Zusammengesetzte Systeme und Tensorprodukte

3

Zusammenfassung

In diesem Kapitel werden zunächst die für Mehrteilchensysteme erforderlichen Tensorprodukte von Hilbert-Räumen mathematisch eingeführt. Mit dieser mathematischen Vorbereitung werden dann Tensorprodukte von Qbits betrachtet, d. h. Systeme, die aus mehreren Qbits bestehen. Dabei werden die nützliche und in der Quanteninformatik omnipräsente Rechenbasis und auch die Bell-Basisvektoren eingeführt. Danach werden Zustände und Operatoren für Mehrteilchensysteme und deren Reduktion auf Teilsysteme betrachtet. Dazu werden die Teilspur und der reduzierte Dichteoperator definiert. Danach wird auf das mögliche Entstehen von gemischten Zuständen bei der Beobachtung von Teilsystemen eingegangen. Schließlich wird noch die oftmals hilfreiche Schmidt-Zerlegung eines aus zwei Teilsystemen zusammengesetzten Systems vorgestellt.

3.1 Auf dem Weg zum Qbyte

Klassisch wird die Information durch endliche Bitwörter – wie etwa *Bytes* – und Vielfache davon dargestellt. Dies sind also Wörter, $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, die aus dem Alphabet $\{0,1\} \ni x_l,\ l = 1, \dots, n$ gebildet werden. Daher werden 2^n klassische Speicherkonfigurationen benötigt, um alle solche Wörter darzustellen.

Ein klassisches Zweibitwort (x_1, x_2) entspricht einem Element der Menge $\{0,1\} \times \{0,1\} = \{0,1\}^2$, und man kann durch vier verschiedene Zustände die Worte 00, 01, 10, 11 repräsentieren, indem man den ersten Buchstaben x_1 (das erste Bit) und den zweiten Buchstaben x_2 (das zweite Bit) entsprechend setzt. Wenn wir nun jedes dieser Bits quantenmechanisch durch entsprechende Qbits repräsentieren, ist ein quantenmechanisches Gesamtsystem entstanden. Genauso, wie im klassischen Fall die Zustandsmenge $\{0,1\}$ zur Beschreibung der Bitpaare (x_1, x_2) nicht mehr ausreicht, reicht auch ein einzelner Qbitraum nicht mehr aus, um das aus den beiden Qbits gebildete Gesamtsystem zu beschreiben. Das solcher-

W. Scherer, *Mathematik der Quanteninformatik*, DOI 10.1007/978-3-662-49080-8_3

art gebildete Gesamtsystem ist wiederum ein Quantenmechanisches und besteht aus quantenmechanischen Teilsystemen.

In der Tat bestehen viele quantenmechanische Systeme aus mehreren Teilen, von denen jedes wiederum ein quantenmechanisches System ist. So ist z. B. das Wasserstoffatom ein quantenmechanisches System, welches aus einem Proton und einem Elektron besteht. Die Zustände des Protons seien durch einen Hilbert-Raum $\mathbb{H}^P$, die des Elektrons durch ein $\mathbb{H}^E$ gegeben. Durch welchen Hilbert-Raum wird nun das zusammengesetzte System Wasserstoff beschrieben? Die Antwort lautet: durch das *Tensorprodukt* $\mathbb{H}^P \otimes \mathbb{H}^E$ der Teil-Hilbert-Räume.[1] Das Tensorprodukt $\mathbb{H}^A \otimes \mathbb{H}^B$ zweier Hilbert-Räume $\mathbb{H}^A$ und $\mathbb{H}^B$ ist wiederum ein Hilbert-Raum und dient zur quantenmechanischen Beschreibung des aus den Teilräumen $\mathbb{H}^A$ und $\mathbb{H}^B$ zusammengesetzten Gesamtsystems. Wir müssen uns daher zunächst ein wenig mit Tensorprodukten von Hilbert-Räumen beschäftigen.

3.2 Tensorprodukte von Hilbert-Räumen

3.2.1 Definition

Wir geben hier eine eher informelle Definition des Tensorproduktes zweier endlichdimensionaler Hilbert-Räume, die aber für unsere Zwecke völlig ausreicht. Für eine strenge und allgemeingültige Version, die auch den unendlichdimensionalen Fall einschließt, sei auf [40] verwiesen.

Wichtiger als die allgemeingültigste Definition ist jedoch für uns hier, dass man die Rechenregeln für das Tensorprodukt – wie etwa die Berechnung des Skalarproduktes – mithilfe der bekannten Rechenregeln der Teilräume angeben kann.

Sei $|\varphi\rangle \in \mathbb{H}^A$, $|\psi\rangle \in \mathbb{H}^B$, definiere

$$\begin{array}{rcl} |\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle : \mathbb{H}^A \times \mathbb{H}^B & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (u, v) & \longmapsto & \langle u|\varphi\rangle_{\mathbb{H}^A} \langle v|\psi\rangle_{\mathbb{H}^B} \end{array} . \tag{3.1}$$

Diese Abbildung ist antilinear in u und v und stetig. Definiere die Menge aller solchen Abbildungen:

$$\mathbb{H}^A \otimes \mathbb{H}^B := \{\Psi : \mathbb{H}^A \times \mathbb{H}^B \to \mathbb{C} \mid \text{antilinear und stetig}\} . \tag{3.2}$$

Dies ist ein Vektorraum über $\mathbb{C}$, denn für $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathbb{H}^A \otimes \mathbb{H}^B$ und $a, b \in \mathbb{C}$ ist auch die durch

$$(a\Psi_1 + b\Psi_2)(u, v) := a\Psi_1(u, v) + b\Psi_2(u, v) \tag{3.3}$$

[1] Üblicherweise wird bei der quantenmechanischen Berechnung der Eigenschaften des Wasserstoffatoms das Proton als im Raum fixiertes Teilchen betrachtet, das eine Coulomb-Kraft auf das Elektron ausübt. In dieser Näherung bleibt der Zustand des Protons unverändert, man betrachtet nur die Auswirkungen auf das Elektron und benötigt lediglich $\mathbb{H}^E$. Eine genauere Betrachtung bezieht die Wechselwirkung auf das Proton mit ein und führt Schwerpunkt- und Relativkoordinaten ein. Der Schwerpunktszustand wiederum ändert sich bei isolierten Systemen nur in trivialer Weise, und der dazugehörige Hilbert-Raum wird dann ebenfalls ignoriert.

definierte Abbildung wiederum in $\mathbb{H}^A \otimes \mathbb{H}^B$. Die Nullabbildung bzw. $-\Psi$ bilden den Nullvektor bzw. den bezüglich der Addition zu Ψ inversen Vektor. Nach (3.1) ist $|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle$ somit ein Vektor im Vektorraum der in (3.2) definierten antilinearen und stetigen Abbildungen $\mathbb{H}^A \otimes \mathbb{H}^B$ von $\mathbb{H}^A \times \mathbb{H}^B$ nach $\mathbb{C}$. Für $|\varphi\rangle \in \mathbb{H}^A, |\psi\rangle \in \mathbb{H}^B$, $a, b \in \mathbb{C}$ verifiziert man dann leicht Folgendes:

$$
\begin{aligned}
(a|\varphi\rangle) \otimes |\psi\rangle = |\varphi\rangle \otimes (a|\psi\rangle) &= a(|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle) && (3.4)\\
a(|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle) + b(|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle) &= (a+b)\,|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle && (3.5)\\
(|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle) \otimes |\psi\rangle &= |\varphi_1\rangle \otimes |\psi\rangle + |\varphi_2\rangle \otimes |\psi\rangle && (3.6)\\
|\varphi\rangle \otimes (|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) &= |\varphi\rangle \otimes |\psi_1\rangle + |\varphi\rangle \otimes |\psi_2\rangle\,. && (3.7)
\end{aligned}
$$

Als Beispiel betrachte man etwa

$$
\begin{aligned}
\Big(a(|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle) + b(|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle)\Big)(u,v) &= a(|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle)(u,v) + b(|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle)(u,v)\\
&= a\langle u|\varphi\rangle\langle v|\psi\rangle + b\langle u|\varphi\rangle\langle v|\psi\rangle \qquad (3.8)\\
&= (a+b)\langle u|\varphi\rangle\langle v|\psi\rangle\\
&= (a+b)\,(|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle)\,(u,v)\,.
\end{aligned}
$$

Zur Vereinfachung der Notation schreiben wir auch

$$
|\varphi \otimes \psi\rangle := |\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle\,. \tag{3.9}
$$

Für Vektoren $|\varphi_k\rangle \otimes |\psi_k\rangle \in \mathbb{H}^A \otimes \mathbb{H}^B$ mit $k = 1, 2$ und $|\varphi_k\rangle \in \mathbb{H}^A$, $|\psi_k\rangle \in \mathbb{H}^B$ definiert man

$$
\langle \varphi_1 \otimes \psi_1 | \varphi_2 \otimes \psi_2\rangle := \langle \varphi_1|\varphi_2\rangle^{\mathbb{H}^A} \langle \psi_1|\psi_2\rangle^{\mathbb{H}^B}, \tag{3.10}
$$

wobei wir im Folgenden meist die hochgestellten Indices, die andeuten, in welchem Hilbert-Raum das jeweilige Skalarprodukt berechnet wird, weglassen. Dadurch haben wir zunächst so etwas wie ein Skalarprodukt für Vektoren der Form $|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle$ in $\mathbb{H}^A \otimes \mathbb{H}^B$. Um damit ein Skalarprodukt für alle $\Psi \in \mathbb{H}^A \otimes \mathbb{H}^B$ definieren zu können, betrachten wir noch ONBs in den Teilräumen. Sei $\{|e_a\rangle\} \subset \mathbb{H}^A$ ONB in $\mathbb{H}^A$ und $\{|f_b\rangle\} \subset \mathbb{H}^B$ ONB in $\mathbb{H}^B$. Die Menge $\{|e_a\rangle \otimes |f_b\rangle\} \subset \mathbb{H}^A \otimes \mathbb{H}^B$ ist dann orthonormiert, denn wegen (3.10) gilt

$$
\langle e_{a_1} \otimes f_{b_1} | e_{a_2} \otimes f_{b_2}\rangle = \langle e_{a_1}|e_{a_2}\rangle\langle f_{b_1}|f_{b_2}\rangle = \delta_{a_1 a_2}\delta_{b_1 b_2}. \tag{3.11}
$$

Betrachten wir nun einen beliebigen Vektor $\Psi \in \mathbb{H}^A \otimes \mathbb{H}^B$, so gilt für diese antilineare Abbildung

$$
\begin{aligned}
\Psi(u,v) &= \Psi\Big(\sum_a |e_a\rangle\langle e_a|u\rangle, \sum_b |f_b\rangle\langle f_b|v\rangle\Big)\\
&= \sum_{a,b} \underbrace{\Psi\big(|e_a\rangle, |f_b\rangle\big)}_{=:\Psi_{ab}\in\mathbb{C}}\langle u|e_a\rangle\langle v|f_b\rangle
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{a,b} \Psi_{ab} \big[|e_a\rangle \otimes |f_b\rangle \big](u, v) \tag{3.12}$$
$$= \sum_{a,b} \Psi_{ab} |e_a \otimes f_b\rangle(u, v) \,.$$

Damit ist gezeigt, dass sich jeder Vektor $|\Psi\rangle \in \mathbb{H}^A \otimes \mathbb{H}^B$ als Linearkombination der Form[2]

$$|\Psi\rangle = \sum_{a,b} \Psi_{ab} |e_a \otimes f_b\rangle \tag{3.13}$$

darstellen lässt. Die Menge $\{|e_a \otimes f_b\rangle\} = \{|e_a\rangle \otimes |f_b\rangle\}$ bildet also eine ONB in $\mathbb{H}^A \otimes \mathbb{H}^B$, und es gilt

$$\dim \left(\mathbb{H}^A \otimes \mathbb{H}^B \right) = \dim \mathbb{H}^A \, \dim \mathbb{H}^B \,. \tag{3.14}$$

Das Skalarprodukt zwischen $|\Psi\rangle$ in (3.13) und

$$|\Phi\rangle = \sum_{a,b} \Phi_{ab} |e_a \otimes f_b\rangle \tag{3.15}$$

definiert man dann mit (3.11) durch

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \sum_{a_1,b_1} \sum_{a_2,b_2} \overline{\Psi_{a_1 b_1}} \Phi_{a_2 b_2} \langle e_{a_1} \otimes f_{b_1} | e_{a_2} \otimes f_{b_2} \rangle$$
$$= \sum_{a,b} \overline{\Psi_{ab}} \Phi_{ab} \,. \tag{3.16}$$

Das so auf ganz $\mathbb{H}^A \otimes \mathbb{H}^B$ definierte Skalarprodukt ist positiv und unabhängig von der Wahl der ONBs.

Übung 3.1 Man zeige, dass

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \sum_{a,b} \overline{\Psi_{ab}} \Phi_{ab} \tag{3.17}$$

nicht von der Wahl der ONB $\{|e_a\rangle\} \subset \mathbb{H}^A$ und $\{|f_b\rangle\} \subset \mathbb{H}^B$ abhängt.

Zur Lösung siehe 3.1 im Kap. 13 Lösungen. ◀

Der zu $|\Psi\rangle$ in (3.13) gehörige Bra-Vektor ist dann

$$\langle \Psi | = \sum_{a,b} \overline{\Psi_{ab}} \langle e_a \otimes f_b | \tag{3.18}$$

und wirkt wie in (3.16) auf ein $|\Phi\rangle \in \mathbb{H}^A \otimes \mathbb{H}^B$.

[2] Mit im unendlichdimensionalen Fall möglicherweise unendlich vielen Summanden.

Die Norm von $|\Psi\rangle \in \mathbb{H}^A \otimes \mathbb{H}^B$ berechnet sich nach

$$||\Psi||^2 = \langle\Psi|\Psi\rangle = \sum_{a,b} |\Psi_{ab}|^2 \,. \tag{3.19}$$

Somit ist $\mathbb{H}^A \otimes \mathbb{H}^B$ ein komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt (3.16), welches eine Norm (3.19) induziert. Für endlichdimensionale Teilräume ist $\mathbb{H}^A \otimes \mathbb{H}^B$ dann auch vollständig in dieser Norm und somit nach Definition 2.1 ein Hilbert-Raum.[3] Für unsere Zwecke genügt es aber völlig, $\mathbb{H}^A \otimes \mathbb{H}^B$ als die Menge der Linearkombinationen der Form (3.13) mit $\sum_{a,b} |\Psi_{ab}|^2 < \infty$ und mit den Rechenregeln (3.16) und (3.19) aufzufassen.

Definition 3.1
Der Hilbert-Raum $\mathbb{H}^A \otimes \mathbb{H}^B$ mit dem Skalarprodukt (3.16) heißt Tensorprodukt der Hilbert-Räume $\mathbb{H}^A$ und $\mathbb{H}^B$.

Für mehrfache Tensorprodukte wie etwa $\mathbb{H}^A \otimes \mathbb{H}^B \otimes \mathbb{H}^C$ gilt *Assoziativität*

$$\left(\mathbb{H}^A \otimes \mathbb{H}^B\right) \otimes \mathbb{H}^C = \mathbb{H}^A \otimes \left(\mathbb{H}^B \otimes \mathbb{H}^C\right) = \mathbb{H}^A \otimes \mathbb{H}^B \otimes \mathbb{H}^C \,, \tag{3.20}$$

und ganz analog

$$\langle\varphi_1 \otimes \psi_1 \otimes \chi_1|\varphi_2 \otimes \psi_2 \otimes \chi_2\rangle = \langle\varphi_1|\varphi_2\rangle\langle\psi_1|\psi_2\rangle\langle\chi_1|\chi_2\rangle \tag{3.21}$$

und mit den ONBs $\{|e_a\rangle\} \subset \mathbb{H}^A$, $\{|f_b\rangle\} \subset \mathbb{H}^B$, $\{|g_c\rangle\} \subset \mathbb{H}^C$ hat man

$$|\Psi\rangle \in \mathbb{H}^A \otimes \mathbb{H}^B \otimes \mathbb{H}^C \quad \Leftrightarrow \quad |\Psi\rangle = \sum_{a,b,c} \Psi_{abc}|e_a \otimes f_b \otimes g_c\rangle \tag{3.22}$$
$$\text{mit} \quad \sum_{a,b,c} |\Psi_{abc}|^2 < \infty.$$

Schließlich noch ein Resultat zum Tensorprodukt von Bra-Vektoren. Wegen

$$\langle\varphi_1 \otimes \psi_1|\Big(|\varphi_2\rangle \otimes |\psi_2\rangle\Big) = \langle\varphi_1 \otimes \psi_1|\varphi_2 \otimes \psi_2\rangle = \langle\varphi_1|\varphi_2\rangle\langle\psi_1|\psi_2\rangle \tag{3.23}$$

kann man daher auch

$$\langle\varphi \otimes \psi| = \langle\varphi| \otimes \langle\psi| \tag{3.24}$$

schreiben, und es gilt folgendes Lemma:

[3] Lediglich im Fall unendlichdimensionaler Teilräume muss $\mathbb{H}^A \otimes \mathbb{H}^B$ noch in dieser Norm vervollständigt (siehe [40]) werden, um daraus einen Hilbert-Raum zu machen.

Lemma 3.2
Für beliebige $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle \in \mathbb{H}^A$ *und* $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle \in \mathbb{H}^B$ *gilt*

$$|\varphi_1 \otimes \psi_1\rangle\langle\varphi_2 \otimes \psi_2| = |\varphi_1\rangle\langle\varphi_2| \otimes |\psi_1\rangle\langle\psi_2| \,. \tag{3.25}$$

Beweis Für beliebige $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{H}^A$ und $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{H}^B$ hat man

$$\begin{aligned}
&\langle\xi_1 \otimes \zeta_1|\Big(|\varphi_1 \otimes \psi_1\rangle\langle\varphi_2 \otimes \psi_2|\Big)\xi_2 \otimes \zeta_2\rangle \\
&\quad = \langle\xi_1 \otimes \zeta_1|\varphi_1 \otimes \psi_1\rangle\langle\varphi_2 \otimes \psi_2|\xi_2 \otimes \zeta_2\rangle \\
&\quad \underbrace{=}_{(3.23)} \langle\xi_1|\varphi_1\rangle\langle\zeta_1|\psi_1\rangle\langle\varphi_2|\xi_2\rangle\langle\psi_2|\zeta_2\rangle \\
&\quad = \langle\xi_1|\varphi_1\rangle\langle\varphi_2|\xi_2\rangle\langle\zeta_1|\psi_1\rangle\langle\psi_2|\zeta_2\rangle \qquad (3.26)\\
&\quad \underbrace{=}_{(3.23)} \langle\xi_1 \otimes \zeta_1|\Big(|\varphi_1\rangle\langle\varphi_2| \otimes |\psi_1\rangle\langle\psi_2|\Big)\xi_2 \otimes \zeta_2\rangle \,.
\end{aligned}$$

□

Beispiel 3.1 Wir betrachten etwa in ¶$\mathbb{H}$

$$|\varphi_1\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

$$|\varphi_2\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

$$|\psi_1\rangle = |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

$$|\psi_2\rangle = |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,. \tag{3.30}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
|\varphi_1 \otimes \varphi_2\rangle &= |\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
|\psi_1 \otimes \psi_2\rangle &= |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

$$|\varphi_1 \otimes \varphi_2\rangle\langle\psi_1 \otimes \psi_2| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}(0, 1, 0, 0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Andererseits ist

$$
\begin{aligned}
|\varphi_1\rangle\langle\psi_1| &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}(1,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\\
|\varphi_2\rangle\langle\psi_2| &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}(0,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix} \qquad (3.32)\\
|\varphi_1\rangle\langle\psi_1| \otimes |\varphi_2\rangle\langle\psi_2| &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&-1&0&0\\0&1&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

3.2.2 Die Rechenbasis

Für Systeme, die sich aus n Qbits zusammensetzen, werden die Zustände durch Vektoren im n-fachen Tensorprodukt der Qbit-Räume beschrieben.

Definition 3.3
Das n-fache Tensorprodukt der Qbit-Räume ist definiert als

$$
{}^{\P}\mathbb{H}^{\otimes n} := \underbrace{{}^{\P}\mathbb{H} \otimes \cdots \otimes {}^{\P}\mathbb{H}}_{n \text{ Faktoren}} . \qquad (3.33)
$$

Wir bezeichnen den *von rechts gezählten* $j+1$-ten Faktorraum in ${}^{\P}\mathbb{H}^{\otimes n}$ mit ${}^{\P}\mathbb{H}_j$, d. h. wir definieren

$$
{}^{\P}\mathbb{H}^{\otimes n} = {}^{\P}\mathbb{H}_{n-1} \otimes \cdots \otimes \overbrace{{}^{\P}\mathbb{H}_j}^{j+1\text{-ter Faktor}} \otimes \cdots \otimes {}^{\P}\mathbb{H}_0 . \qquad (3.34)
$$

Der Hilbert-Raum ${}^{\P}\mathbb{H}^{\otimes n}$ ist 2^n-dimensional. Der Grund dafür, die Zählung von rechts bei 0 beginnen zu lassen, wird weiter unten offensichtlich werden, wenn wir die ausgesprochen nützliche Rechenbasis definieren. Jede Zahl $x \in \mathbb{N}_0$ mit $x \leq 2^n$ lässt sich in der Form

$$
x = \sum_{j=0}^{n-1} x_j 2^j \qquad \text{mit } x_j \in \{0,1\} \qquad (3.35)
$$

schreiben, woraus sich die übliche **Binärdarstellung**

$$
(x)_{\text{Basis } 2} = x_{n-1} \dots x_1 x_{0\,2} \qquad \text{mit } x_j \in \{0,1\} \qquad (3.36)
$$

ergibt. So ist etwa $5 = 101_2$. Alle möglichen Kombinationen von $x_0, \ldots, x_{n-1}$ ergeben somit alle ganzen Zahlen von 0 bis $2^n - 1$. Umgekehrt definiert jede natürliche Zahl x mit $0 \le x \le 2^n - 1$ eineindeutig ein n-Tupel $x_0, \ldots, x_{n-1} \in \{0,1\}^n$ und daher auch einen Vektor $|x_{n-1}\rangle \otimes \cdots \otimes |x_1\rangle \otimes |x_0\rangle \in {}^{\P}\mathbb{H}^{\otimes n}$.

Definition 3.4
Sei $x \in \mathbb{N}_0$ mit $x < 2^n$ und $x_0, \ldots, x_{n-1} \in \{0,1\}^n$ die Koeffizienten der Binärdarstellung

$$x = \sum_{j=0}^{n-1} x_j 2^j \tag{3.37}$$

von x. Dann definieren wir einen Vektor $|x\rangle \in {}^{\P}\mathbb{H}^{\otimes n}$ durch

$$\begin{aligned} |x\rangle^n &:= |x\rangle := |x_{n-1} \ldots x_1 x_0\rangle \\ &:= |x_{n-1}\rangle \otimes \cdots \otimes |x_1\rangle \otimes |x_0\rangle = \bigotimes_{j=n-1}^{0} |x_j\rangle \,. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Wenn klar ist, aus welchem Produktraum ${}^{\P}\mathbb{H}^{\otimes n}$ der Vektor $|x\rangle^n$ stammt, schreiben wir auch einfach $|x\rangle$ anstelle von $|x\rangle^n$.

Man beachte, dass in (3.38) im Einklang mit der üblichen Binärdarstellung (3.36) die Zählung der Indices in $|x\rangle = |x_{n-1} \ldots x_1 x_0\rangle$ von rechts beginnt. Dies bringen wir auch durch die Indexgrenzen für j in $\bigotimes_{j=n-1}^{0}$ zum Ausdruck. Die Art und Weise, wie die $|x\rangle$ in Definition 3.4 definiert sind, erklärt die in (3.34) definierte Zählweise der Faktorräume, denn man hat somit $|x_j\rangle \in {}^{\P}\mathbb{H}_j$ für $j = 0, \ldots, n-1$ und

$$\begin{array}{cccccc} {}^{\P}\mathbb{H}^{\otimes n} = & {}^{\P}\mathbb{H}_{n-1} \otimes \cdots \otimes & \overbrace{{}^{\P}\mathbb{H}_j}^{j+1\text{-ter Faktor}} & \otimes \cdots \otimes {}^{\P}\mathbb{H}_0 & . \\ & \ni |x_{n-1}\rangle \otimes \cdots \otimes & |x_j\rangle & \otimes \cdots \otimes |x_0\rangle & \end{array} \tag{3.39}$$

Für die kleinste und größte in ${}^{\P}\mathbb{H}^{\otimes n}$ darstellbaren Zahlen 0 und $2^n - 1$ hat man

$$|2^n - 1\rangle^n = |11\ldots1\rangle = \bigotimes_{j=0}^{n-1} |1\rangle \in {}^{\P}\mathbb{H}^{\otimes n} \tag{3.40}$$

$$|0\rangle^n = |00\ldots0\rangle = \bigotimes_{j=0}^{n-1} |0\rangle \in {}^{\P}\mathbb{H}^{\otimes n} \,. \tag{3.41}$$

Da die Faktoren in den Tensorprodukten in (3.40) und (3.41) alle gleich sind, spielt in diesen speziellen Fällen die Reihenfolge der Indizierung keine Rolle.

Lemma 3.5
Die Menge der Vektoren $\{|x\rangle \in {}^{\P}\mathbb{H}^{\otimes n} | x \in \mathbb{N}_0, x < 2^n\}$ *bildet eine ONB in* ${}^{\P}\mathbb{H}^{\otimes n}$.

Beweis Für $|x\rangle, |y\rangle \in {}^{\P}\mathbb{H}^{\otimes n}$ hat man

$$
\begin{aligned}
\langle x|y\rangle &= \langle x_{n-1} \dots x_0 | y_{n-1} \dots y_0\rangle \\
&\underbrace{=}_{(3.10)} \prod_{j=0}^{n-1} \langle x_j | y_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad \forall_j : x_j = y_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (3.42) \\
&= \delta_{xy} \,.
\end{aligned}
$$

Somit bilden die $\{|x\rangle\}_{x\in\mathbb{N}_0, x<2^n}$ eine Menge von $2^n = \dim {}^{\P}\mathbb{H}^{\otimes n}$ orthonormierten Vektoren in ${}^{\P}\mathbb{H}^{\otimes n}$. □

Die durch die Zahlen $x \in \mathbb{N}_0$ mit $x < 2^n$ definierte ONB in ${}^{\P}\mathbb{H}^{\otimes n}$ ist überaus nützlich und hat daher einen eigenen Namen.

Definition 3.6
Die für $x = 0, 1, \dots, 2^n - 1$ durch $|x\rangle = |x_{n-1} \dots x_0\rangle$ in ${}^{\P}\mathbb{H}^{\otimes n}$ definierte ONB heißt **Rechenbasis**.

Beispiel 3.2 In ${}^{\P}\mathbb{H}$ ist die Rechenbasis identisch mit der Standardbasis:

$$|0\rangle^1 = |0\rangle \qquad (3.43)$$

$$|1\rangle^1 = |1\rangle \,. \qquad (3.44)$$

Die vier Basisvektoren der Rechenbasis in ${}^{\P}\mathbb{H}^{\otimes 2}$ sind

$$
\begin{aligned}
|0\rangle^2 &= |00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle \\
|1\rangle^2 &= |01\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle \\
|2\rangle^2 &= |10\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle \\
|3\rangle^2 &= |11\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle \,.
\end{aligned} \qquad (3.45)
$$

Dagegen hat man in ${}^{\P}\mathbb{H}^{\otimes 3}$ die Rechenbasis

$$
\begin{aligned}
|0\rangle^3 &= |000\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \\
|1\rangle^3 &= |001\rangle = \vdots \\
|2\rangle^3 &= |010\rangle \\
|3\rangle^3 &= |011\rangle \\
|4\rangle^3 &= |100\rangle \\
|5\rangle^3 &= |101\rangle \\
|6\rangle^3 &= |110\rangle \\
|7\rangle^3 &= |111\rangle\,.
\end{aligned}
\tag{3.46}
$$

Die Tatsache, dass die Vektoren der Rechenbasis durch Zahlen aus $\mathbb{N}_0$ identifizierbar sind, führt dazu, dass diese Basis in vielen Bereichen der Quanteninformatik wie z. B. bei Quantengattern (siehe Kap. 5) oder Algorithmen (siehe Abschn. 6.4 und 6.5) eine wichtige Rolle spielt.

Die Rechenbasen bestehen aus sogenannten *separablen* (oder Produkt-) Zuständen (siehe Satz 4.2). Dies deshalb, weil in jedem dieser Zustände des Gesamtsystems immer ein reiner Zustand des Teilsystems vorliegt. So ist z. B. im Gesamtzustand $|01\rangle$ der Rechenbasis (3.45) von ${}^{\P}\mathbb{H}^{\otimes 2}$ das erste Teilsystem im reinen Zustand $|0\rangle$, d. h. ein Beobachter dieses Teilsystems würde bei einer Messung von σ_z in seinem System immer $+1$ finden. Das zweite Teilsystem ist dabei im reinen Zustand $|1\rangle$, d. h. ein Beobachter des zweiten Teilsystems würde bei einer Messung von σ_z in seinem System immer -1 finden. Der vierdimensionale Raum ${}^{\P}\mathbb{H}^{\otimes 2}$ lässt aber auch andere Basen zu. Eine solche Basis ist die Bell-Basis.

Definition 3.7
Die **Bell-Basis** im vierdimensionalen Raum ${}^{\P}\mathbb{H}^{\otimes 2}$ besteht aus den Basisvektoren

$$
\begin{aligned}
|\Phi^{\pm}\rangle &:= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(|00\rangle \pm |11\rangle\Big) \\
|\Psi^{\pm}\rangle &:= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(|01\rangle \pm |10\rangle\Big)\,.
\end{aligned}
\tag{3.47}
$$

Übung 3.2 Man zeige, dass die Bell-Basis orthonormiert ist.
Zur Lösung siehe 3.2 im Kap. 13 Lösungen. ◀

Wie wir noch sehen werden, besteht die Bell-Basis nicht aus separablen, sondern *verschränkten* Zuständen (siehe Satz 4.2). Aus (3.87) und den Resultaten der Übung 3.3 folgt sogar, dass die Bell-Basisvektoren *maximal verschränkt* sind (siehe Definition 4.4).

Springer

http://www.springer.com/978-3-662-49079-2

Mathematik der Quanteninformatik
Eine Einführung
Scherer, W.
2016, XVIII, 351 S. 32 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-662-49079-2