

In Kap. 1 haben wir eine allgemeine Lösung des elektrostatischen Problems, zu einer gegebenen statischen Ladungsverteilung das Potenzial (und über Gradientenbildung auch das elektrische Feld) zu berechnen, gesehen: Das Lösen der Poisson-Gleichung (1.10) kann auf die Berechnung des Integrals (1.12) zurückgeführt werden.

Allerdings kann dieses Integral nur in wenigen Spezialfällen analytisch ausgewertet werden (vgl. dazu auch Aufgabe 1.4). In praktisch allen „interessanten“, sprich: realitätsnahen, Beispielen muss man sich mit Näherungslösungen zufrieden geben – wie in der theoretischen Physik allgemein üblich ...

Ein wichtiges Standardnäherungsverfahren der Elektrostatik ist die sogenannte *Multipolentwicklung*. Warum die so heißt, wird im Laufe dieses Kapitels halbwegs klar werden; so richtig geklärt wird das aber erst in Abschn. 8.1. Neben einem näherungsweise gültigen Ausdruck für das Potenzial werden wir damit auch Näherungen für die Energie einer Ladungsverteilung sowie die Kraft und das Drehmoment darauf gewinnen.

## 2.1 Eine Näherung für das Potenzial

Die wesentliche Voraussetzung für diese Näherung ist, dass man sich das Potenzial „weit entfernt“ von einer (endlichen) Ladungsverteilung anschaut. Genauer: Der Abstand des Beobachters zur Ladungsverteilung, die sich rund um den Ursprung des Koordinatensystems befindet, sei viel größer als ihre Ausdehnung. Im Integral

$$\int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

ist also  $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'|$ . („Viel größer“ ist natürlich recht schwammig formuliert, nicht mathematisch präzise. Will man das genauer haben, so muss man untersuchen, wie groß der Fehler der Näherung jeweils für ein vorgegebenes Verhältnis von  $r$  zu  $r'$  ist. Das diskutieren wir hier nicht näher aus.)

Die Multipolentwicklung besteht nun letztlich einfach darin, dass man den Bruch

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

unter der Voraussetzung  $r \gg r'$  in eine Potenzreihe entwickelt. Das ist mathematisch eigentlich nicht schwierig – nur etwas aufwendig ...

### 2.1.1 Entwickeln wir den Bruch

Zunächst schreiben wir mal ausführlich hin, was mit dem Betrag im Nenner eigentlich gemeint ist:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\mathbf{r} \circ \mathbf{r}' + r'^2}}.$$

Um die Bedingung  $r \gg r'$  ausnutzen zu können, ziehen wir nun das  $r^2$  aus der Wurzel raus; es bleibt

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{\mathbf{e}_r \circ \mathbf{r}'}{r} + \frac{r'^2}{r^2}}}.$$

Unter der Wurzel steht nun eins plus zwei Terme, die wegen  $r \gg r'$  beide sicher sehr viel kleiner als eins sind. Deshalb können wir den Bruch nun in eine Potenzreihe entwickeln. Wir verwenden dafür die Taylor-Entwicklung

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots$$

um  $x = 0$  bis zur zweiten Ordnung in  $x$  (nachrechnen!). Wir könnten natürlich noch höhere Ordnungen berücksichtigen, aber um das grundsätzliche Prinzip zu veranschaulichen, genügen die ersten zwei – höhere Ordnungen machen die Rechnungen nur unübersichtlicher, aber man lernt nichts grundsätzlich Neues dabei. Es folgt

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{\mathbf{e}_r \circ \mathbf{r}'}{r} - \frac{1}{2} \frac{r'^2}{r^2} + \frac{3}{2} \frac{(\mathbf{e}_r \circ \mathbf{r}')^2}{r^2} + \dots \right),$$

wobei wir nur Summanden bis zur zweiten Ordnung in  $r'/r$  mitnehmen. Der dritte und vierte Summand in der Klammer sind beide von derselben Ordnung in  $r'/r$ , also fassen wir sie noch zusammen, und multiplizieren die Klammer aus:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{e}_r \circ \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{3(\mathbf{e}_r \circ \mathbf{r}')^2 - r'^2}{r^3} + \dots \quad (2.1)$$

Damit haben wir die Entwicklung des Bruchs nach Potenzen von  $r'/r$  bis zur zweiten Ordnung.

Dieses Ergebnis kann man aber noch ein wenig hübscher hinschreiben: Der erste Summand hängt nur noch von  $r$  ab, im zweiten Summanden hat man ein Produkt aus einem Term, der nur von  $r$  abhängt, und aus  $r'$ . Es stellt sich die naheliegende Frage, ob man auch den dritten Summanden als ein Produkt aus einem Term (oder mehreren), der nur von  $r$  abhängt, und einem, der nur von  $r'$  abhängt, formulieren kann.

Dafür schreiben wir das Quadrat des Skalarprodukts in diesem Term mal ausführlicher:

$$(\mathbf{e}_r \circ \mathbf{r}')^2 = (\mathbf{e}_r \circ \mathbf{r}')(\mathbf{r}' \circ \mathbf{e}_r) = (\mathbf{e}_r^\top \mathbf{r}') (\mathbf{r}'^\top \mathbf{e}_r),$$

wobei die Produkte zwischen den Spalten- und Zeilenvektoren jeweils als Matrixmultiplikationen aufzufassen sind. Nutzen wir aus, dass die Matrixmultiplikation assoziativ ist, so folgt

$$(\mathbf{e}_r \circ \mathbf{r}')^2 = \mathbf{e}_r^\top (\mathbf{r}' \mathbf{r}'^\top) \mathbf{e}_r =: \mathbf{e}_r^\top \mathbf{R}' \mathbf{e}_r,$$

wobei abkürzend die Matrix  $\mathbf{R}' = \mathbf{r}' \mathbf{r}'^\top$  definiert wurde.

(In den meisten Lehrbüchern findet man diese Rechnung in Komponenten – ich finde sie so, wie ich sie gezeigt habe, übersichtlicher und klarer. Aber der Vollständigkeit halber auch noch in Komponenten: Die linke Seite ist

$$(\mathbf{e}_r \circ \mathbf{r}')^2 = \left( \sum_{i=1}^3 e_{r,i} x'_i \right)^2 = \sum_{i,j=1}^3 e_{r,i} x'_i e_{r,j} x'_j,$$

die rechte ist

$$\mathbf{e}_r^\top \mathbf{R}' \mathbf{e}_r = \sum_{i,j=1}^3 e_{r,i} x'_i x'_j e_{r,j},$$

was offensichtlich dasselbe ist.)

Außerdem haben wir in der Entwicklung (2.1) in der zweiten Ordnung auch noch einen Summanden mit  $r'^2$ . Auch diesen kann man in die Form „ $\mathbf{e}_r^\top$  mal Matrix mal  $\mathbf{e}_r$ “ umschreiben – indem man einfach die Einheitsmatrix verwendet:

$$r'^2 = r'^2 \mathbf{e}_r^2 = r'^2 \mathbf{e}_r^\top \mathbf{I} \mathbf{e}_r.$$

Mit  $\mathbf{X}' := 3\mathbf{R}' - r'^2 \mathbf{I}$  erhalten wir dann schließlich

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{e}_r \circ \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{e}_r^\top \mathbf{X}' \mathbf{e}_r}{r^3} + \dots$$

Das sieht schon deutlich übersichtlicher aus als (2.1); der letzte Summand ist nun wie gewünscht als Produkt geschrieben.

### 2.1.2 Das hilft jetzt bei der Berechnung des Potenzials!

Setzen wir das Ergebnis in die Integrallösung (1.12) der Poisson-Gleichung ein:

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}) &= \int \rho(\mathbf{r}') \left( \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{e}_r \circ \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{e}_r^\top \mathbf{X}' \mathbf{e}_r}{r^3} \right) dV' + \dots \\ &= \frac{\int \rho(\mathbf{r}') dV'}{r} + \frac{\mathbf{e}_r \circ \int \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' dV'}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{e}_r^\top \left( \int \rho(\mathbf{r}') \mathbf{X}' dV' \right) \mathbf{e}_r}{r^3} + \dots\end{aligned}$$

Das erste Integral erkennt ihr hoffentlich sofort als die Gesamtladung  $q$  (die man manchmal auch als *Monopolmoment* bezeichnet), das zweite kennt ihr vielleicht auch schon aus anderen Vorlesungen – es wird als das *elektrische Dipolmoment* der Ladungsverteilung bezeichnet und meist mit  $\mathbf{p}$  abgekürzt (ich fände  $\mathbf{d}$  logischer, ist aber leider nicht üblich):

$$\mathbf{p} := \int \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' dV'. \quad (2.2)$$

Das dritte Integral schließlich definiert das sogenannte *Quadrupolmoment*:

$$\mathbf{Q} := \int \rho(\mathbf{r}') \mathbf{X}' dV' = \int \rho(\mathbf{r}') (3\mathbf{r}' \mathbf{r}'^\top - r'^2 \mathbf{I}) dV'. \quad (2.3)$$

Es ist eine Matrix mit den Komponenten

$$Q_{ij} = \int \rho(\mathbf{r}') (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) dV',$$

also in kartesischen Koordinaten ausführlich:

$$\mathbf{Q} = \int \rho(\mathbf{r}') \begin{pmatrix} 2x'^2 - y'^2 - z'^2 & 3x'y' & 3x'z' \\ 3y'x' & 2y'^2 - x'^2 - z'^2 & 3y'z' \\ 3z'x' & 3z'y' & 2z'^2 - x'^2 - y'^2 \end{pmatrix} dV'.$$

Insgesamt haben wir nun das Ergebnis

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{r} + \frac{\mathbf{e}_r \circ \mathbf{p}}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{e}_r^\top \mathbf{Q} \mathbf{e}_r}{r^3} + \dots \quad (2.4)$$

Mit jedem Summanden steigt die inverse Potenz von  $r$  an – für große Abstände werden die hinteren Summanden also immer unwichtiger. Die Gesamtladung  $q$  (ein Skalar, also ein Tensor nullter Stufe) bestimmt das Potenzial für sehr große Abstände – was auch logisch ist, denn von weit weg sieht jede (endliche) Ladungsverteilung praktisch wie eine Punktladung aus. Erst wenn man dichter dran ist, kann man erkennen, dass die Ladungsverteilung ausgedehnt ist, was durch das Dipolmoment beschrieben wird – einen Vektor (ein Tensor erster Stufe), dessen Richtung uns anschaulich angibt, in welcher Richtung die Ladungsverteilung am meisten polarisiert ist. Bei noch größerer Annäherung braucht man schließlich das Quadrupolmoment – eine Matrix (ein Tensor zweiter Stufe), die anschaulich beschreibt, wie stark die Ladungsverteilung von der durch  $\mathbf{p}$  gegebenen „Haupttrichtung“ abweicht. Insbesondere für eine um den Ursprung sphärisch symmetrische Ladungsverteilung verschwinden Dipol- und Quadrupolmoment immer (s. Aufgabe 2.2).

Einige Anmerkungen sind noch zu machen:

- Oft spricht man statt vom Dipolmoment einer Ladungsverteilung auch einfach nur von einem Dipol. Damit ist eine Ladungsverteilung gemeint, deren Gesamtladung verschwindet, die aber ein nichtverschwindendes Dipolmoment hat. Meist ist sogar ein sogenannter *reiner* Dipol gemeint, d. h. eine Ladungsverteilung, bei der (näherungsweise) alle Multipolmomente außer dem Dipolmoment verschwinden.
- Verschiedene Autoren verwenden oft leicht unterschiedliche Definitionen des Quadrupolmoments (beispielsweise wird manchmal ein Faktor drei weggelassen); die Formel (2.4) sieht dann auch jeweils leicht unterschiedlich aus.
- Zur Potenz  $r^{-\ell-1}$  gehört hier immer ein Tensor der Stufe  $\ell$ . Dies kann man auch auf höhere Ordnungen verallgemeinern, was wir hier aber nicht explizit vorführen. Ein wenig werden wir dazu später noch in Abschn. 8.1 sehen.
- Als  $3 \times 3$ -Matrix hat  $\mathbf{Q}$  neun Komponenten, und jede davon ist ein Integral. Das sieht erst mal nach ziemlich einem großen Rechenaufwand aus. Allerdings ist  $\mathbf{Q}$  offensichtlich symmetrisch – damit bleiben nur noch sechs unabhängige Komponenten. Außerdem kann man durch direkte Berechnung zeigen, dass  $\mathbf{Q}$  die Spur null hat – es bleiben fünf unabhängige Komponenten. Wie wir in den Beispielen und den Aufgaben sehen werden, kann man außerdem oft rein durch Symmetrieüberlegungen begründen, dass einige Komponenten von  $\mathbf{Q}$  verschwinden müssen.
- Der Begriff „Moment“ hat hier natürlich nichts mit einer Zeitdauer zu tun, sondern wird ähnlich verwendet wie in der Mechanik beim Trägheitsmoment oder in der Stochastik bei den Momenten einer Wahrscheinlichkeitsverteilung: Es handelt sich letztlich um Kenngrößen, welche die Lage und Form einer Verteilung beschreiben und als Integrale über das Produkt einer Potenz der entsprechenden Variable und der entsprechenden Verteilung definiert sind. Der Begriff hat sich historisch entwickelt: Der Begriff „Drehmoment“ kam wohl als Erstes auf und bezeichnet bekanntlich das (Vektor-) Produkt aus dem Abstand zur Drehachse und der angreifenden Kraft. (Daher

stammt der Begriff: „Momentum“ heißt auf lateinisch in etwa „Bewegung, Grund, Einfluss“.) Schreibt man dies verallgemeinert als ein Integral über das Produkt aus dem Abstandsvektor und der Kraftdichte, so hat man nach heutiger Bezeichnung ein erstes Moment der Kraftdichte berechnet.

- Das Dipolmoment hat offensichtlich die Dimension „Ladung mal Länge“, das Quadrupolmoment die Dimension „Ladung mal Länge zum Quadrat“. Man sieht leicht ein, dass mit jedem weiteren Term in der Entwicklung, also mit jedem weiteren Moment, jeweils eine Potenz der Länge hinzukommt. Das kann eine gute Hilfe sein, um zu überprüfen, ob das Ergebnis einer Berechnung plausibel ist.
- Für jedes Multipolmoment ist jeweils ein Integral zu berechnen, das nun nur noch von  $\mathbf{r}'$  abhängige Terme enthält; die Abhängigkeit von  $\mathbf{r}$  steht jeweils außerhalb der Integrale. Diese Integrale sind deshalb im Allgemeinen deutlich einfacher zu berechnen als das Integral in (1.12) – allerdings hat man damit eben nur eine Näherungslösung, im Gegensatz zur exakten Lösung (1.12). Die Näherung kann man zwar verbessern, indem man mehr Terme in der Entwicklung mitnimmt, aber dann sind natürlich wieder mehr Integrale zu berechnen. Andererseits kann auch die exakte Lösung (1.12) in den meisten Fällen nur numerisch ausgewertet werden, was dann für jeden interessierenden Wert von  $\mathbf{r}$  jeweils die Auswertung des Integrals verlangt – also muss man auch bei der exakten Lösung im Allgemeinen sehr viele Integrale berechnen. Letztlich hängt es sowohl von der konkreten Fragestellung (z. B. Potenzial überall oder nur in großem Abstand) als auch von der funktionalen Form von  $\rho(\mathbf{r})$  ab, ob es sinnvoller ist, die exakte Lösung oder die hier vorggeführte Näherungslösung zu verwenden.

### 2.1.3 Beispiele

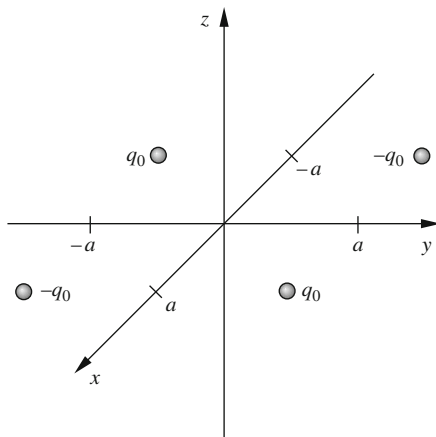
Im Folgenden betrachten wir zwei Beispiele: Zunächst eine Ansammlung von Punktladungen, gefolgt von einer halbwegs realistischen homogenen Ladungsverteilung.

#### Beispiel 2.1: Punktladungen an Quadratecken

An den Ecken eines Quadrats mit Seitenlänge  $2a$  in der  $x$ - $y$ -Ebene, dessen Mittelpunkt der Ursprung ist, sollen sich abwechselnd Punktladungen der Größe  $q_0$  bzw.  $-q_0$  befinden (vgl. Abb. 2.1):

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{r}) &= q_0 \delta(x-a) \delta(y-a) \delta(z) - q_0 \delta(x+a) \delta(y-a) \delta(z) \\ &\quad + q_0 \delta(x+a) \delta(y+a) \delta(z) - q_0 \delta(x-a) \delta(y+a) \delta(z) \\ &= q_0 [\delta(x-a) - \delta(x+a)] [\delta(y-a) - \delta(y+a)] \delta(z).\end{aligned}$$

**Abb. 2.1** Ladungsverteilung, deren Multipolentwicklung in Beispiel 2.1 bestimmt wird: vier Punktladungen mit jeweils abwechselnden Vorzeichen an den Ecken eines Quadrats



Für diese Ladungsverteilung kann man natürlich leicht auch das exakte Potenzial angeben, einfach als Summe der Potenziale der einzelnen Punktladungen:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) = & \frac{q_0}{|\mathbf{r} - (a, a, 0)^\top|} - \frac{q_0}{|\mathbf{r} - (-a, a, 0)^\top|} \\ & + \frac{q_0}{|\mathbf{r} - (-a, -a, 0)^\top|} - \frac{q_0}{|\mathbf{r} - (a, -a, 0)^\top|}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Hier soll uns aber nicht das exakte Ergebnis interessieren, sondern eben nur, wie diese Ladungsverteilung „von Weitem“ aussieht. Berechnen wir also der Reihe nach die Momente der Ladungsverteilung.

Das „nullte“ Moment ist die Gesamtladung. Diese ist offensichtlich gleich null – was sich natürlich auch aus dem Integral ergibt:

$$\begin{aligned} q &= \int \rho(\mathbf{r}') dV' = q_0 \cdot \int [\delta(x' - a) - \delta(x' + a)] dx' \\ &\quad \cdot \int [\delta(y' - a) - \delta(y' + a)] dy' \cdot \int \delta(z') dz' \\ &= q_0 \cdot (1 - 1) \cdot (1 - 1) \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Als Nächstes kommt das Dipolmoment. Zunächst die  $x$ -Komponente:

$$\begin{aligned} p_1 &= \int \rho(\mathbf{r}') x' dV' = q_0 \cdot \int [\delta(x' - a) - \delta(x' + a)] x' dx' \\ &\quad \cdot \int [\delta(y' - a) - \delta(y' + a)] dy' \cdot \int \delta(z') dz' \\ &= q_0 \cdot (a - (-a)) \cdot (1 - 1) \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Ebenso folgt  $p_2 = 0$ , und wegen  $z'\delta(z') = 0$  erhalten wir auch  $p_3 = 0$ . Das Dipolmoment dieser Ladungsverteilung verschwindet also auch. (Anschaulich: Man kann das gesamte Dipolmoment als die Summe zweier Dipolmomente in  $x$ -Richtung betrachten, das eine bei  $y = a$ , das andere bei  $y = -a$ . Diese beiden Dipolmomente sind aber entgegengesetzt gleich groß, also verschwindet die Summe.)

Es bleibt das Quadrupolmoment zu berechnen. In den Diagonalelementen der Matrix hat man Quadrate der Koordinaten; berechnen wir deshalb zunächst das Integral der Ladungsverteilung, multipliziert mit  $x^2$ :

$$\begin{aligned} \int \rho(\mathbf{r}') x'^2 dV' &= q_0 \cdot \int [\delta(x' - a) - \delta(x' + a)] x'^2 dx' \\ &\quad \cdot \int [\delta(y' - a) - \delta(y' + a)] dy' \cdot \int \delta(z') dz' \\ &= q_0 \cdot (a^2 - (-a)^2) \cdot (1 - 1) \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Ebenso folgt, dass das Integral mit  $y^2$  verschwindet, und ähnlich auch, dass das Integral mit  $z^2$  verschwindet. Die Diagonalelemente von  $\mathbf{Q}$  sind hier deshalb alle gleich null. Bei den Nicht-Diagonalelementen folgt mit einer ganz ähnlichen Rechnung, dass alle Einträge verschwinden, die ein  $z$  enthalten, also  $Q_{13} = Q_{31} = Q_{23} = Q_{32} = 0$ . Die einzigen nichtverschwindenden Matrixelemente sind

$$\begin{aligned} Q_{12} &= Q_{21} = \int \rho(\mathbf{r}') 3x'y' dV' = 3q_0 \cdot \int [\delta(x' - a) - \delta(x' + a)] x' dx' \\ &\quad \cdot \int [\delta(y' - a) - \delta(y' + a)] y' dy' \cdot \int \delta(z') dz' \\ &= 3q_0 \cdot (a - (-a)) \cdot (a - (-a)) \cdot 1 = 12a^2 q_0. \end{aligned}$$

Zusammengefasst haben wir:

$$q = 0; \quad \mathbf{p} = 0; \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 12a^2 q_0 & 0 \\ 12a^2 q_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für das Potenzial brauchen wir noch das Produkt der Matrix  $\mathbf{Q}$  von links und rechts mit dem Einheitsvektor in radialer Richtung:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r^\top \mathbf{Q} \mathbf{e}_r &= (x/r, y/r, 0) \begin{pmatrix} 0 & 12a^2 q_0 & 0 \\ 12a^2 q_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x/r \\ y/r \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{12a^2 q_0}{r^2} (x, y, 0) \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{24a^2 q_0 xy}{r^2}. \end{aligned}$$

Sinnvoller sind hier aber Kugelkoordinaten; nach kurzer Rechnung folgt

$$\mathbf{e}_r^\top \mathbf{Q} \mathbf{e}_r = 12a^2 q_0 \sin^2 \vartheta \sin(2\varphi).$$

Das Potenzial ist damit schließlich

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{6a^2 q_0 \sin^2 \vartheta \sin(2\varphi)}{r^3} + \dots \quad (2.6)$$

Die Winkelabhängigkeit passt zur gegebenen Symmetrie: Das Quadrat der Punktladungen sieht nach einer Drehung um  $180^\circ$  um die  $z$ -Achse wieder gleich aus – das Potenzial hat dieselbe Symmetrie. Außerdem ist das Potenzial in der Ebene der Punktladungen ( $\vartheta = 90^\circ$ ) maximal und verschwindet auf der Achse senkrecht dazu ( $\vartheta = 0^\circ$  bzw.  $180^\circ$ ).

### Beispiel 2.2: Homogenes Rotationsellipsoid

Nach dem eher theoretischen ersten Beispiel, an dem wir aber bereits einige Rechentechniken kennengelernt haben, kommen wir nun zu einer konkreten Anwendung: Atomkerne sind oft nicht exakt kugelförmig, sondern langgezogene („prolate“) oder flachgedrückte („oblate“) Rotationsellipsoide. Die Quadrupolmomente der Atomkerne haben einen messbaren Einfluss auf die Spektren der Atome; also sollte man wissen, wie das Quadrupolmoment eines solchen Rotationsellipsoids von seiner Form abhängt. In guter Näherung können wir dabei von einer konstanten Ladungsdichte  $\rho_0$  ausgehen (vgl. das „Tröpfchenmodell“ für Atomkerne).

Für die Rechnung bieten sich Zylinderkoordinaten an. Die Rotationsachse sei die  $z$ -Achse, der Mittelpunkt sei der Ursprung, der Radius  $\varrho_0$  und die „Höhe“  $z_0$ . Das Rotationsellipsoid wird dann beschrieben durch

$$\frac{\varrho^2}{\varrho_0^2} + \frac{z^2}{z_0^2} \leq 1;$$

die Oberfläche ergibt sich insbesondere für  $= 1$ . Stellen wir dies gleich mal nach  $z$  um – das werden wir bei den Integrationsgrenzen brauchen:

$$z = \pm z_0 \sqrt{1 - \varrho^2/\varrho_0^2}.$$

Zunächst nun die Gesamtladung. Diese könnte man, da die Ladungsverteilung ja homogen ist, einfach mittels  $q = \rho_0 V$  berechnen; wieder führen wir das Integral aber explizit aus, da die folgenden Integrale alle recht ähnlich

sein werden:

$$\begin{aligned}
 q &= \int \rho_0 dV' = \rho_0 \int dV' = \rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\varrho_0} \varrho' d\varrho' \int_{-z_0 \sqrt{1-\varrho'^2/\varrho_0^2}}^{z_0 \sqrt{1-\varrho'^2/\varrho_0^2}} dz' \\
 &= 4\pi z_0 \rho_0 \int_0^{\varrho_0} \varrho' d\varrho' \sqrt{1-\varrho'^2/\varrho_0^2} = 4\pi z_0 \rho_0 \cdot \frac{1}{3} \varrho_0^2 = \frac{4}{3} \pi \varrho_0^2 z_0 \rho_0.
 \end{aligned}$$

wobei als Erstes die trivialen Integrale über  $\varphi'$  und  $z'$  ausgeführt wurden und dann das Integral über  $\varrho'$ . Das Ergebnis stimmt mit dem aus  $q = \rho_0 V$  überein, wie man leicht überprüft.

Kommen wir zum Dipolmoment. Zunächst die  $x$ -Komponente:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \rho_0 \int x' dV' = \rho_0 \int_0^{2\pi} \cos \varphi' d\varphi' \int_0^{\varrho_0} \varrho'^2 d\varrho' \int_{-z_0 \sqrt{1-\varrho'^2/\varrho_0^2}}^{z_0 \sqrt{1-\varrho'^2/\varrho_0^2}} dz' \\
 &= \rho_0 \cdot 0 \cdot \dots = 0.
 \end{aligned}$$

Ebenso folgt  $p_2 = 0$ . Und auch die dritte Komponente verschwindet:

$$\begin{aligned}
 p_3 &= \rho_0 \int z' dV' = \rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\varrho_0} \varrho' d\varrho' \int_{-z_0 \sqrt{1-\varrho'^2/\varrho_0^2}}^{z_0 \sqrt{1-\varrho'^2/\varrho_0^2}} z' dz' \\
 &= \rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\varrho_0} \varrho' d\varrho' \cdot 0 = 0;
 \end{aligned}$$

dass das letzte Integral null ergibt, folgt sofort daraus, dass der Integrand ungerade ist. Das Rotationsellipsoid hat also kein Dipolmoment – was auch physikalisch einsichtig ist: Da die Ladungsverteilung homogen und ihr Mittelpunkt der Ursprung ist, ist keine Richtung besonders ausgezeichnet.

Es fehlt noch das Quadrupolmoment. Schreiben wir uns zunächst einmal die zu integrierende Matrix in Zylinderkoordinaten hin:

$$\begin{pmatrix}
 2\varrho'^2 \cos^2 \varphi' - \varrho'^2 \sin^2 \varphi' - z'^2 & 3\varrho'^2 \sin \varphi' \cos \varphi' & 3\varrho' \cos \varphi' z' \\
 3\varrho'^2 \cos \varphi' \sin \varphi' & 2\varrho'^2 \sin^2 \varphi' - \varrho'^2 \cos^2 \varphi' - z'^2 & 3\varrho' \sin \varphi' z' \\
 3\varrho' z' \cos \varphi' & 3\varrho' z' \sin \varphi' & 2z'^2 - \varrho'^2
 \end{pmatrix}$$

Puh, das sieht nach einer Menge Arbeit aus!

Tutorium Elektrodynamik

Elektro- und Magnetostatik - endlich ausführlich erklärt

Feuerbacher, B.

2016, XVIII, 375 S. 45 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-662-49028-0