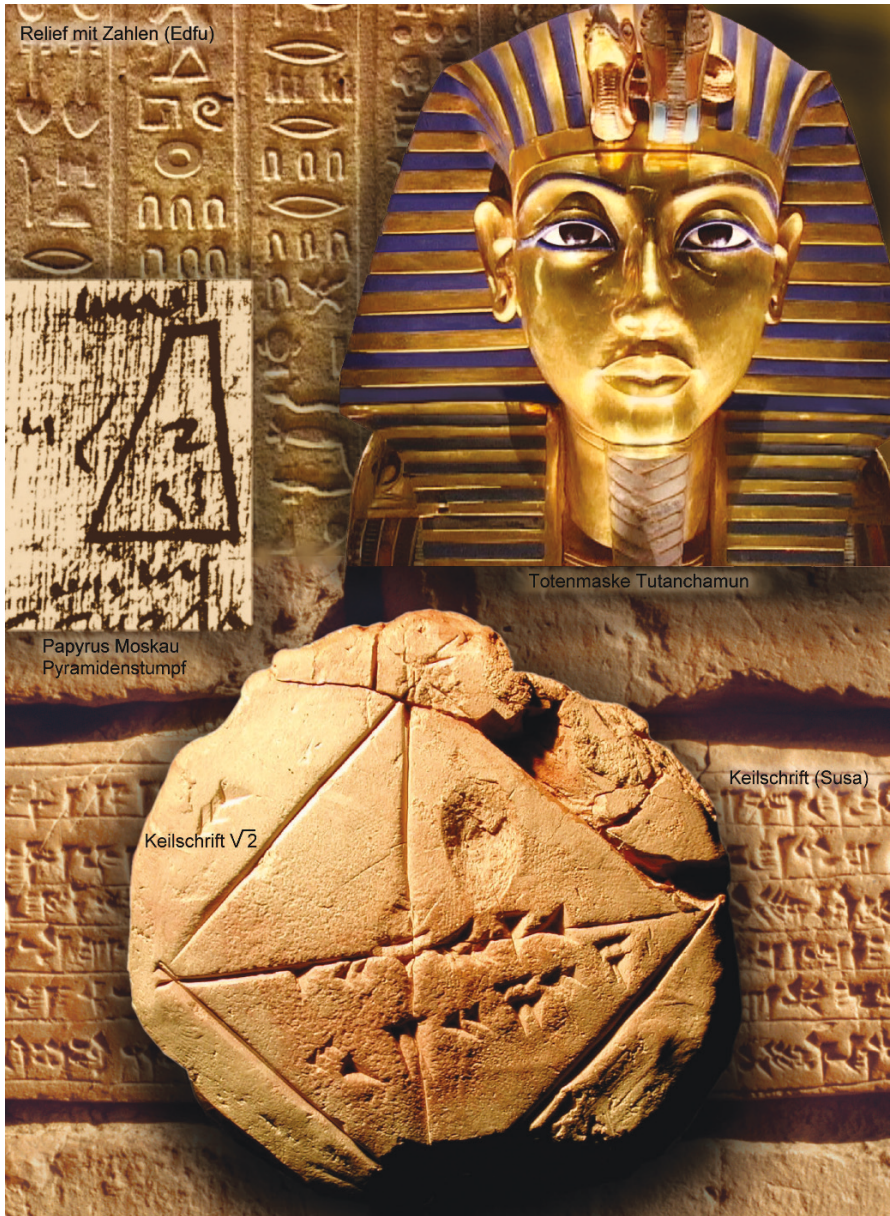


# 1 Prolog: 3000 Jahre Analysis



ab 3000 v. Chr.	Nomaden aus dem Norden wandern in das südliche Mesopotamien ein. Entstehung sumerischer Stadtstaaten und der Keilschrift auf Tontafeln. Einigung der Reiche am Nil. Entstehung der Hieroglyphen
ca. 2707–2170	Altes Reich in Ägypten. Die Stufenpyramide in Sakkara, die Knickpyramide in Dahschur, die großen Pyramiden des Cheops, Chefren und Mykerinos und die Sphinx in Giza entstehen
2170–2020	Erste Zwischenzeit in Ägypten
um 2235–2094	Das Reich von Akkad in Mesopotamien, begründet durch Sargon von Akkad
ca. 2137–1781	Mittleres Reich in Ägypten. Mathematische Papyri
1850	Vermutliche Entstehungszeit des Moskauer Papyrus
1793–1550	Zweite Zwischenzeit in Ägypten
1650	Ahmes schreibt den Papyrus Rhind
2000–1595	Altbabylonische Periode in Mesopotamien. Unter König Hammurabi (um 1700) entstehen die ersten Gesetzestexte der Menschheit
1675	Eine Tontafel mit der Länge der Diagonalen in einem Quadrat wird in Mesopotamien beschriftet
ca. 1550–1070	Neues Reich in Ägypten. Tempel der Hatschepsut und Königsgräber in Theben. Amuntempel in Karnak. Sonnenkult des Echnaton in Amarna
1279–1213	Rhamses II., Tempel von Abu Simbel
1070–525	Dritte Zwischenzeit und Spätzeit in Ägypten
ca. 1700–609	Assyrisches Reich. Mathematische Keilschrifttexte, Zikkurate
ca. 750–620	Neuassyrisches Reich, das erste Großreich der Weltgeschichte, Residenzen in Nimrud und Ninive
625–539	Neubabylonisches Reich, Blüte von Astrologie und Astronomie
539	Kyros der Große erobert Babylon
525	Perser erobern Ägypten
332	Alexander der Große erobert Ägypten

Bemerkung: Es gibt davon abweichende Chronologien



Abb. 1.0.2. Ägypten und Mesopotamien in vorchristlicher Zeit

## 1.1 Was ist Analysis?

Dreitausend Jahre Analysis? Ist die Analysis nicht erst im 17. Jahrhundert durch Newton und Leibniz entstanden?

Um diese Fragen zufriedenstellend beantworten zu können, sollten wir uns zu Beginn ansehen, was man unter Analysis versteht. Im Internet findet man unter der Adresse <http://de.wikipedia.org/wiki/Analysis> die folgende Definition:

*Die Analysis [...] ist ein Teilgebiet der Mathematik, dessen Grundlagen von Gottfried Wilhelm Leibniz und Isaac Newton unabhängig voneinander entwickelt wurden. [...]*

Also doch! Analysis wäre demnach etwa 400 Jahre alt, aber Vorsicht ist geboten, denn der zitierte Wikipedia-Artikel steht zur Überprüfung seiner Qualität gerade auf dem Prüfstand und ist in dem Moment, an dem Sie diese Sätze hier lesen, vielleicht schon verschwunden!

Etwas dauerhafter als eine in der Veränderung sich befindliche Internetseite ist die gute alte Encyclopaedia Britannica. Unter „Analysis (mathematics)“ findet man dort:

*a branch of mathematics that deals with continuous change and with certain general types of processes that have emerged from the study of continuous change, such as limits, differentiation, and integration. Since the discovery of the differential and integral calculus by Isaac Newton and Gottfried Wilhelm Leibniz at the end of the 17th century, analysis has grown into an enormous and central field of mathematical research, with applications throughout the sciences and in areas such as finance, economics, and sociology.*

Dieser Definition bin ich bereit zu folgen! Es geht um die Mathematik der stetigen Veränderung, woraus sich Tangentenprobleme, Quadraturprobleme (Berechnung von Flächen unter Kurven) und schließlich mit Newton und Leibniz die eigentliche Differential- und Integralrechnung entwickelten.

In einem engeren Sinne ist Analysis aber die mathematische Teilwissenschaft der unendlichen Prozesse und der „unendlich kleinen Größen“ und dieser Standpunkt soll das Band sein, das unsere Reise durch die Geschichte wie ein roter Faden begleiten soll. Nun ist das nicht durchgängig möglich. Der Begriff der „Funktion“ ist in der Analysis zentral, hat aber erst einmal nichts mit unendlich kleinen Größen zu tun, dennoch gehört eine Diskussion des Funktionsbegriffs in eine Geschichte der Analysis.

Wie kommen nun aber die 3000 Jahre zustande? Nun, in der Analysis spielen auch spezielle Zahlen wie die Kreiszahl  $\pi$  oder  $\sqrt{2}$  eine besondere Rolle, und solche Zahlen findet man bereits tatsächlich im alten Ägypten und im mesopotamischen Kulturraum.

## 1.2 Vorläufer von $\pi$

Bereits in einem berühmten altägyptischen Papyrus, dem Papyrus Rhind<sup>1</sup>, in dem der Schreiber Ahmes um das Jahr 1650 v. Chr. mathematische Aufgaben kopierte, die mindestens 200 Jahre älter sind, befindet sich eine angenäherte Kreisflächenberechnung.

---

<sup>1</sup> Benannt nach dem Schotten Alexander Henry Rhind, der den Papyrus im Jahr 1858 in Luxor kaufte.





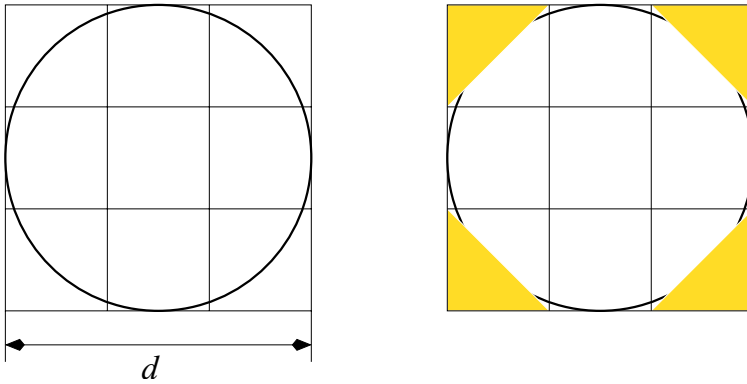
**Abb. 1.2.1.** Der Anfang vom Papyrus Rhind. Der Papyrus ist 5,5m lang und 32cm breit. Es enthält Angaben und Aufgaben zu mathematischen Themen, die wir heute zur Algebra, Bruchrechnung, Geometrie und Trigonometrie zählen. Es ist die Abschrift einer Vorlage aus der 12. Dynastie (19. Jh. v. Chr.). Der Schreiber Ahmose verfasste diese Kopie um 1650 v. Chr. in hieratischer Schrift. (Department of Ancient Egypt and Sudan, British Museum EA 10057, London [Foto: Paul James Cowie])

Ahmes zeigt in Problem 48 seines Papyrus einen Kreis, der von einem Quadrat umgeben ist. Die Berechnungen darunter lassen darauf schließen, dass ein Quadrat mit Seitenlänge 9 den Flächeninhalt 81, und ein Kreis mit Durchmesser 9 den Flächeninhalt 64 hat. In Problem 50 findet man dann eine konkrete Anweisung zur Berechnung einer Kreisfläche<sup>2</sup>:

*Beispiel der Berechnung eines runden Feldes vom (Durchmesser) 9.  
Was ist der Betrag seiner Fläche? Nimm  $1/9$  von ihm (dem Durchmesser) weg. Der Rest ist 8. Multipliziere 8 mal 8. Es wird 64.*

Diese Rechenvorschrift lässt darauf schließen, dass die Ägypter für  $\pi/4$  den Wert  $\pi_{\text{Ägypten}}/4 = (8/9)^2$  verwendeten. Da sie die Kreiszahl aber gar nicht als solche kannten, ergibt sich die Frage, wie man auf diesen Wert kam. Eine Möglichkeit wäre die Verwendung eines Gitternetzes. Man umschreibt einem Kreis mit Durchmesser  $d$  ein Quadrat der Kantenlänge  $d$  und teilt das Quadrat gleichmäßig in 9 Unterquadrate nach Abb. 1.2.2 (links). Nun würde die Fläche des Quadrates die Kreisfläche massiv überschätzen, also teilt man die vier Unterquadrate in den Ecken in je zwei Dreiecke, von denen nur jeweils eines zur Flächenberechnung beiträgt (vgl. Abb. 1.2.2 (rechts)). Damit bleiben

<sup>2</sup> Zitiert nach [Gericke 2003, S. 55]



**Abb. 1.2.2.** Näherung der Kreisfläche von außen

noch 5 Unterquadrate und 4 Dreiecke übrig und die Kreisfläche wird durch die Beziehung

$$A_{\text{Kreis}} \approx 5 \cdot \left(\frac{d}{3}\right)^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{d}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}d^2$$

angenähert. Ahmes gibt jedoch als Näherung an

$$A_{\text{Kreis}} \approx \frac{64}{81}d^2 = \left(\frac{8}{9}d\right)^2.$$

Offenbar hat er die (korrekte!) Näherung  $\frac{7}{9}d^2 = \frac{63}{81}d^2$  um die Fläche von  $\frac{1}{81}d^2$  vergrößert, um schließlich zu Quadratzahlen in Zähler und Nenner zu kommen! Da die Kreisfläche durch  $A_{\text{Kreis}} = \pi r^2 = (\pi/4)d^2$  gegeben ist, haben die alten Ägypter also mit einem Näherungswert

$$\pi_{\text{Ägypten}} = 3.16049$$

gearbeitet, der wirklich nicht schlecht ist! Immerhin ist der relative Fehler nur

$$\frac{\pi_{\text{Ägypten}} - \pi}{\pi} \approx 0.00601643,$$

also etwa 0.6%!

In der sehr sehenswerten Fernsehproduktion „The Story of Maths“ [Du Sautoy 2008] erläutert Marcus du Sautoy eine andere Möglichkeit, wie die Ägypter auf ihre Kreisberechnung gekommen sein könnten. Demnach stammt die Näherung  $\pi_{\text{Ägypten}}/4 = (8/9)^2$  von einem alten ägyptischen Brettspiel, bei dem man Kugeln aus halbkugelförmigen Vertiefungen um ein Spielbrett herum bewegen muss. Mit den Spielkugeln lässt sich ein Kreis mit einem Durchmesser legen, der 9 Kugeln entspricht.

Legt man die Spielkugeln nun so um, dass sie ein Quadrat bilden, dann hat das Quadrat die Kantenlänge 8. Sollte du Sautoy's Interpretation stimmen, dann liegt hier auch schon ein früher Versuch der „Quadratur des Kreises“ vor, die uns später beschäftigen wird.



**Abb. 1.2.3.** Königin Nefertari (19. Dynastie, Gattin Rhamses II.) beim Senet-spiel. Das Senetspiel konnte in seinen Regeln annähernd nachvollzogen werden. Die Regeln anderer Spiele wie Schild- oder Schlangenspiel sind dagegen weitgehend unbekannt (Wandmalerei Grabkammer Nefertari, Theben-West)

### 1.3 Das $\pi$ der Bibel

Der ägyptische Wert für  $\pi$  war schon wesentlich besser als der „biblische“ Wert. Im ersten Buch Könige, Kapitel 7, Vers 23, lesen wir:

*Und er machte das Meer, gegossen, von einem Rand zum andern zehn Ellen weit rundherum und fünf Ellen hoch, und eine Schnur von dreißig Ellen war das Maß ringsherum.*

Sollten noch Zweifel an der *Form* des Meeres vorhanden sein, so klärt uns der Vers 2 im vierten Kapitel des zweiten Buches Chronik auf:

*Und er machte das Meer, gegossen, von einem Rand zum andern zehn Ellen breit, ganz rund, fünf Ellen hoch, und eine Schnur von dreißig Ellen konnte es umspannen.*

Damit ist die Form des Meeres tatsächlich ein Kreis mit Durchmesser  $d = 10$  Ellen und Umfang  $U = 30$  Ellen. Weil Umfang und Durchmesser eines jeden Kreises im Verhältnis  $U = \pi d$  stehen, folgt damit

$$\pi_{\text{Bibel}} = \frac{U}{d} = \frac{30}{10} = 3.$$

Diesen Wert verwendeten auch die Babylonier, und Edwards schlägt in [Edwards 1979, S. 4, Ex.5] einen Erklärungsversuch dafür vor, der mir sehr realistisch zu sein scheint. An Stelle der Flächennäherung wie bei den Ägyptern kann man auch auf die Idee kommen, dem Kreis nicht nur ein Quadrat umzubeschreiben, sondern auch wie in Abb. 1.3.1 eines einzubeschreiben, um die Fläche des Kreises dann als arithmetisches Mittel der beiden Quadratflächen anzunähern. Der Flächeninhalt des äußeren Quadrats ist offenbar  $A_1 := d^2 = 4r^2$ . Nach dem Satz des Pythagoras, den derselbe vermutlich aus Mesopotamien mitbrachte und den die Babylonier daher mit Sicherheit kannten, folgt für die Kantenlänge des inneren Quadrats  $\sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2}r$ , also für die Fläche des inneren Quadrats  $A_2 := 2r^2$ . Da die Fläche des äußeren Quadrats die Kreisfläche überschätzt, während die Fläche des inneren Quadrats die Kreisfläche unterschätzt, kann man hoffen, dass das arithmetische Mittel eine brauchbare Näherung an die Kreisfläche ergibt:

$$A_{\text{Kreis}} \approx \frac{A_1 + A_2}{2} = 3r^2.$$

Hier taucht also tatsächlich der biblische Wert für  $\pi$  auf.

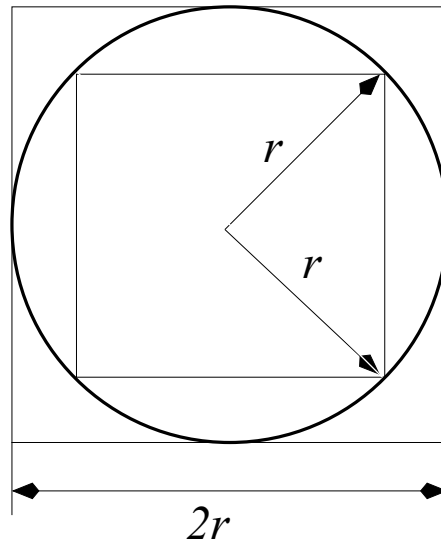
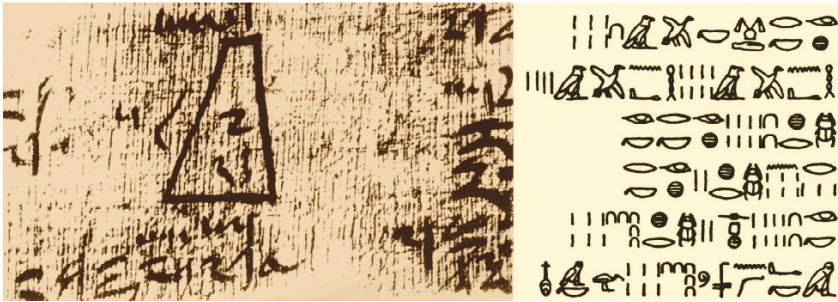


Abb. 1.3.1. Näherung der Kreisfläche von innen



## 1.4 Volumen eines Pyramidenstumpfes

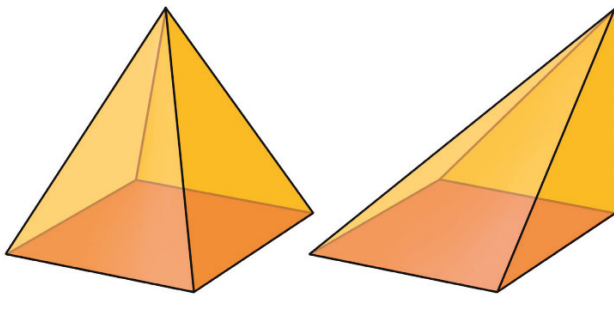
Im sogenannten Moskauer Papyrus, der sich im Puschkin-Museum in Moskau befindet, finden wir das Problem 14, das fast schon auf eine Grundaufgabe der Analysis hinweist: es wird das Volumen von Pyramidenstümpfen berechnet.



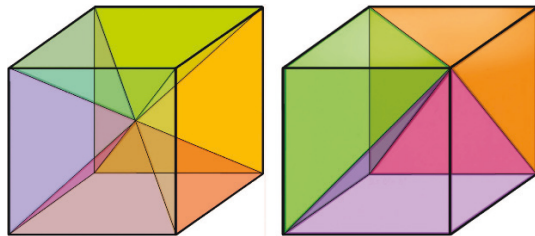
**Abb. 1.4.1.** Berechnung des Volumens eines Pyramidenstumpfes (Papyrus Moskau) in hieratischer Schrift und als Hieroglyphen

Gerade für die Baumeister der Pyramiden muss diese Berechnung äußerst wichtig gewesen sein, denn die Pyramiden entstanden schichtweise. Eine Pyramide ist also nichts anderes als die Summe von Pyramidenstümpfen mit einer pyramidalen Spitze ganz oben. Wir wollen hier nicht spekulieren, wie die Ägypter zu ihrer (richtigen) Formel für das Volumen eines Pyramidenstumpfes gekommen sind, sondern verweisen auf die entsprechenden Abschnitte in [Gillings 1982] (siehe auch [Scriba/Schreiber 2000, S. 14 ff.], [Wußing 2008, S. 99f.]).

Auf die Analysis hinweisend ist aber die Methode, mit der man vermutlich das Volumen einer Pyramide berechnete (in [Gillings 1982] wird noch eine weitere Methode präsentiert). Dazu betrachteten die ägyptischen Schreiber eine Pyramide, bei der die Spitze genau über einem der Eckpunkte steht.

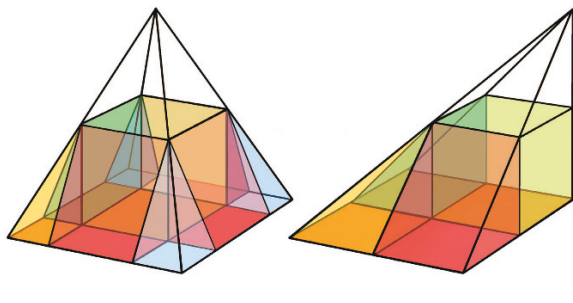


**Abb. 1.4.2.** Eine symmetrische und eine rechtwinklige Pyramide mit derselben Grundfläche und derselben Höhe haben das gleiche Volumen



**Abb. 1.4.3.** Zerlegung eines Würfels in sechs symmetrische Pyramiden halber Höhe mit den Spitzen im Zentrum (li.), in drei rechtwinklige Pyramiden (re.)

Drei solcher rechtwinkligen (oder „schiefen“) Pyramiden mit gleicher Höhe und Basiskante bilden zusammen einen Würfel mit gleicher Höhe und Basiskante, d. h. das Volumen jeder dieser Pyramiden ist ein Drittel des Volumens des Würfels. Man kann auch aus 6 kongruenten, symmetrischen Pyramiden mit halber Höhe ihrer Basiskante einen Würfel zusammensetzen: Man setze zwei dieser Pyramiden mit der Spitze aufeinander und schließe die verbleibenden Hohlräume ringsum mit den anderen vier Pyramiden wie in Abb. 1.4.3 (links). Wenn man sich nun die rechtwinklige Pyramide in Abb. 1.4.2 in sehr viele dünne Schichten parallel zur Grundfläche zerlegt vorstellt und diese Schichten verschiebt, dann erhält man die symmetrische volumengleiche Pyramide, deren Spitze wie gewohnt über der Mitte der quadratischen Grundfläche thront. Dasselbe gilt natürlich auch für die Pyramidenstümpfe in Abb. 1.4.4. In der Tat sind die Pyramiden im alten Ägypten durch den Aufbau in vielen, vielen Schichten entstanden. Schon die für die Könige der ersten beiden Dynastien (ca. 3000–2700) als Grabanlagen erbeuten Mastabas weisen diese Schichten auf.



**Abb. 1.4.4.** Die Berechnung eines Pyramidenstumpfes lässt sich anschaulich durch die Aufteilung in seine geometrischen Grundformen nachvollziehen: bei der symmetrischen Pyramide 1 Quader in der Mitte, 4 Prismen an den Seiten und 4 rechtwinklige Pyramiden an den Ecken; bei der rechtwinkligen Pyramide derselbe Quader, jedoch nur 2 doppelt so große Prismen an den Seiten und 1 (rechtwinklige) Pyramide von vierfachem Volumen an der Ecke, so dass man für beide Stümpfe auf dasselbe Volumen  $V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$  kommt



**Abb. 1.4.5.** Stufenpyramide des Pharaos Djoser in Sakkara (um 2600 v. Chr.)  
[Foto: H.-W. Alten]



**Abb. 1.4.6.** „Knickpyramide“ von Dahschur [Foto: H. Wesemüller-Kock]



**Abb. 1.4.7.** Schichtenaufbau der Cheops-Pyramide (Giza, Kairo)  
[Foto: H.-W. Alten]

König Djoser, der zweite König der dritten Dynastie, ließ die ursprünglich dreistufige Mastaba um drei weitere Stufen erhöhen, von denen jede wiederum aus vielen dünnen Schichten von Steinquadern gebildet ist. So entstand um 2680 die berühmte Stufenpyramide des Djoser in Sakkara (Abb. 1.4.5). Unter König Snofru in der vierten Dynastie vollzog sich der Übergang zur abstrakten geometrischen Form der Pyramide. Das war ein großes Wagnis, denn der in der ersten Phase bis etwa 49 m Höhe aus nach innen geneigten Schichten ausgeführte Baukörper war instabil. Dies war eine Folge des mit ca. 58 Grad zu steilen Böschungswinkels und der Neigung der Schichten. In der zweiten Phase wurde die Grundfläche vergrößert, der Winkel mit 54 Grad kleiner gewählt, aber wieder mit geneigten Schichten gebaut. Als auch dies nicht half, wurde in der dritten Phase eine Pyramide mit dem Böschungswinkel von 43 Grad und horizontal verlegten Schichten auf den vorhandenen Pyramidenstumpf gesetzt. So entstand um 2615 die Knickpyramide des Snofru in Dahschur (Abb. 4.1.6) – Prototyp für die großen Pyramiden des Cheops, Chefren, Mykerinos und die anderen Pyramiden des alten Reiches, alle mit horizontalem Schichtenaufbau (Abb. 1.4.7).

Wenn diese Idee des Zerschneidens einer räumlichen Figur in (im Prinzip unendlich viele) horizontale Schnitte den alten ägyptischen Schreibern tatsächlich zur Hand war, dann haben sie eine zentrale Idee der Analysis vorweggenommen, nämlich das Jahrtausende später von Cavalieri entdeckte Prinzip zur Berechnung von Flächen- bzw. Rauminhalten durch „Summation“ von „Indivisiblen“ bzw. den Begriff des bestimmten Integrals als Summe (unendlich vieler) infinitesimaler Strecken bzw. Schichten.

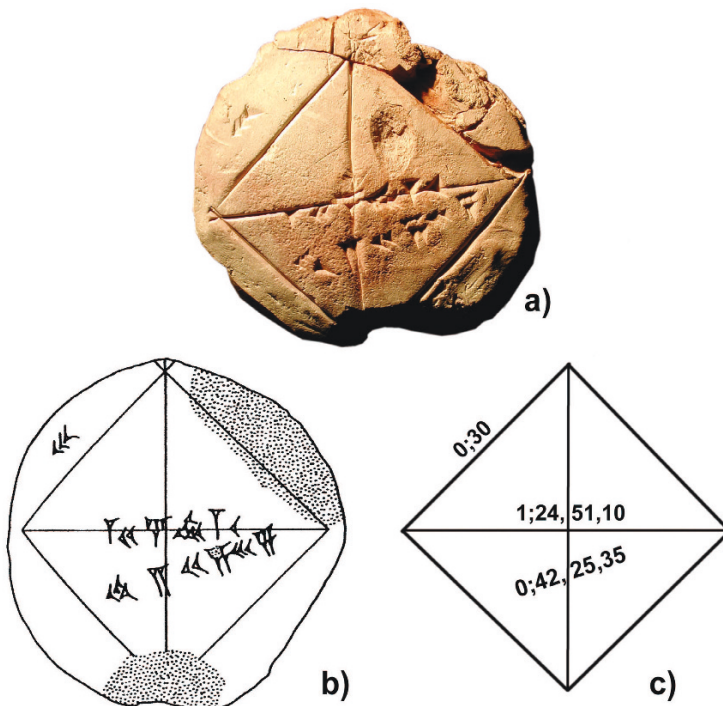


## 1.5 Babylonische Näherung an $\sqrt{2}$

In der *Yale Babylonian Collection* findet man unter der Archivnummer YBC 7289 eine Babylonische Keilschrifttafel, auf der die Länge der Diagonale eines Einheitsquadrates als Beispiel zum Satz des Pythagoras näherungsweise berechnet wird, vgl. [Alten et al. 2005, S. 41, Abb. 1.3.9], [Alten et al. 2014, S. 42, Abb. 1.3.9], s. Abb. 1.5.1. Die Tontafel wurde um das Jahr 1675 v. Chr. beschriftet. Transkribiert man die Keilschrift wie in Abb. 1.5.1, dann ergeben sich die Zahlen

$$\begin{aligned} a &:= 30 \\ b &:= 1, 24, 51, 10 \\ c &:= 42, 25, 35, \end{aligned}$$

die im Sexagesimalsystem, d. h. zur Basis 60 geschrieben sind. Es ist nicht ganz einfach, die richtige Stelle einer solchen Zahl zu finden, denn die Babylonier schrieben je nach Kontext entweder  $1, 2, 3 \equiv 1 \cdot 60^2 + 2 \cdot 60^1 + 3 \cdot 60^0 = 3723$



**Abb. 1.5.1.** Zur Berechnung von  $\sqrt{2}$ : a) Keilschrifttext YBC 7289 aus der Babylonischen Sammlung Yale, b) Reproduktion des Textes YBC 7289 nach Resnikoff, c) Schreibung dieses Textes mit indisch-arabischen Ziffern im Sexagesimalsystem

[Foto: William A. Casselman]



oder  $1, 2, 3 \equiv 1 \cdot 60^1 + 2 \cdot 60^0 + 3 \cdot 60^{-1} = 62.0166 \dots$ . Die Keilschriftexperten schreiben im ersten Fall 1, 2, 3 und im zweiten 1, 2; 3. Wenn man ein wenig in Sexagesimalzahlen rechnen kann, dann sieht man sofort, dass oben  $c = a \cdot b$  gilt. Interpretieren wir aber unsere obigen Zahlen als Seitenlänge  $a$  des Quadrats und als Länge der Diagonalen  $c$ , dann gilt nach dem Satz des Pythagoras  $c^2 = 2a^2$ , also  $c = \sqrt{2}a$ . Demnach müsste die Zahl  $b$  eine Näherung an  $\sqrt{2}$  sein, und in der Tat ist

$$1; 24, 51, 10 \equiv 1 \cdot 60^0 + 24 \cdot 60^{-1} + 51 \cdot 60^{-2} + 10 \cdot 60^{-3} = 1.414213$$

und das Quadrat  $(1; 24, 51, 10)^2 = 1; 59, 59, 59, 38, 1, 40$  ist sehr nahe bei 2, vgl. [Aaboe 1998]. Die Babylonier wussten also sehr genau, dass die Diagonale eines Quadrates das  $\sqrt{2}$ -fache der Seitenlänge ist und sie verfügten über hervorragende Näherungen für diesen Wert. Irrationale Zahlen wie  $\sqrt{2}$  sind für die Entwicklung der Analysis essentiell und es sind gerade diese Zahlen, die eine Analysis in den reellen Zahlen erst möglich machen. Wir haben keinerlei Hinweise auf ein tieferes Verständnis von irrationalen Zahlen im mesopotamischen Kulturraum und das ist auch kein Wunder, denn ein echtes Verständnis des Aufbaus der reellen Zahlen wird erst im ausgehenden 19. Jahrhundert erarbeitet.

Sollten damit die „3000 Jahre“ des Titels hinreichend begründet sein? Die Cheops-Pyramide entstand um 2600 v. Chr. Sollten wir den alten Ägyptern zugestehen, dass auch sie schon analytische Methoden zur Berechnung des Pyramidenvolumens hatten, dann wäre die Analysis etwa 5000 Jahre alt. Akzeptiert man, dass der eigentliche Beginn der Analysis (nach unserem heutigen Verständnis) wie so vieles in der griechischen Kultur zu suchen ist, dann ist die Entdeckung der Irrationalzahlen durch Hippasos von Metapont etwa um 500 v. Chr. sicher wichtig für die Analysis. Demnach wäre Analysis etwa 2500 Jahre alt. Die wahre Antwort auf die Altersfrage ist: Wir wissen es nicht! Aus diesem Grund haben wir uns als Kompromiss für 3000 Jahre entschieden.

3000 Jahre Analysis

Geschichte - Kulturen - Menschen

Sonar, Th.

2016, XXIV, 712 S. 383 Abb., 259 Abb. in Farbe.,

Hardcover

ISBN: 978-3-662-48917-8