\, x \in G\ :\ (\forall\, y \in H\ :\ \mathscr{A}(x,y)) \vee (\,\exists\, y \in H\ :\ \neg\mathscr{B}(x,y))$.

Lewis Carroll, der Autor von *Alice im Wunderland*, war Mathematiker und Logiker. Von ihm stammt das folgende berühmte Rätsel. Bei der Lösung sollte man versuchen, sich von der Bedeutung der Begriffe zu lösen. Es geht um rein formale, logische Konstruktionen. Insbesondere ist den Aussagen nicht zu entnehmen, ob „Katze“ und „Känguru“ zwei verschiedene Tiergattungen sind. Man kann mit Mengenlehre oder mit Prädikatenlogik arbeiten. Die Aussage „Die einzigen Tiere in diesem Haus sind Katzen“ kann man dann folgendermaßen interpretieren:

1. Logische Interpretation: Steht die Variable T für Tiere, so geht es um die zwei Aussageformen $\mathscr{A}(t)$ (T im Haus) und $\mathscr{B}(T)$ (T ist Katze), die in der Form $\forall\, T\ :\ \mathscr{A}(T) \implies \mathscr{B}(T)$ miteinander verknüpft werden.

2. Mengentheoretische Interpretation: Ist X die Menge aller Tiere, $H \subset X$ die Teilmenge aller Tiere im Haus und $Z \subset X$ die Teilmenge aller Katzen, so geht es um die Aussage $H \subset Z$.

Aufgabe 2.5

1. Die einzigen Tiere in diesem Haus sind Katzen.
2. Jedes Tier, das gern in den Mond starrt, ist als Schoßtier geeignet.
3. Wenn ich ein Tier verabscheue, gehe ich ihm aus dem Weg.
4. Es gibt keine fleischfressenden Tiere außer denen, die bei Nacht jagen.
5. Es gibt keine Katze, die nicht Mäuse tötet.
6. Kein Tier mag mich, außer denen im Haus.
7. Kängurus sind nicht als Schoßtiere geeignet.
8. Nur fleischfressende Tiere töten Mäuse.
9. Ich verabscheue Tiere, die mich nicht mögen.
10. Tiere, die bei Nacht jagen, starren gerne in den Mond.

Wie verhalte ich mich gegenüber Kängurus?

2.4 Zusätzliche Aufgaben

Aufgabe 2.6. Beschreiben Sie die folgenden Objekte mit Hilfe der Mengenschreibweise. Es gibt meistens mehrere Beschreibungsmöglichkeiten.

1. Die Kugelschale um den Punkt P mit innerem Radius r und Dicke d.
2. Die Gesamtheit aller Lösungen der Gleichung $3x^2 - 2x = 1$.
3. Alle ganzen Zahlen, die kleiner als 7 und größer als -1 sind.
4. Alle Punkte im Koordinatensystem, die von der x-Achse und der y-Achse den gleichen Abstand haben.

Hinweis: *Bei Aufgabe (1) und (4) geht es um Punktmengen in der Ebene oder im Raum. Ein Punkt P in der Ebene ist durch seine zwei Koordinaten x und y festgelegt, man schreibt dann $P = (x, y)$ (im Gegensatz zu der an der Schule verbreiteten Schreibweise $P(x|y)$). Der Abstand zweier Punkte $P = (x, y)$ und $Q = (u, v)$ ist eine (reelle) Zahl, die man mit $d(P, Q)$ bezeichnen kann, wobei der Buchstabe „d" an das Wort* Distanz *erinnern soll. Der Satz des Pythagoras liefert, dass $d(P, Q) = \sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2}$ ist. Näher wird darauf in den späteren Kapiteln eingegangen. Punkte im Raum werden durch drei Koordinaten x, y, z beschrieben, in der Form $P = (x, y, z)$. Der Abstand zweier Punkte $A = (x, y, z)$ und $B = (u, v, w)$ ist die Zahl $d(A, B) = \sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2 + (w-z)^2}$.*

Wenn – wie in Aufgabe (2) – nichts anderes gesagt wird, werden Zahlen in der Menge $\mathbb{R}$ (aller von der Schule her bekannten Zahlen) gesucht. Offiziell und ausführlich wird die Menge $\mathbb{R}$ erst in Kapitel 3 eingeführt.

Aufgabe 2.7. Benutzen Sie Gleichungen und Ungleichungen, um Mengen zu beschreiben, die in Wirklichkeit leer sind (denen man das aber nicht auf den ersten Blick ansieht).

Hinweis: *Man denke daran, dass nicht jede Gleichung eine Lösung besitzt.*

Aufgabe 2.8. Prüfen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr sind:

a) $\{x \in \mathbb{N} : x^2 - 4x + 3 = 0\} = \{1, 3\}$, b) $\{a, b, c\} = \{b, a, c\}$.
c) $3 \in \{3\}$, d) $3 \subset \{3\}$, e) $\varnothing \subset \{1\}$, f) $\varnothing \in \{1\}$.

Aufgabe 2.9. Bestimmen Sie jeweils $A \cap B$, $A \cup B$ und $A \setminus B$ für die folgenden Mengen:

1) $A := \{x \in \mathbb{R} : 2(x-1) < 1\}$ und $B := \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x < 0\}$.

2) $A := \{x : \exists\, p \in \mathbb{N} \text{ mit } x = 3p\}$ und $B := \{x : \exists\, q \in \mathbb{Z} \text{ mit } x = 4q\}$.

3) $A := \{x \in \mathbb{N} : \exists\, p, q \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } x = 2p + 3q\}$ und $B := \{x \in \mathbb{N} : x^2 \leq 50\}$.

Hinweis: *Es ist ratsam, die Mengen A und B möglichst einfach und übersichtlich zu beschreiben.*

Aufgabe 2.10. Bestimmen Sie alle Elemente von $\mathbf{P}(\mathbf{P}(\{1\})) \cap \mathbf{P}(\{\varnothing, 1\})$.

Hinweis: *Die leere Menge $\varnothing$ besitzt kein Element, die Menge $\{\varnothing\}$ dagegen wohl.*

Aufgabe 2.11. Es sei M eine Menge mit n Elementen, $a \notin M$. Um wie viele Elemente ist $\mathbf{P}(M \cup \{a\})$ größer als $\mathbf{P}(M)$?

Aufgabe 2.12. Zeigen Sie, dass $\mathbf{P}(X) \cap \mathbf{P}(Y) = \mathbf{P}(X \cap Y)$ und $\mathbf{P}(X) \cup \mathbf{P}(Y) \subset \mathbf{P}(X \cup Y)$ für alle Mengen X und Y gilt. Geben Sie ein einfaches Beispiel dafür an, dass im zweiten Fall i.A. nicht die Gleichheit gilt.

Aufgabe 2.13. Beweisen Sie die folgenden Inklusionen (Teilmengenbeziehungen):

$$\begin{array}{rrcl} & A \cup (B \setminus C) & \subset & (A \cup B) \setminus (C \setminus A) \\ \text{und} & (A \cap B) \setminus (A \cap C) & \subset & A \cap (B \setminus C). \end{array}$$

Aufgabe 2.14. Ein Händler hat schwarze und silberne DVD-Geräte auf Lager. Davon sind 159 schwarz oder fehlerhaft (oder beides), 21 sind gleichzeitig schwarz und fehlerhaft, 17 sind gleichzeitig silbern und fehlerhaft. Interpretieren Sie die Angaben mengentheoretisch und ermitteln Sie, wie viele schwarze Geräte im Lager stehen.

Hinweis: *Für die Formulierung der Lösung ist es hilfreich, ein Symbol für die Anzahl der Elemente einer Menge M einzuführen, zum Beispiel $\#(M)$.*

Aufgabe 2.15. Formulieren Sie die folgenden umgangssprachlichen Aussagen mit Hilfe des Existenz- bzw. Allquantors.

1. Die Polizei meldet, dass Fußgänger auf der A46 gesichtet wurden.
2. Bei der Galavorstellung gab es keine freien Plätze mehr.
3. Jeder Student muss wenigstens eine mündliche Prüfung ablegen.
4. Wenn ich in der Stadt auch nur einen Gerechten finde, werde ich sie nicht zerstören.
5. Nicht alle Kühe stehen im Stall.
6. Keine Kuh steht im Stall.

Aufgabe 2.16. $A_1, \ldots, A_n$ seien Teilmengen einer Grundmenge G. Formulieren und beweisen Sie mit dem Allquantor und dem Existenzquantor die folgende Aussagen:

$$\begin{array}{rrcl} & G \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n) & = & (G \setminus A_1) \cap \ldots \cap (G \setminus A_n) \\ \text{und} & G \setminus (A_1 \cap \ldots \cap A_n) & = & (G \setminus A_1) \cup \ldots \cup (G \setminus A_n). \end{array}$$

Hinweis: *Was haben Existenz- und Allquantor mit den angegebenen Mengengleichungen zu tun? Es geht um die Indexschreibweise: Liegt zum Beispiel ein Element x in einer der Mengen $A_1, \ldots, A_n$, so gibt es einen Index i, so dass x in A_i liegt.*

Aufgabe 2.17. Benutzen Sie Quantoren, um die folgenden Aussagen zu verneinen:

a) Das Parallelenaxiom (Euklids Postulat V, siehe Kapitel 1, Abschnitt 2, „Alles beginnt mit den Axiomen“).

b) „In jedem Dreieck sind zwei Winkel, beliebig zusammengenommen, kleiner als zwei Rechte.“

c) „Beim Betriebsfest hat jeder Abteilungsleiter in jeder Stunde mit jeder Angestellten Walzer getanzt.“

d) „In jeder Stadt gibt es einen Mann, der nicht in jeder Gaststätte bekannt ist.“

e) „Es gibt einen Studenten, der in jedem Semester in jeder Vorlesung zu spät kommt.“

http://www.springer.com/978-3-662-48909-3

Tutorium Mathematik für Einsteiger
Fritzsche, K.
2016, XVI, 398 S. 201 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-662-48909-3