

# Inhaltsverzeichnis

|          |                                                        |          |
|----------|--------------------------------------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>Elementarmathematik</b>                             | <b>1</b> |
| 1.1      | Nominale, ordinale und metrische Skalen                | 1        |
| 1.1.1    | Nominale Merkmale                                      | 2        |
| 1.1.2    | Ordinale Merkmale                                      | 3        |
| 1.1.3    | Metrische Merkmale                                     | 4        |
| 1.1.4    | Aufgaben                                               | 7        |
| 1.2      | Grundlegende Begriffe und Rechenoperationen            | 8        |
| 1.2.1    | Betrag, Vorzeichen, Intervall                          | 8        |
| 1.2.2    | Prozentsatz, Prozentwert, Grundwert                    | 8        |
| 1.2.3    | Potenzen                                               | 9        |
| 1.2.4    | Binomialkoeffizient                                    | 11       |
| 1.2.5    | Logarithmus                                            | 14       |
| 1.2.6    | Aufgaben                                               | 15       |
| 1.3      | Berechnungen im rechtwinkligen und allgemeinen Dreieck | 16       |
| 1.3.1    | Rechtwinkliges Dreieck                                 | 16       |
| 1.3.2    | Kosinussatz                                            | 18       |
| 1.3.3    | Aufgaben                                               | 19       |
| 1.4      | Rechnen mit fehlerbehafteten Zahlen                    | 20       |
| 1.4.1    | Absoluter und relativer Fehler                         | 20       |
| 1.4.2    | Fehlerfortpflanzung                                    | 21       |
| 1.4.3    | Aufgaben                                               | 23       |
| 1.5      | Gleichungen mit einer Variablen                        | 24       |
| 1.5.1    | Gleichungen als Instrumente der Modellbildung          | 24       |
| 1.5.2    | Algebraische Gleichungen                               | 26       |
| 1.5.3    | Exponentialgleichungen                                 | 27       |
| 1.5.4    | Aufgaben                                               | 28       |
| 1.6      | Komplexe Zahlen                                        | 29       |
| 1.6.1    | Komponentenform                                        | 29       |
| 1.6.2    | Trigonometrische Form                                  | 31       |
| 1.6.3    | Aufgaben                                               | 33       |

|          |                                                            |           |
|----------|------------------------------------------------------------|-----------|
| 1.7      | Permutationen und Kombinationen                            | 33        |
| 1.7.1    | Multiplikationsformel                                      | 33        |
| 1.7.2    | Permutationen                                              | 34        |
| 1.7.3    | Kombinationen                                              | 35        |
| 1.7.4    | Aufgaben                                                   | 36        |
| 1.8      | Wahrscheinlichkeitsrechnung                                | 36        |
| 1.8.1    | Begriff der Wahrscheinlichkeit                             | 36        |
| 1.8.2    | Bedingte Wahrscheinlichkeit und Formel von Bayes           | 40        |
| 1.8.3    | Aufgaben                                                   | 44        |
| 1.9      | Ergänzungen                                                | 44        |
| 1.9.1    | Gleitende Durchschnitte                                    | 44        |
| 1.9.2    | Mittlere Lebenserwartung                                   | 46        |
| 1.9.3    | Pascalsches Dreieck                                        | 49        |
| 1.9.4    | Binomischer Lehrsatz                                       | 49        |
| 1.9.5    | Summensätze für den Sinus und Kosinus                      | 50        |
| <b>2</b> | <b>Funktionen</b>                                          | <b>53</b> |
| 2.1      | Lineare Funktionen                                         | 53        |
| 2.1.1    | Von der Beobachtung zur Funktion                           | 53        |
| 2.1.2    | Geradengleichungen                                         | 55        |
| 2.1.3    | Regressionsgeraden                                         | 58        |
| 2.1.4    | Aufgaben                                                   | 63        |
| 2.2      | Potenzfunktionen                                           | 63        |
| 2.2.1    | Allometrie                                                 | 63        |
| 2.2.2    | Linearisierung durch doppelt-logarithmische Transformation | 65        |
| 2.2.3    | Gebrochen lineare Funktionen                               | 68        |
| 2.2.4    | Quadratische Polynome                                      | 71        |
| 2.2.5    | Aufgaben                                                   | 73        |
| 2.3      | Exponential- und Logarithmusfunktionen                     | 74        |
| 2.3.1    | Exponentialfunktionen                                      | 74        |
| 2.3.2    | Linearisierung durch einfach-logarithmische Transformation | 76        |
| 2.3.3    | Logistisches Wachstum                                      | 79        |
| 2.3.4    | Logarithmusfunktionen                                      | 84        |
| 2.3.5    | Aufgaben                                                   | 86        |
| 2.4      | Sinusförmige Veränderungen                                 | 87        |
| 2.4.1    | Die allgemeine Sinusfunktion                               | 87        |
| 2.4.2    | Überlagerung von Sinusschwingungen                         | 91        |
| 2.4.3    | Kurvenanpassung bei periodischen Daten                     | 92        |
| 2.4.4    | Aufgaben                                                   | 94        |
| 2.5      | Wahrscheinlichkeitsfunktionen                              | 95        |
| 2.5.1    | Diskrete Zufallsvariable                                   | 95        |
| 2.5.2    | Binomialverteilung                                         | 96        |
| 2.5.3    | Hypergeometrische Verteilung                               | 99        |

|          |                                                                                  |            |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 2.5.4    | Kennzahlen der Wahrscheinlichkeitsfunktion . . . . .                             | 101        |
| 2.5.5    | Aufgaben . . . . .                                                               | 102        |
| 2.6      | Dichtefunktionen . . . . .                                                       | 103        |
| 2.6.1    | Stetige Zufallsvariable . . . . .                                                | 103        |
| 2.6.2    | Normalverteilung . . . . .                                                       | 105        |
| 2.6.3    | Aufgaben . . . . .                                                               | 109        |
| 2.7      | Ergänzungen . . . . .                                                            | 110        |
| 2.7.1    | Berechnung der Parameter der Regressionsgeraden . . . . .                        | 110        |
| 2.7.2    | Regressionsgerade durch den Nullpunkt . . . . .                                  | 111        |
| 2.7.3    | Exponentielle Annäherung an einen Gleichgewichtswert . . . . .                   | 112        |
| 2.7.4    | Mittelwert und Varianz einer $B_{n,p}$ -verteilten<br>Zufallsvariablen . . . . . | 114        |
| <b>3</b> | <b>Matrizen . . . . .</b>                                                        | <b>115</b> |
| 3.1      | Begriff der Matrix . . . . .                                                     | 115        |
| 3.1.1    | Bezeichnungen . . . . .                                                          | 115        |
| 3.1.2    | Merkmalsraum . . . . .                                                           | 116        |
| 3.1.3    | Objektraum . . . . .                                                             | 119        |
| 3.1.4    | Aufgaben . . . . .                                                               | 121        |
| 3.2      | Rechenoperationen mit Vektoren und Matrizen . . . . .                            | 121        |
| 3.2.1    | Addition . . . . .                                                               | 121        |
| 3.2.2    | Skalarprodukt von Vektoren . . . . .                                             | 124        |
| 3.2.3    | Matrizenprodukt . . . . .                                                        | 128        |
| 3.2.4    | Aufgaben . . . . .                                                               | 132        |
| 3.3      | Lineare Gleichungssysteme . . . . .                                              | 134        |
| 3.3.1    | Substitutionsmethode . . . . .                                                   | 134        |
| 3.3.2    | Determinanten . . . . .                                                          | 136        |
| 3.3.3    | Inverse Matrix . . . . .                                                         | 138        |
| 3.3.4    | Aufgaben . . . . .                                                               | 142        |
| 3.4      | Lineare Optimierung . . . . .                                                    | 142        |
| 3.4.1    | Das Maximum-Problem der linearen Optimierung . . . . .                           | 142        |
| 3.4.2    | Der Simplexalgorithmus . . . . .                                                 | 146        |
| 3.4.3    | Duale Optimierungsprobleme . . . . .                                             | 150        |
| 3.4.4    | Aufgaben . . . . .                                                               | 153        |
| 3.5      | Diagonalisierung von symmetrischen Matrizen . . . . .                            | 153        |
| 3.5.1    | Orthogonale Matrizen . . . . .                                                   | 153        |
| 3.5.2    | Eigenwerte und Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix . . . . .                | 156        |
| 3.5.3    | Spektralzerlegung einer symmetrischen Matrix . . . . .                           | 161        |
| 3.5.4    | Quadratische Formen . . . . .                                                    | 166        |
| 3.5.5    | Hauptkomponentenanalyse . . . . .                                                | 170        |
| 3.5.6    | Aufgaben . . . . .                                                               | 176        |
| 3.6      | Markov-Ketten . . . . .                                                          | 177        |
| 3.6.1    | Übergangsmatrix und Zustandsverteilung . . . . .                                 | 177        |
| 3.6.2    | Stationäre Zustandsverteilungen . . . . .                                        | 184        |

|          |                                                                                |     |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.6.3    | Hidden Markov-Modelle                                                          | 188 |
| 3.6.4    | Aufgaben                                                                       | 192 |
| 3.7      | Ergänzungen                                                                    | 193 |
| 3.7.1    | Numerische Klassifikation                                                      | 193 |
| 3.7.2    | Quadratische Interpolation                                                     | 195 |
| 3.7.3    | Eigenschaften der Eigenwerte von symmetrischen Matrizen                        | 196 |
| 3.7.4    | Approximation einer $n \times p$ - Datenmatrix mit $m < p$<br>Hauptkomponenten | 198 |
| 3.7.5    | Interpretation der Hauptkomponenten                                            | 200 |
| 3.7.6    | Der Vorwärts-Algorithmus                                                       | 202 |
| <b>4</b> | <b>Differenzieren und Integrieren</b>                                          | 207 |
| 4.1      | Zahlenfolgen                                                                   | 207 |
| 4.1.1    | Diskrete Prozesse                                                              | 207 |
| 4.1.2    | Lineare Differenzengleichungen erster Ordnung                                  | 211 |
| 4.1.3    | Konvergente und divergente Folgen                                              | 213 |
| 4.1.4    | Grenzwert von Funktionen                                                       | 217 |
| 4.1.5    | Aufgaben                                                                       | 219 |
| 4.2      | Der Differentialquotient                                                       | 220 |
| 4.2.1    | Begriff der Ableitung                                                          | 220 |
| 4.2.2    | Ableitungsregeln                                                               | 227 |
| 4.2.3    | Aufgaben                                                                       | 234 |
| 4.3      | Beschreibung von Funktionen mit Hilfe der Ableitung                            | 235 |
| 4.3.1    | Lokale Approximation durch Polynome                                            | 235 |
| 4.3.2    | Lineare Approximation                                                          | 236 |
| 4.3.3    | Näherungsparabeln                                                              | 242 |
| 4.3.4    | Lokale Extremwerte                                                             | 246 |
| 4.3.5    | Aufgaben                                                                       | 248 |
| 4.4      | Bestimmtes und unbestimmtes Integral                                           | 249 |
| 4.4.1    | Das Flächeninhaltsproblem                                                      | 249 |
| 4.4.2    | Stammfunktionen                                                                | 253 |
| 4.4.3    | Integrationsregeln                                                             | 255 |
| 4.4.4    | Aufgaben                                                                       | 260 |
| 4.5      | Differentialgleichungen                                                        | 261 |
| 4.5.1    | Modellbildung mit Differentialgleichungen                                      | 261 |
| 4.5.2    | Lösung von Differentialgleichungen durch Trennung der<br>Variablen             | 265 |
| 4.5.3    | Linear-inhomogene Differentialgleichungen erster Ordnung                       | 269 |
| 4.5.4    | Die Schwingungsgleichung                                                       | 272 |
| 4.5.5    | Numerische Lösung von Differentialgleichungen                                  | 279 |
| 4.5.6    | Aufgaben                                                                       | 284 |
| 4.6      | Ergänzungen                                                                    | 286 |
| 4.6.1    | Geometrische Iteration                                                         | 286 |
| 4.6.2    | Interpolation mit natürlichen kubischen Splines                                | 289 |

|          |                                                                                                                        |            |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 4.6.3    | Bernoullis Plädoyer für die Pockenimpfung: Eine historische Anwendung der logistischen Differentialgleichung . . . . . | 292        |
| 4.6.4    | Qualitative Diskussion von nichtlinearen Differentialgleichungssystemen . . . . .                                      | 294        |
| <b>5</b> | <b>Schätzen und Testen</b> . . . . .                                                                                   | <b>303</b> |
| 5.1      | Datenbeschreibung . . . . .                                                                                            | 303        |
| 5.1.1    | Grundgesamtheit und Stichprobe . . . . .                                                                               | 303        |
| 5.1.2    | Lage- und Streuungsmaße . . . . .                                                                                      | 304        |
| 5.1.3    | Histogrammschätzer . . . . .                                                                                           | 307        |
| 5.1.4    | Aufgaben . . . . .                                                                                                     | 309        |
| 5.2      | Parameterschätzung bei normalverteilter Grundgesamtheit . . . . .                                                      | 310        |
| 5.2.1    | Stichprobenmittel und Stichprobenvarianz . . . . .                                                                     | 310        |
| 5.2.2    | Konfidenzintervalle für den Mittelwert und die Varianz . . . . .                                                       | 313        |
| 5.2.3    | Konfidenzintervall für den Anstieg einer Regressionsgeraden . . . . .                                                  | 319        |
| 5.2.4    | Aufgaben . . . . .                                                                                                     | 322        |
| 5.3      | Vergleich eines Mittelwerts mit einem Sollwert . . . . .                                                               | 323        |
| 5.3.1    | Der 1-Stichproben $t$ -Test für 2-seitige Hypothesen . . . . .                                                         | 323        |
| 5.3.2    | Gütefunktion des 2-seitigen $t$ -Tests . . . . .                                                                       | 326        |
| 5.3.3    | Der 1-Stichproben $t$ -Test für 1-seitige Hypothesen . . . . .                                                         | 330        |
| 5.3.4    | Aufgaben . . . . .                                                                                                     | 332        |
| 5.4      | Überprüfung der Normalverteilungsannahme . . . . .                                                                     | 333        |
| 5.4.1    | Normal- $Q$ - $Q$ -Plots . . . . .                                                                                     | 333        |
| 5.4.2    | Schiefe und Kurtosis . . . . .                                                                                         | 337        |
| 5.4.3    | Der Shapiro-Wilk-Test . . . . .                                                                                        | 339        |
| 5.4.4    | Aufgaben . . . . .                                                                                                     | 341        |
| 5.5      | Unterschiedshypothesen mit zwei Mittelwerten . . . . .                                                                 | 342        |
| 5.5.1    | Mittelwertvergleiche mit unabhängigen Stichproben . . . . .                                                            | 342        |
| 5.5.2    | Der Welch-Test . . . . .                                                                                               | 343        |
| 5.5.3    | Der 2-Stichproben $t$ -Test . . . . .                                                                                  | 350        |
| 5.5.4    | Der $t$ -Test für abhängige Stichproben . . . . .                                                                      | 354        |
| 5.5.5    | Aufgaben . . . . .                                                                                                     | 357        |
| 5.6      | Vergleiche mit Wahrscheinlichkeiten . . . . .                                                                          | 358        |
| 5.6.1    | Der $P$ -Wert des exakten Binomialtests . . . . .                                                                      | 358        |
| 5.6.2    | Näherungsweise Bestimmung der Gütefunktion des Binomialtests . . . . .                                                 | 361        |
| 5.6.3    | Konfidenzintervall für eine Wahrscheinlichkeit . . . . .                                                               | 363        |
| 5.6.4    | Vergleich von zwei Wahrscheinlichkeiten . . . . .                                                                      | 365        |
| 5.6.5    | Aufgaben . . . . .                                                                                                     | 374        |
| 5.7      | Ergänzungen . . . . .                                                                                                  | 374        |
| 5.7.1    | Ergänzungen zum 1-Stichproben $t$ -Test . . . . .                                                                      | 374        |
| 5.7.2    | Ein Algorithmus zur Berechnung der Testgröße und des $P$ -Werts des Shapiro-Wilk-Tests . . . . .                       | 375        |

|          |                                                    |            |
|----------|----------------------------------------------------|------------|
| 5.7.3    | Überprüfung der Varianzhomogenität                 | 377        |
| 5.7.4    | Ergänzungen zum Binomialtest                       | 382        |
| <b>6</b> | <b>Anhang A: R-Kompendium</b>                      | <b>385</b> |
| 6.1      | Installation und Arbeitsumgebung                   | 385        |
| 6.2      | Konstante, Variable und Ausdrücke                  | 389        |
| 6.3      | Funktionen                                         | 392        |
| 6.4      | Vektoren, Matrizen und Datensätze                  | 394        |
| 6.5      | Diagramme                                          | 401        |
| 6.6      | Beispiele zur Programmierung                       | 405        |
| 6.7      | Glossar der verwendeten R-Befehle und R-Funktionen | 408        |
| <b>7</b> | <b>Anhang B: Lösungen der Aufgaben</b>             | <b>417</b> |
| 7.1      | Elementarmathematik                                | 417        |
| 7.2      | Funktionen                                         | 421        |
| 7.3      | Matrizen                                           | 424        |
| 7.4      | Differenzieren und Integrieren                     | 430        |
| 7.5      | Schätzen und Testen                                | 435        |
|          | <b>Literatur</b>                                   | <b>447</b> |
|          | <b>Sachverzeichnis</b>                             | <b>449</b> |

Mathematische Methoden in den Biowissenschaften

Eine Einführung mit R

Timischl, W.

2016, XIV, 456 S. 110 Abb.,

ISBN: 978-3-662-48952-9