

Kovariante vierdimensionale Formulierungen

2

- 2.1 Ko- und kontravariante Tensoren 36
 - 2.1.1 Definitionen 36
 - 2.1.2 Rechenregeln 40
 - 2.1.3 Differentialoperatoren 44
- 2.2 Kovariante Formulierung der Klassischen Mechanik 45
 - 2.2.1 Eigenzeit, Welt-Geschwindigkeit 45
 - 2.2.2 Kraft, Impuls, Energie 46
 - 2.2.3 Der elastische Stoß 53
- 2.3 Kovariante Formulierung der Elektrodynamik 63
 - 2.3.1 Kontinuitätsgleichung 64
 - 2.3.2 Elektromagnetische Potentiale 66
 - 2.3.3 Feldstärke-Tensor 68
 - 2.3.4 Maxwell-Gleichungen 70
 - 2.3.5 Transformation der elektromagnetischen Felder 74
 - 2.3.6 Lorentz-Kraft 80
 - 2.3.7 Formeln der relativistischen Elektrodynamik 83
- 2.4 Kovariante Lagrange-Formulierung 85
- 2.5 Aufgaben 93
- Kontrollfragen 100

2.1 Ko- und kontravariante Tensoren

2.1.1 Definitionen

Wir haben in Abschn. 1.4 die korrekte Transformation zwischen Inertialsystemen kennen gelernt, die Postulat 1.3.2 aus Abschn. 1.3 erfüllt. Es muss nun darum gehen, sämtliche physikalischen Gesetze in

► kovarianter Form

aufzuschreiben, d. h. so zu formulieren, dass sie bei Lorentz-Transformationen **forminvariant** bleiben. Das entspricht der Äquivalenz aller Inertialsysteme gemäß Postulat 1.3.1.

Die Newton'schen Gesetze der Klassischen Mechanik sind lediglich forminvariant gegenüber Galilei-Transformationen, die, wie wir nun wissen, nur in der Grenze $v \ll c$ korrekt sind. Folglich werden die Grundgesetze der Mechanik und auch der Elektrodynamik im relativistischen Bereich nicht mehr die vertrauten Formen haben. Unsere nächste Aufgabe muss also darin bestehen, die Forminvarianz der physikalischen Gesetze gegenüber Lorentz-Transformationen zu überprüfen. Diese Kontrolle findet zweckmäßig im vierdimensionalen Minkowski-Raum statt. Dort stellt die Lorentz-Transformation eine *Drehung* der Vierer-Vektoren dar, die deren *Längenquadrate* (1.11) invariant lässt.

Forminvarianz der physikalischen Gesetze gegenüber normalen räumlichen Drehungen im dreidimensionalen Raum musste bereits für die nicht relativistische Physik gefordert werden, ist dort in der Regel jedoch trivialerweise erfüllt. Ein physikalisches Gesetz ist eine mathematische Gleichung. Ein

$$\text{skalares Gesetz : } a = b$$

ist natürlich invariant gegenüber Drehungen, da sich weder a noch b dabei ändern. Ein

$$\text{vektorielles Gesetz : } \mathbf{a} = \mathbf{b} \Leftrightarrow a_j = b_j ; \quad j = 1, 2, 3$$

ist kovariant gegenüber Drehungen, d. h., die Komponenten ändern sich zwar, aber so, dass $a'_j = b'_j$ für alle j gilt und damit $\mathbf{a}' = \mathbf{b}'$. Analoge Aussagen gelten für Tensoren beliebiger Stufe.

Damit ist das Rezept klar: **Forminvarianz** gegenüber Lorentz-Transformationen ist für ein physikalisches Gesetz genau dann gegeben, wenn das Gesetz in kovarianter vierdimensionaler Form vorliegt, d. h., wenn alle Terme der Gleichung

► Vierer-Tensoren gleicher Stufe

sind. Unter diesem Gesichtspunkt werden wir in Abschn. 2.2 die Grundgesetze der Mechanik und in Abschn. 2.3 die der Elektrodynamik aufarbeiten.

Zunächst müssen wir aber das obige *Rezept* noch etwas genauer erläutern. Dazu stellen wir einige formale Betrachtungen über das Rechnen im vierdimensionalen Minkowski-Raum an, wobei wir uns insbesondere den in Abschn. 4.3.3, Bd. 1 eingeführten Tensorbegriff in Erinnerung rufen müssen. Es handelt sich dabei eigentlich um nichts anderes als eine Erweiterung des Vektorbegriffs. Ein n^k -Tupel von Zahlen in einem n -dimensionalen Raum stellt einen Tensor k -ter Stufe dar, falls sich diese Zahlen beim Wechsel des Koordinatensystems ($\Sigma \rightarrow \Sigma'$) nach bestimmten Gesetzen transformieren. Der hier interessierende Raum ist der Minkowski-Raum mit $n = 4$. Der Koordinatenwechsel erfolgt durch eine Lorentz-Transformation, die wir letztlich aus der Invarianz des *Längenquadrats*

$$s^2 = (x^0)^2 - \mathbf{x}^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

des Vierer-Vektors (1.42),

$$x^\mu \equiv (ct, \mathbf{x}),$$

abgeleitet haben. Die Transformation ist linear

$$x'^\mu = L_{\mu\lambda} x^\lambda,$$

wobei die Matrixelemente $L_{\mu\lambda}$ durch (1.16) definiert sind. Man beachte die Summenkonvention (1.25). – Ein mit dem Raum-Zeit-Punkt x^μ verknüpfter

► Tensor k -ter Stufe

wird nun durch sein Transformationsverhalten beim Übergang $x^\mu \rightarrow \bar{x}^\mu$ definiert. Für den Minkowski-Raum handelt es sich also um ein 4^k -Tupel von Zahlen, die sich bei der Koordinatentransformation

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = L_{\mu\lambda} x^\lambda$$

nach bestimmten Gesetzen transformieren. Die Zahlen heißen

► Komponenten des Tensors.

Sie haben k Indizes, von denen jeder von $n = 0$ bis $n = 3$ läuft. Für uns sind $k = 0, 1$ und 2 interessant.

1) Tensor nullter Stufe = Vierer-Skalar

Dieser Tensor hat $4^0 = 1$ Komponente (*Welt-Skalar*). Es handelt sich um eine einzelne Größe, die bei einer Lorentz-Transformation invariant bleibt. Ein Beispiel dafür ist das Längenquadrat s^2 .

2) Tensor erster Stufe = Vierer-Vektor

Dieser Tensor besitzt $4^1 = 4$ Komponenten. Man unterscheidet zwei Typen von Vektoren (*Welt-Vektoren*):

2a) Kontravarianter Vierer-Vektor

Wir kennzeichnen diesen Typ durch hoch-gestellte Indizes:

$$a^\mu \equiv (a^0, a^1, a^2, a^3) . \quad (2.1)$$

Die Komponenten transformieren sich beim Wechsel des Inertialsystems ($x^\mu \rightarrow \bar{x}^\mu$) wie folgt:

$$a'^\mu = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\lambda} a^\lambda . \quad (2.2)$$

Da der Koordinatenwechsel durch eine Lorentz-Transformation bewirkt werden soll, gilt insbesondere:

$$a'^\mu = L_{\mu\lambda} a^\lambda . \quad (2.3)$$

Beispiele sind:

α) der Ortsvektor $x^\mu \equiv (ct, x, y, z)$,

β) das Differential dx^μ ; denn für dieses gilt nach der Kettenregel:

$$dx'^\mu = \sum_{\lambda=0}^3 \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\lambda} dx^\lambda .$$

2b) Kovarianter Vierer-Vektor

Dieser Typ Vierer-Vektor ist durch tief-gestellte Indizes gekennzeichnet:

$$b_\mu = (b_0, b_1, b_2, b_3) . \quad (2.4)$$

Die Komponenten transformieren sich wie folgt:

$$b'_\mu = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^\mu} b_\lambda . \quad (2.5)$$

Dies bedeutet im Spezialfall der Lorentz-Transformation:

$$b'_\mu = (L^{-1})_{\lambda\mu} b_\lambda . \quad (2.6)$$

Ein wichtiges Beispiel ist der Gradient einer skalaren Funktion φ :

$$b_\mu = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^0}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} \right) ,$$

$$\begin{aligned} b'_\mu &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}^0}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}^3} \right), \\ x^\nu &= x^\nu (x'^\mu). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Es gilt offenbar:

$$b'_\mu = \frac{\partial \varphi}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} b_\nu.$$

Dies entspricht der Definitionsgleichung (2.5).

3) Tensor zweiter Stufe

Dieser Tensortyp besitzt $4^2 = 16$ Komponenten. Man unterscheidet nun drei Arten von so genannten *Welt-Tensoren*:

3a) Kontravarianter Tensor

Die Komponenten $F^{\alpha\beta}$ ändern sich bei einer Lorentz-Transformation wie folgt:

$$(F^{\mu\nu})' = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} F^{\alpha\beta}, \quad (2.8)$$

$$(F^{\mu\nu})' = L_{\mu\alpha} L_{\nu\beta} F^{\alpha\beta}. \quad (2.9)$$

„Zeilen“ und „Spalten“ transformieren sich also wie kontravariante Vektoren. Ein Beispiel ist das **Tensorprodukt** aus zwei kontravarianten Vierer-Vektoren a^μ und b^ν , das aus insgesamt 16 Zahlen (Komponenten) besteht:

$$F^{\mu\nu} = a^\mu b^\nu; \quad \mu, \nu = 0, \dots, 3. \quad (2.10)$$

Für dieses gilt nämlich:

$$(F^{\mu\nu})' = a'^\mu b'^\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} a^\alpha b^\beta = L_{\mu\alpha} L_{\nu\beta} F^{\alpha\beta}.$$

3b) Kovarianter Tensor

Das ist nun ein System von 16 Komponenten $F_{\alpha\beta}$, die sich gemäß

$$F'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} F_{\alpha\beta}, \quad (2.11)$$

$$F'_{\mu\nu} = (L^{-1})_{\mu\alpha} (L^{-1})_{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \quad (2.12)$$

transformieren. „Zeilen“ und „Spalten“ transformieren sich in diesem Fall wie kovariante Vektoren. Das Tensorprodukt aus zwei kovarianten Vierer-Vektoren wäre ein nahe liegendes Beispiel.

3c) Gemischter Tensor

Die 16 Komponenten F_α^β transformieren sich in diesem Fall wie

$$(F_\mu^\nu)' = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} F_\alpha^\beta, \quad (2.13)$$

$$(F_\mu^\nu)' = (L^{-1})_{\alpha\mu} L_\nu^\beta F_\alpha^\beta. \quad (2.14)$$

Man beachte, dass sich Tensoren zweiter Stufe stets in Matrizenform schreiben lassen. Allerdings transformieren sich die Elemente einer normalen Matrix nicht notwendig wie die Komponenten eines Tensors. Die Formel (2.14) entspricht dagegen der Relation

$$F' = S^{-1} F S$$

der linearen Algebra, die angibt, wie sich eine Abbildungsmatrix F bei einer Koordinatentransformation S zu einer Matrix F' ändert. Der **gemischte** Tensor zweiter Stufe ist deshalb wirklich in strengem Sinne eine Matrix, die kovarianten und kontravarianten Tensoren dagegen nicht.

Ein Beispiel für einen gemischten Tensor zweiter Stufe stellt das Tensorprodukt aus einem ko- und einem kontravarianten Vierer-Vektor dar:

$$F_\mu^\nu = a^\nu b_\mu.$$

Ganz analog werden Tensoren noch höherer Stufe definiert. So ist z. B. durch

$$(F_{\nu\rho\sigma}^\mu)' = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\sigma} F_{\beta\gamma\delta}^\alpha$$

das Transformationsverhalten eines gemischten Tensors vierter Stufe festgelegt. Hier sind allerdings nur $k = 0, 1, 2$ -Tensoren relevant.

2.1.2 Rechenregeln

Welchen mathematischen Gesetzmäßigkeiten unterliegen die soeben eingeführten Tensoren?

1. Man multipliziert einen Tensor mit einer Zahl, indem man jede Komponente mit dieser Zahl multipliziert.
2. Tensoren werden komponentenweise addiert!

3. Unter der

► Verjüngung eines Tensors

versteht man das Gleichsetzen eines oberen und eines unteren Index, womit automatisch eine Summation verknüpft ist. Die Tensorstufe nimmt dabei von k auf $k - 2$ ab.

■ Beispiele

- a) Wir setzen in dem obigen gemischten Tensor vierter Stufe $\nu = \mu$:

$$\begin{aligned} (F_{\nu\rho\sigma}^{\nu})' &= \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\sigma}} F_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\sigma}} F_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} \\ &= \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\sigma}} F_{\alpha\gamma\delta}^{\alpha}. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck transformiert sich wie ein kovarianter Tensor zweiter Stufe, wie der Vergleich mit (2.11) zeigt.

- b) Die **Spur** einer Matrix F_{ν}^{μ} ist definiert als die Summe ihrer Diagonalelemente:

$$F_{\nu}^{\mu} \longrightarrow F_{\nu}^{\nu}.$$

Das Resultat ist ein Tensor nullter Stufe, also ein Skalar. Die Spur einer Matrix ist somit invariant gegenüber Koordinatentransformationen.

- c) Die Verjüngung eines **Tensorprodukts**

$$a^{\mu} b_{\nu} \longrightarrow a^{\nu} b_{\nu}$$

ergibt natürlich einen Skalar ($k = 2 \rightarrow k = 0$). Sie ist dem Skalarprodukt in rechtwinkligen Koordinaten äquivalent. Man definiert deshalb für Vierer-Vektoren:

Skalarprodukt

$$(b, a) \equiv b_{\alpha} a^{\alpha}. \quad (2.15)$$

Als Skalar ist diese Größe lorentzinvariant. Das lässt sich leicht überprüfen:

$$(b', a') = b'_{\alpha} a'^{\alpha} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\rho}} b_{\lambda} a^{\rho} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} b_{\lambda} a^{\rho} = b_{\lambda} a^{\lambda} = (b, a).$$

- d) Als Beispiel β) unter 2a) hatten wir das Differential dx^μ des Ortsvektors im Minkowski-Raum als speziellen kontravarianten Vierer-Vektor kennen gelernt:

$$dx^\mu \equiv (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3) = (c dt, dx, dy, dz) . \quad (2.16)$$

Damit bilden wir das lorentzinvariante *Längenquadrat*,

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \\ &= (c dt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 , \end{aligned} \quad (2.17)$$

und schreiben:

$$(ds)^2 = \mu_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta . \quad (2.18)$$

Die Koeffizienten $\mu_{\alpha\beta}$ sind die Komponenten des metrischen Tensors (s. (2.86), Bd. 2), der in der Speziellen Relativitätstheorie symmetrisch ($\mu_{\alpha\beta} = \mu_{\beta\alpha}$) und diagonal ist:

Kovarianter metrischer Tensor

$$\mu_{\alpha\beta} \equiv \begin{pmatrix} +1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} . \quad (2.19)$$

Will man das invariante Längenquadrat $(ds)^2$ als Skalarprodukt schreiben,

$$(ds)^2 = (dx, dx) = dx_\alpha dx^\alpha , \quad (2.20)$$

so muss offensichtlich gelten:

$$dx_\alpha = \mu_{\alpha\beta} dx^\beta . \quad (2.21)$$

Der **kontravariante metrische Tensor** ist dann durch den folgenden Ansatz definiert:

$$dx^\alpha = \mu^{\alpha\beta} dx_\beta . \quad (2.22)$$

Dies bedeutet:

$$dx^\gamma = \mu^{\gamma\alpha} dx_\alpha = \mu^{\gamma\alpha} \mu_{\alpha\beta} dx^\beta .$$

Dieses kann nur richtig sein, wenn

$$\mu^{\gamma\alpha} \mu_{\alpha\beta} = \delta_\beta^\gamma = \begin{cases} 1, & \text{falls } \gamma = \beta , \\ 0 & \text{sonst} . \end{cases} \quad (2.23)$$

gilt. An (2.19) lesen wir ab, dass in der Speziellen Relativitätstheorie kovarianter und kontravarianter metrischer Tensor offenbar identisch sind:

$$\mu^{\alpha\beta} = \mu_{\beta\alpha} = \mu_{\alpha\beta} . \quad (2.24)$$

4. Ohne Beweis verallgemeinern wir (2.21) bzw. (2.22) zu einer **Übersetzungsvorschrift**, um kovariante in kontravariante Tensoren zu transformieren und umgekehrt. Man spricht vom

Herauf- bzw. Herunterziehen eines Index

$$D^{\dots\alpha\dots} = \mu^{\alpha\beta} D^{\dots\beta\dots} , \quad (2.25)$$

$$D^{\dots\alpha\dots} = \mu_{\alpha\beta} D^{\dots\beta\dots} . \quad (2.26)$$

Auf diese Weise kann man mit den Positionen der Indizes ziemlich beliebig *spielen*. Wir machen die Probe:

$$\begin{aligned} D^{\dots\alpha\dots} &= \mu_{\alpha\beta} D^{\dots\beta\dots} = \mu_{\alpha\beta} \mu^{\beta\gamma} D^{\dots\gamma\dots} \\ &= \delta_{\alpha}^{\gamma} D^{\dots\gamma\dots} = D^{\dots\alpha\dots} . \end{aligned}$$

Insbesondere können wir mit der obigen Übersetzungsvorschrift nun jeden kontravarianten Vierer-Vektor

$$a^{\mu} \equiv (a^0, a^1, a^2, a^3) = (a^0, \mathbf{a}) \quad (2.27)$$

in den entsprechenden kovarianten Vierer-Vektor umwandeln:

$$a_{\mu} \equiv (a_0, a_1, a_2, a_3) = (a^0, -\mathbf{a}) . \quad (2.28)$$

Dies bedeutet für das Skalarprodukt (2.15):

$$(b, a) = b_{\alpha} a^{\alpha} = \mu_{\alpha\beta} b^{\beta} a^{\alpha} = b^0 a^0 - \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} . \quad (2.29)$$

Der letzte Summand stellt das normale dreidimensionale Skalarprodukt zwischen den Raumkomponenten dar. Man beachte, dass das skalare Produkt nur dann als Summe der Produkte der entsprechenden Komponenten geschrieben werden kann, wenn man die kovarianten Komponenten des einen und die kontravarianten Komponenten des anderen Vierer-Vektors miteinander kombiniert.

Beispiele

$$\begin{aligned} s^2 &= (x, x) = c^2 t^2 - \mathbf{r}^2 , \\ (ds)^2 &= (dx, dx) = (c dt)^2 - (d\mathbf{r})^2 . \end{aligned}$$

2.1.3 Differentialoperatoren

Die Transformationseigenschaft der für die Theoretische Physik so wichtigen Differentialoperatoren erhalten wir durch direktes Anwenden der Kettenregel:

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} ; \quad x^{\alpha} = x^{\alpha}(x'^{\mu}) .$$

Die Differentiation nach der Komponente eines kontravarianten Vektors transformiert sich also so wie die Komponenten eines kovarianten Vierer-Vektors. Das überträgt sich direkt auf den Nabla-Operator:

Gradient:

$$\partial_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \equiv \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) . \quad (2.30)$$

∇ ist der *normale*, dreidimensionale Gradient (s. (1.269), Bd. 1). Mit Hilfe der allgemeinen Übersetzungsvorschrift (2.26) finden wir für die Ableitung nach einer kovarianten Komponente

$$\partial^{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \equiv \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) . \quad (2.31)$$

Die **Divergenz** (s. (1.278), Bd. 1) ist als Skalarprodukt aus einem kovarianten Gradienten und einem kontravarianten Vierer-Vektor bzw. einem kontravarianten Gradienten und einem kovarianten Vierer-Vektor natürlich lorentzinvariant:

Divergenz:

$$\partial_{\mu} a^{\mu} \equiv \partial^{\mu} a_{\mu} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} a^0 + \nabla \cdot \mathbf{a} . \quad (2.32)$$

Insbesondere für die Elektrodynamik ist schließlich noch der

► **d'Alembert-Operator** ◻

wichtig (s. (4.30), Bd. 3):

$$-\square \equiv \partial_{\mu} \partial^{\mu} \equiv \partial^{\mu} \partial_{\mu} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta . \quad (2.33)$$

$\Delta = \nabla^2$ ist der Laplace-Operator (s. (1.282), Bd. 1). Als Skalarprodukt ist auch der d'Alembert-Operator lorentzinvariant.

2.2 Kovariante Formulierung der Klassischen Mechanik

Wir wollen nun die Grundgesetze der Klassischen Mechanik so umschreiben, dass sie forminvariant gegenüber Lorentz-Transformationen werden. Dazu müssen wir sie in kovarianter vierdimensionaler Form angeben, d. h., alle Terme in einer solchen Gleichung müssen Vierer-Tensoren gleicher Stufe sein. In der Grenze $v \ll c$ sollten sich die „bekannten“ Gesetzmäßigkeiten reproduzieren.

2.2.1 Eigenzeit, Welt-Geschwindigkeit

Als **Weltlinie** haben wir in Abschn. 1.5 die Bahn eines materiellen Teilchens im Minkowski-Raum bezeichnet. Es handelt sich also um die Menge aller **Ereignisse**

$$x^\mu = (c t, x, y, z) ,$$

die das Objekt in diesem Raum im Laufe der Zeit durchläuft. Dann ist dx^μ die differentielle Änderung längs der Weltlinie. Das differentielle Längenquadrat

$$(ds)^2 = dx^\mu dx_\mu = c^2(dt)^2 - (d\mathbf{r})^2 \quad (2.34)$$

ist, wie bereits festgestellt, als Skalarprodukt ein *Welt-Skalar*, d. h. eine Lorentz-Invariante. Das gilt dann aber auch für die Zeit-Größe

$$(d\tau)^2 = \frac{1}{c^2}(ds)^2 = (dt)^2 - \frac{1}{c^2}(d\mathbf{r})^2 , \quad (2.35)$$

da die Lichtgeschwindigkeit c nach dem grundlegenden Postulat 1.3.2 aus Abschn. 1.3 in allen Inertialsystemen denselben Wert hat. Die physikalische Bedeutung von $d\tau$ machen wir uns wie folgt klar. Da $(d\tau)^2$ invariant ist, können wir zur Interpretation ein besonders *zweckmäßiges* Bezugssystem wählen. Das wäre z. B. das *mitbewegte* Inertialsystem, in dem das Teilchen im Koordinatenursprung momentan *ruht*:

$$dx^{\mu'} \equiv (c dt', 0, 0, 0) . \quad (2.36)$$

Dann folgt für $d\tau$:

$$(d\tau)^2 = \frac{1}{c^2} dx^{\mu'} dx_{\mu'} = (dt')^2 . \quad (2.37)$$

$d\tau$ entspricht also einem Zeitintervall auf einer mitgeführten Uhr, d. h. dem Intervall der in Abschn. 1.4.3 besprochenen **Eigenzeit**. Da $d\tau$ als Welt-Skalar lorentzinvariant ist, ändert sich das Eigenzeitintervall natürlich auch nicht, wenn wir es auf ein gegenüber dem

Teilchen bewegtes System Σ transformieren:

$$\begin{aligned} c^2(d\tau)^2 &= dx^\mu dx_\mu = c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \\ &= c^2(dt)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right). \end{aligned}$$

Das Resultat entspricht der Feststellung aus Abschn. 1.4.3, dass die *Eigenzeit stets nachgeht*:

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma d\tau > d\tau. \quad (2.38)$$

v ist die Relativgeschwindigkeit des Teilchens im System Σ .

Wir kommen nun zum Begriff der

► **Welt-Geschwindigkeit u^μ ,**

die man sinnvollerweise über die Verschiebung dx^μ des Teilchens im Minkowski-Raum innerhalb der Eigenzeit $d\tau$ definiert:

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (2.39)$$

Es handelt sich um einen kontravarianten Vierer-Vektor, für den wir auch schreiben können:

$$\begin{aligned} u^\mu &= \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{dx^\mu}{dt} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt} \\ \Rightarrow u^\mu &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} (c, v_x, v_y, v_z) = \gamma(v) (c, \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Die *Norm* von u^μ ist als Skalarprodukt lorentzinvariant und besitzt eine einfache physikalische Bedeutung:

$$u^\mu u_\mu = \gamma^2 (c^2 - v^2) = c^2. \quad (2.41)$$

2.2.2 Kraft, Impuls, Energie

Das Newton'sche Trägheitsgesetz (s. (2.42), Bd. 1),

$$F_i = m \frac{d}{dt} v_i; \quad i = x, y, z, \quad (2.42)$$

behält bei einem Wechsel des Inertialsystems, wie wir jetzt wissen, nur dann seine Gültigkeit, wenn für die Relativgeschwindigkeit $v \ll c$ gilt. Es ist damit forminvariant gegenüber einer Galilei-Transformation. Wir suchen nun die relativistische Verallgemeinerung dieses Gesetzes für den vierdimensionalen Minkowski-Raum. Dabei haben wir natürlich als Randbedingung zu fordern, dass sich für $v \ll c$ die Beziehungen für die Raumkomponenten auf die Form (2.42) reduzieren.

Nun können aber die Raumkomponenten der zu suchenden Vierer-Kraft nicht einfach mit den F_i identifiziert werden. Diese haben nicht das richtige Transformationsverhalten. So sind ja auch die Raumkomponenten der Vierer-Geschwindigkeit u^μ in (2.40) nicht die v_i , die vielmehr mit dem Faktor $\gamma(v)$ zu multiplizieren sind. Allerdings ist zu fordern, dass sich die Raumkomponenten eines jeden Vierer-Vektors bei gewöhnlichen dreidimensionalen Drehungen wie übliche Raumvektoren transformieren. Nun wissen wir, dass sich das Transformationsverhalten eines gewöhnlichen dreidimensionalen Raumvektors bezüglich Drehungen nicht ändert, wenn man den Vektor mit einem Skalar multipliziert. Die Raumkomponenten der gesuchten Vierer-Kraft werden deshalb Produkte aus den F_i mit passenden skalaren Funktionen von $\beta = v/c$ sein, die sich für $v \ll c$ auf 1 reduzieren.

Um nun zu der relativistischen Verallgemeinerung des Newton-Gesetzes (2.42) zu kommen, werden wir zunächst die Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ durch die Vierer-Geschwindigkeit u^μ ersetzen,

$$\mathbf{v} \longrightarrow u^\mu ,$$

da nur die Raumkomponenten von u^μ für $\beta \ll 1$ in die v_i übergehen. Ferner werden wir auf der rechten Seite von (2.42) die Zeit t durch die Eigenzeit τ ersetzen,

$$t \longrightarrow \tau ,$$

da nur die Eigenzeit lorentzinvariant ist. Damit hat

$$\frac{d}{d\tau} u^\mu$$

die Dimension einer Beschleunigung und ist ein kontravarianter Vierer-Vektor, der sich wie x^μ transformiert (s. Aufgabe 2.5.3). Wir betrachten schließlich noch die träge Masse m des Teilchens als Lorentz-Invariante, da nur „Raum und Zeit“ in der Speziellen Relativitätstheorie einer kritischen Revision unterworfen werden, nicht dagegen „Materie“. Damit kommen wir zu dem folgenden **Ansatz** für die relativistische Verallgemeinerung der Kraftgleichung (2.42):

$$m \frac{d}{d\tau} u^\mu = K^\mu . \quad (2.43)$$

Der kontravariante Vierer-Vektor K^μ heißt

- **Minkowski-Kraft.**

Beide Seiten der Kraftgleichung sind Welt-Tensoren erster Stufe, sodass die Kovarianz bezüglich Lorentz-Transformationen gewährleistet ist. Wir müssen allerdings die Komponenten der Minkowski-Kraft K^μ erst noch bestimmen.

Zu deren Festlegung erinnern wir uns an die andere Form des nicht relativistischen Trägheitsgesetzes:

$$F_i = \frac{d}{dt} p_i; \quad i = x, y, z. \quad (2.44)$$

Dieses fordert Impulserhaltung, falls keine äußeren Kräfte auf das Teilchen wirken. Diese *Newton'sche Form* der Impulserhaltung ist nicht lorentzinvariant. Wir können den Raumanteil des relativistischen Impulses deshalb durch die Forderung nach einer lorentzinvarianten Impulserhaltung für ein kräftefreies Teilchen festlegen. Dazu bringen wir die Kraftgleichung für die Raumkomponenten in eine Form, die äußerlich dem Trägheitsgesetz (2.44) besonders ähnlich ist:

$$K_i = m \frac{d}{d\tau} u_i = m \gamma \frac{d}{dt} v_i; \quad i = x, y, z. \quad (2.45)$$

Der Impulserhaltungssatz ist sicher dann lorentzinvariant, wenn wir durch Vergleich Impulse und Kräfte wie folgt festlegen:

$$p_{ri} = \frac{m v_i}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma m v_i, \quad (2.46)$$

$$K_i = \frac{F_i}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma F_i, \quad (2.47)$$

$$i = x, y, z.$$

F_i sind nun, anders als in (2.44), die relativistischen Kraftkomponenten $F_i = \frac{d}{dt} p_{ri}$. Wie gefordert reduzieren sich die Ausdrücke für $v \ll c$ auf die bekannten, nicht relativistischen Terme. Durch Diskussion von Stoßprozessen werden wir in Abschn. 2.2.3 einsehen, dass (2.46) wohl die einzige schlüssige, relativistische Verallgemeinerung des mechanischen Impulses ist.

Es fehlt noch die Zeit-Komponente der Minkowski-Kraft. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned} K^\mu u_\mu &= K^0 u^0 - \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \left(m \frac{d}{d\tau} u^0 \right) u^0 - \left(m \frac{d}{d\tau} \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{u} \\ &= \frac{1}{2} m \frac{d}{d\tau} (u^0 u^0 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = \frac{1}{2} m \frac{d}{d\tau} (u^\mu u_\mu) = \frac{1}{2} m \frac{d}{d\tau} c^2. \end{aligned}$$

Hier haben wir (2.29) und (2.41) ausgenutzt. Es ist also

$$K^\mu u_\mu = 0. \quad (2.48)$$

Andererseits gilt aber auch mit (2.40) und (2.47):

$$K^\mu u_\mu = \gamma K^0 c - \gamma^2 \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} . \quad (2.49)$$

Der Vergleich mit (2.48) liefert die nullte Kraftkomponente:

$$K^0 = \gamma \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{c} . \quad (2.50)$$

Gleichungen (2.47) und (2.50) ergeben die vollständige

Minkowski-Kraft

$$K^\mu = \gamma \left(\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{c}, F_x, F_y, F_z \right) . \quad (2.51)$$

Damit ist das Newton'sche Trägheitsgesetz in der Form (2.43) vollständig relativistisch verallgemeinert.

Als Nächstes untersuchen wir die physikalische Bedeutung der Zeitkomponente der Minkowski-Kraft:

$$\begin{aligned} \gamma \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{c} &= m \frac{d}{d\tau} u^0 = m \gamma \frac{d}{dt} (\gamma c) \\ \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} &= \frac{d}{dt} \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} . \end{aligned} \quad (2.52)$$

Das Skalarprodukt $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ entspricht der Arbeit, die die Kraft $\mathbf{F}$ pro Zeiteinheit an dem Teilchen der Masse m leistet. In der nicht relativistischen Mechanik ist diese mit der zeitlichen Änderung der kinetischen Energie T identisch (s. (2.226), Bd. 1). Wir machen deshalb den Ansatz

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \frac{d}{dt} T_r , \quad (2.53)$$

wobei der Index „r“ für *relativistisch* steht, und erhalten durch Vergleich mit (2.52) die

relativistische kinetische Energie

$$T_r = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m \gamma c^2 . \quad (2.54)$$

Auch für diese Größe erwarten wir, dass sie in der Grenze kleiner Geschwindigkeiten ($v \ll c$) in den bekannten nicht relativistischen Ausdruck $T = \frac{m}{2} v^2$ übergeht. Nun gilt aber:

$$T_r = m c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} = m c^2 + \frac{1}{2} m v^2 + \frac{3}{8} m \frac{v^4}{c^2} + \dots$$

Für kleine v reduziert sich also T_r in dieser Weise noch nicht auf die nicht relativistische kinetische Energie:

$$T_r \xrightarrow{v/c \ll 1} m c^2 + \frac{1}{2} m v^2. \quad (2.55)$$

Der *störende* Zusatzterm $m c^2$ ist eine Konstante, die für die Kinematik des Massenpunktes eigentlich unbedeutend ist. Man könnte sie z. B. in der Definitionsgleichung (2.54) für T_r auf der rechten Seite abziehen, da der Analogieschluss von (2.53) auf (2.54) ohnehin nur bis auf eine additive Konstante bestimmt sein kann. Wir werden jedoch später sehen, dass dieser additiven Konstanten eine tiefergehende physikalische Bedeutung zukommt:

$$m c^2 \Leftrightarrow \text{Ruheenergie des Massenpunktes}.$$

Wir behalten sie deshalb bei.

Durch Multiplikation der Vierer-Geschwindigkeit u^μ (2.40) mit der Masse m des Teilchens können wir einen neuen kontravarianten Vierer-Vektor definieren, der als

Vierer-Impuls (Welt-Impuls)

$$p^\mu = m u^\mu = m \gamma (c, \mathbf{v}) \quad (2.56)$$

zu interpretieren sein wird. Setzen wir (2.40) ein, so folgt:

$$p^\mu = \left(\frac{T_r}{c}, \gamma m v_x, \gamma m v_y, \gamma m v_z \right) \equiv \left(\frac{T_r}{c}, \mathbf{p}_r \right). \quad (2.57)$$

Die Raumkomponenten entsprechen also der relativistischen Verallgemeinerung (2.46) des mechanischen Impulsvektors $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$,

$$\mathbf{p}_r = \gamma \mathbf{p} = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \mathbf{v}, \quad (2.58)$$

während die Zeitkomponente im wesentlichen mit der kinetischen Energie identisch ist.

Grundkurs Theoretische Physik 4/1

Spezielle Relativitätstheorie

Nolting, W.

2016, XII, 147 S. 15 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-662-49030-3