2 Komplexe Zahlen

2.1 Komplexe Zahlen und die komplexe Ebene

Die allgemeine Lösung einer quadratischen Gleichung

$$a\,z^2 + b\,z + c = 0 \tag{2.1}$$

für die Unbekannte z ist

$$z = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac} \quad ; \tag{2.2}$$

dabei wird der Ausdruck $d = b^2 - 4ac$ **Diskriminante** genannt. Das heißt, die Menge der Werte für die Unbekannte z, welche die Gleichung erfüllen, besteht entweder aus einer reellen Zahl (wenn $d = 0$) oder aus einem Paar von zwei reellen Zahlen (wenn $d > 0$). Wenn allerdings die Diskriminante negativ wird, können wir im Raum der uns bisher bekannten reellen Zahlen keine Lösung finden. Um dennoch zwei Lösungen angeben zu können, erweitert man diesen Zahlenraum.

Man führt dazu eine neue Art von Zahl ein und nennt sie **imaginäre Einheit**

$$\mathrm{i} \quad \text{mit der Definition } \mathrm{i}^2 \equiv -1 \ . \tag{2.3}$$

Man kann i in gewissem Sinn als die Wurzel $+\sqrt{-1}$ betrachten oder sagen, $\sqrt{-1}$ wird durch i definiert; diese Form soll man aber vermeiden, um Missverständnissen vorzubeugen[1].

[1] Folgende Rechnung etwa ist *falsch*: $(+\sqrt{-1})(+\sqrt{-1}) = +\sqrt{(-1)(-1)} = +\sqrt{1} = 1$

C.B. Lang, N. Pucker, *Mathematische Methoden in der Physik*,
DOI 10.1007/978-3-662-49313-7_2

Ausdrücke, die ein Produkt aus einer reellen Zahl und der imaginären Einheit sind, heißen **imaginäre Zahlen**. Beispiele sind

$$\begin{aligned} \sqrt{-16} &= 4\,\mathrm{i}\,, \\ -\sqrt{-3} &= -\sqrt{3}\,\mathrm{i}\,, \\ \mathrm{i}^3 &= -\mathrm{i}\,. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Manche Produkte von imaginären Zahlen ergeben wieder reelle Zahlen, wie etwa

$$\begin{aligned} \mathrm{i}^2 &\equiv -1\,, \\ \sqrt{-2}\sqrt{-8} &= \mathrm{i}\sqrt{2}\cdot\mathrm{i}\sqrt{8} = -4\,, \\ \mathrm{i}^{4n} &= 1 \quad (n \in \mathbb{Z})\,. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Summen von reellen ($\in \mathbb{R}$) und imaginären Zahlen ($\in \mathrm{i}\mathbb{R}$) nennt man **komplexe Zahlen**, und Beispiele dafür sind etwa $(1 + 3\,\mathrm{i})$ oder $(3 - \sqrt{5}\,\mathrm{i})$. Den Raum der komplexen Zahlen bezeichnet man abgekürzt mit $\mathbb{C}$. Er ist ein Beispiel für einen (mathematischen) **Körper**.

M.2.1 Kurz und klar: Körper

In der Mathematik gibt es einen eigenen Namen für eine Menge von Objekten, die Rechenregeln folgen, wie es die reellen oder die komplexen Zahlen tun: **Körper** (Englisch: **Field**).

Wir wollen hier kurz die Definition des Körpers vorstellen. Man habe eine Menge $\mathbb{A}$ von Objekten, auf der zwei Operationen (Addition und Multiplikation) wie folgt definiert seien:

1. $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$, (assoziativ bezüglich der Addition);
   $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, (kommutativ, also eine „abelsche Gruppe" bezüglich der Addition, siehe auch Kap. 20);
   $\alpha + \beta = \gamma$, (Lösbarkeit für beliebige α, γ; das heißt, es gibt ein Nullelement und ein negatives Element bezüglich der Addition).
2. $\alpha\beta = \beta\alpha$, (kommutativ, also „abelsche Gruppe" bezüglich der Multiplikation);
   $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$, (assoziativ bezüglich der Multiplikation).
3. $\alpha\,(\beta + \gamma) = \alpha\,\beta + \alpha\,\gamma$,
   $(\beta + \gamma)\,\alpha = \beta\,\alpha + \gamma\,\alpha$, (distributives Gesetz).

Bisher ist $\mathbb{A}$ nur ein (kommutativer) **Ring**. Wenn zusätzlich gilt:

4. Es gibt ein Einheitselement „1" (ungleich dem Nullelement) bezüglich der Multiplikation: $\alpha\,1 = \alpha = 1\,\alpha$.

5. Für alle Elemente außer dem Nullelement gibt es ein inverses Element bezüglich der Multiplikation, das heißt für alle α gibt es ein geeignetes β, sodass gilt $\alpha\,\beta = 1 = \beta\,\alpha$,

so ist $\mathbb{A}$ ein Körper. Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind – ebenso wie die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ – ein Körper.

Damit können wir die Lösungen jeder denkbaren quadratischen Gleichung finden:

$$\begin{aligned} z^2 - 2\,z + 2 &= 0 \\ z &= \frac{2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4-8} = 1 \pm \frac{\sqrt{-4}}{2} = 1 \pm \mathrm{i} \\ &\Rightarrow \quad z_1 = 1 + \mathrm{i}\,, \quad z_2 = 1 - \mathrm{i}\,. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Es gibt im Fall negativer Diskriminante immer ein Lösungspaar, das sich nur durch das Vorzeichen des imaginären Anteils unterscheidet (Man nennt ein solches Paar von komplexen Zahlen komplex konjugiert, mehr darüber später).

Eine komplexe Zahl hat einen **Realteil** und einen **Imaginärteil**; man beachte, dass Realteil und Imaginärteil reelle Zahlen sind. Man schreibt zum Beispiel

$$\text{komplexe Zahl} = \underbrace{2}_{\text{Realteil}} + \underbrace{5}_{\text{Imaginärteil}}\ \mathrm{i}\,. \tag{2.7}$$

Wenn Realteil oder Imaginärteil verschwinden, vereinfacht man

$$\begin{aligned} 0 + 5\,\mathrm{i} &= 5\,\mathrm{i}\,, \\ 2 + 0\,\mathrm{i} &= 2\,. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Zwei komplexe Zahlen sind nur dann gleich, wenn sie in Real- und Imaginärteil übereinstimmen,

$$a + \mathrm{i}\,b = c + \mathrm{i}\,d \quad \text{genau dann, wenn } a = c \text{ und } b = d \text{ ist!} \tag{2.9}$$

Um eine komplexe Zahl anzuschreiben, braucht man also zwei reelle Zahlen. Entsprechend benötigt man für eine grafische Darstellung die zweidimensionale Ebene. Die komplexe Zahl $z \equiv x + \mathrm{i}\,y$ wird wie ein Punkt in der analytischen Geometrie mit den Koordinaten (x, y) eingezeichnet (vgl. Abb. 2.1).

Die x-Achse nennt man reelle Achse, die y-Achse heißt imaginäre Achse; die Ebene nennt man in diesem Zusammenhang „komplexe Ebene“, „Gaußsche Ebene“ oder **Arganddiagramm**.

Wir haben zur Darstellung kartesische (rechtwinkelige) Koordinaten gewählt. Genauso könnte man auch Polarkoordinaten r und φ wählen (vgl. Anhang A). Dabei bezeichnet

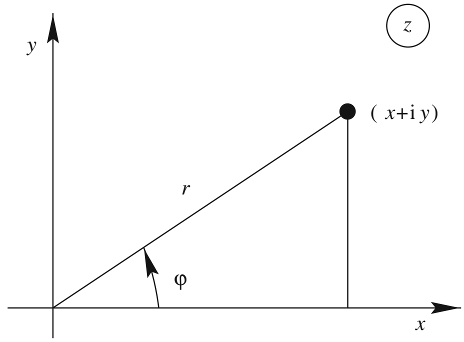

Abb. 2.1 Darstellung der komplexen Zahl in der komplexen Ebene. Um klarzustellen, dass es um die komplexe Ebene geht, schreiben wir rechts oben einen entsprechenden Hinweis $\mathbb{C}$ oder (z) hin

$0 \leq r < \infty$ den Abstand des Punktes zum Ursprung $(0, 0)$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ den Winkel des Radiusvektors mit der positiven x-Achse (Intervalle werden im Anhang A diskutiert). Da

$$x = r\cos\varphi\ , \quad y = r\sin\varphi$$

gilt, ist eine komplexe Zahl über diese Beziehung auch in „polarer Form" darstellbar (siehe Abb. 2.1). Wir haben also eine elegante Kurzschreibweise für komplexe Zahlen gefunden:

$$z = x + \mathrm{i}\,y = r\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi)\ . \tag{2.10}$$

So entspricht also $r = 2$ und $\varphi = \pi/3$ (entsprechend 60°) der komplexen Zahl

$$2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\,\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \tag{2.11}$$

oder auch in anderer Schreibweise $(1, \sqrt{3})$.

Die Umrechnungsvorschrift ergibt sich aus folgender Übersicht. Man nennt

$$\begin{aligned}
x &= \operatorname{Re} z && \text{„Realteil von } z\text{" ,}\\
y &= \operatorname{Im} z && \text{„Imaginärteil von } z\text{" ,}\\
r &= +\sqrt{x^2 + y^2} = |z| = \operatorname{mod} z && \text{„Betrag (oder Modul) von } z\text{" ,}\\
\varphi &= \arctan\frac{y}{x} = \arg(z) && \text{„Argument von } z\text{" .}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Man muss bei der Definition des Arguments Vorsicht walten lassen. Es gibt zwei Quellen für mögliche Missverständnisse. Zum einen ist der arctan üblicherweise mit dem Wertebereich $[-\pi/2, \pi/2]$ definiert. Man muss also durch Beachtung des Quadranten, in dem sich die komplexe Zahl befindet, das richtige Intervall feststellen.

M.2.2 Kurz und klar: Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen können als Paare (Tupel) von reellen Zahlen (x, y) aufgefasst werden, für die spezielle Rechenoperationen gelten:

$$\begin{aligned} a\,(x,\ y) &= (a\,x,\ a\,y)\ , \quad a \in \mathbb{R} \\ (x_1,\ y_1) + (x_2,\ y_2) &= (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)\ , \\ (x_1,\ y_1) \cdot (x_2,\ y_2) &= (x_1\,x_2 - y_1\,y_2,\ x_1\,y_2 + y_1\,x_2)\ , \\ \overline{(x_1,\ y_1)} &= (x_1,\ -y_1)\ . \end{aligned} \tag{M.2.2.1}$$

Da man $(x, 0)$ mit einer reellen Zahl identifizieren kann, kann auch $(-1, 0)$ als Quadrat eines Tupels geschrieben werden,

$$(-1, 0) = (0, 1).(0, 1)\ .$$

Durch die Identifikation von $(0, 1)$ mit einem neuen Objekt, der **imaginären Einheit** i, ist die Tupel-Darstellung äquivalent der von uns im Haupttext gewählten, üblichen Schreibweise.

Selbst wenn man den richtigen Wert aus der Lage des Quadranten bestimmt hat, gibt es die bei Winkelfunktionen bekannte Unbestimmtheit von Vielfachen der Periode $2\,\pi$.

Betrachten wir die komplexe Zahl $z = -1 - \mathrm{i}$. Der Betrag ist offenbar $r = \sqrt{2}$, das Argument zunächst aber nicht eindeutig, da ja $y/x = (-1)/(-1) = 1 = \tan\varphi$ beliebig viele Lösungen hat. Die Zahl liegt im 3. Quadranten, es ist daher

$$\varphi = \frac{5\,\pi}{4} + 2\,n\,\pi\ , \quad n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3, \ldots\ . \tag{2.13}$$

Bildlich gesprochen, kann man bei der Bestimmung des Winkels von der positiven x-Achse weg beliebig oft im oder gegen den Uhrzeigersinn um den Ursprung kreisen, bevor man den Winkel festlegt. Man trifft daher die Konvention, den Winkelwert im Bereich $[0, 2\pi)$ anzugeben und **Hauptwert** oder Hauptwinkel zu nennen. Das Argument von $(-1 - \mathrm{i})$ ist also $5\,\pi/4$, und es ist

$$\begin{aligned} z = -1 - \mathrm{i} &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\,\pi}{4} + 2n\,\pi\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{5\,\pi}{4} + 2n\,\pi\right)\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\,\pi}{4} + \mathrm{i}\,\sin\frac{5\,\pi}{4}\right)\ . \end{aligned} \tag{2.14}$$

Ein Paar von komplexen Zahlen, die sich nur durch das Vorzeichen des Imaginärteils unterscheiden, nennt man **komplex konjugiert**. Die entsprechende Operation heißt „komplex konjugieren" und entspricht eben der Umkehr des Vorzeichens des Imaginärteils der komplexen Zahl. Die zu $z = x + \mathrm{i}y$ komplex konjugierte Zahl $\overline{z}$ ist also $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$. Das ist offenbar eine reflexive Beziehung, es ist $\overline{z}$ zu z komplex konjugiert, aber auch z zu $\overline{z}$. Oft schreibt man auch z^* statt $\overline{z}$. In der komplexen Ebene entspricht diese Operation der Spiegelung an der reellen Achse. Es ist etwa

$$\begin{aligned} z &= 2 + 3\,\mathrm{i}\,, \qquad \text{wenn} \qquad \overline{z} = 2 - 3\,\mathrm{i}\,, \\ u &= 2 - 3\,\mathrm{i}\,, \qquad \text{wenn} \qquad \overline{u} = 2 + 3\,\mathrm{i}\,. \end{aligned} \tag{2.15}$$

In Polarform entspricht das komplex Konjugieren der Vorzeichenumkehr des Arguments. Der Betrag ändert sich dabei nicht.

$$\begin{aligned} z &= r\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi)\ , \\ \overline{z} &= r\,(\cos\varphi - \mathrm{i}\,\sin\varphi) = r\,(\cos(-\varphi) + \mathrm{i}\,\sin(-\varphi))\ . \end{aligned} \tag{2.16}$$

Um das Argument wieder in den üblichen Bereich $[0, 2\pi)$ zu bringen, sollte man streng genommen $(2\pi - \varphi)$ als Argument von $\overline{z}$ angeben. Wir, und die meisten Naturwissenschaftler mit uns, nehmen das aber nicht so genau.

Durch geeignete Kombinationen von z und $\overline{z}$ kann man Real- und Imaginärteil und auch den Betrag von z ausdrücken,

$$\begin{aligned} z + \overline{z} &= 2\,\mathrm{Re}\,z = 2\,x\ , \\ z - \overline{z} &= 2\,\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,z = 2\,y\,\mathrm{i}\ , \\ z\overline{z} &= (x + \mathrm{i}\,y)\,(x - \mathrm{i}\,y) = x^2 + y^2 = r^2 = |z|^2 \geq 0\ , \\ |z| &= \sqrt{z\overline{z}}\ . \end{aligned} \tag{2.17}$$

Zusammengesetzte Ausdrücke werden durch komplex Konjugieren aller Teilausdrücke komplex konjugiert, also

$$\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2 \tag{2.18}$$

oder für komplexe $f,\ g$

$$z = f + \mathrm{i}g \quad \Leftrightarrow \quad \overline{z} = \overline{f} - \mathrm{i}\,\overline{g}\ . \tag{2.19}$$

Beispiel

Man findet mit den obigen Regeln

$$z = \frac{2 - 3\,\mathrm{i}}{\mathrm{i} + 4} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{z} = \frac{2 + 3\,\mathrm{i}}{-\mathrm{i} + 4}\ .$$

Der Betrag einer komplexen Zahl lässt sich nach (2.17) wie folgt berechnen:

$$\left|\frac{\sqrt{5}+3\,\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right| = \left(\frac{\left(\sqrt{5}+3\,\mathrm{i}\right)}{(1-\mathrm{i})}\frac{\left(\sqrt{5}-3\,\mathrm{i}\right)}{(1+\mathrm{i})}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{14}{2}} = \sqrt{7}\,. \qquad \square$$

Algebra mit komplexen Zahlen ist wie gewöhnliche Algebra, nur eben unter Beachtung der zusätzlichen Rechenregel $\mathrm{i}^2 = -1$.

Beispiel

Wir bestimmen

$$(1-\mathrm{i})^2 = 1 - 2\,\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 = 1 - 2\,\mathrm{i} - 1 = -2\,\mathrm{i}\,.$$

Brüche kann man leicht auch in die Form $a + \mathrm{i}\,b,\quad a, b \in \mathbb{R}$ bringen: Man erweitert sie durch Multiplikation von Zähler und Nenner mit dem komplex Konjugierten des Nenners, also beispielsweise

$$\frac{2+\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}} = \frac{(2+\mathrm{i})}{(3-\mathrm{i})}\frac{(3+\mathrm{i})}{(3+\mathrm{i})} = \frac{6+5\,\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{9-\mathrm{i}^2} = \frac{5+5\,\mathrm{i}}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\,. \qquad \square$$

Komplexe Zahlen entsprechen Paaren von reellen Zahlen. Daher sind Gleichungen mit komplexen Zahlen eigentlich immer Paare von reellen Gleichungen, je eine für den reellen Anteil und eine für den imaginären Anteil der Gleichung.

Beispiel

Die Gleichung

$$z^2 = 2\,\mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \quad (x + \mathrm{i}\,y)^2 = 2\,\mathrm{i}$$

kann explizit als

$$x^2 - y^2 + 2\,\mathrm{i}\,y\,x = 2\,\mathrm{i}$$

geschrieben werden und entspricht also zwei Gleichungen

$$x^2 - y^2 = 0\,, \quad x\,y = 1\,.$$

Dieses Gleichungspaar hat zwei reelle Lösungen $(x,\ y)_1 = (1, 1), (x,\ y)_2 = (-1, -1)$, also $z_1 = 1 + \mathrm{i} = -z_2$. $\square$

Die Lösungsmenge solcher Gleichungen beschreibt häufig einfache geometrische Objekte in der Ebene.

Beispiel

$\|z\| = 3$	$\Leftrightarrow$	$\sqrt{x^2 + y^2} = 3$	der Rand eines Kreises mit dem Radius 3 (Kreisgleichung)
$\|z - 1\| = 2$	$\Leftrightarrow$	$(x-1)^2 + y^2 = 4$	der Rand eines Kreises um den Punkt (1,0) mit dem Radius 2
$\arg z = \frac{\pi}{4}$			ein Halbstrahl vom Ursprung weg in die Richtung, die mit der x-Achse einen Winkel von 45° einschließt
$\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}$			die offene (ohne Rand) Halbebene rechts von $x = 1/2$

□

Entsprechend lassen sich auch Teilchenbahnen, die in der Ebene verlaufen, gut durch komplexe Variablen darstellen. Es ist dies ein Beispiel für die **Parametrisierung** (Parameterdarstellung) einer Kurve. Die Koordinaten der Bahnkurve werden als Funktionen eines Parameters, zum Beispiel der Zeit t, dargestellt.

Beispiel

So sei etwa die Bahn eines Teilchens in (x, y)-Ebene in Abhängigkeit von der Zeit t

$$z(t) = \frac{\mathrm{i} + 2t}{t - \mathrm{i}} = \left(\frac{2t^2 - 1 + 3t\,\mathrm{i}}{t^2 + 1}\right)$$

gegeben. Realteil und Imaginärteil sind einfach die Koordinaten $(x,\ y)$, und Geschwindigkeit und Beschleunigung können durch entsprechende Ableitungen nach der Zeit bestimmt werden:

$$v = \left|\frac{dz}{dt}\right| \ , \ a = \left|\frac{d^2z}{dt^2}\right| \ .$$

In unserem Beispiel ist daher

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2(t - \mathrm{i}) - (\mathrm{i} + 2t)}{(t - \mathrm{i})^2} = \frac{-3\,\mathrm{i}}{(t - \mathrm{i})^2} \ ,$$

und der Betrag der Geschwindigkeit ergibt sich zu

$$v = \left|\frac{dz}{dt}\right| = \sqrt{\frac{(-3\mathrm{i})(+3\mathrm{i})}{(t - \mathrm{i})^2(t + \mathrm{i})^2}} = \frac{3}{t^2 + 1} \ .$$

□

2.2 Komplexe Reihen

In Kap. 1 haben wir unendliche Reihen diskutiert. Unendliche Reihen mit komplexen Koeffizienten oder mit Potenzen der komplexen Variablen z werden mit denselben Methoden untersucht. Man betrachtet bei der Partialsumme einfach Realteil und Imaginärteil getrennt:

$$S_n = X_n + \mathrm{i}\, Y_n \; . \tag{2.20}$$

Konvergenz liegt vor, wenn beide Teile konvergieren,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S = X + \mathrm{i}\, Y \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} X_n = X \; , \quad \lim_{n\to\infty} Y_n = Y \; . \tag{2.21}$$

Absolute Konvergenz liegt vor, wenn die Reihe der Absolutbeträge der Glieder der komplexen Reihe konvergiert. Alle Konvergenzkriterien können sinngemäß angewandt werden, wenn man den früher nur für reelle Zahlen definierten Absolutbetrag nun als Absolutbetrag für komplexe Zahlen interpretiert.

Beispiel

Wir wollen die Reihe

$$1 + \frac{1+\mathrm{i}}{2} + \frac{(1+\mathrm{i})^2}{4} + \cdots \frac{(1+\mathrm{i})^n}{2^n} + \cdots$$

mit Hilfe des Quotientenkriteriums auf ihre Konvergenzeigenschaften überprüfen. Es ist

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{n\to\infty} \rho_n = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(1+\mathrm{i})^{n+1}}{2^{n+1}} \frac{2^n}{(1+\mathrm{i})^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1+\mathrm{i}}{2} \right| \\ &= \left| \frac{1+\mathrm{i}}{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \; .\end{aligned}$$

Diese Reihe ist also absolut konvergent. □

Auch Potenzreihen

$$\sum a_n z^n \quad \text{mit } a_n ,\; z \in \mathbb{C}$$

können entsprechend untersucht werden. Ja, man kann im Grunde sogar die bekannten reellen Potenzreihen als Spezialfall von komplexen Potenzreihen ($z = x + \mathrm{i}y, y = 0$) ansehen. Für die Reihe

$$1 - z + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} \cdots$$

ergibt sich, mit dem Quotientenkriterium untersucht,

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{z\, n}{n+1} \right| = |z| < 1$$

ein kreisförmiges Konvergenzgebiet $|z| < 1$ oder $\sqrt{x^2 + y^2} < 1$. Der Rand muss wieder gesondert untersucht werden. Dies ist nicht immer einfach, und wir verzichten in unserem Beispiel darauf. Man kann zeigen, dass die Reihe nur bei $z = -1$ divergiert.

Die Kreisform des Konvergenzgebiets ist typisch für Potenzreihen. Man bezeichnet daher auch ρ als Konvergenzradius. Wenn man die Potenzen durch spezielle Funktionen eines orthogonalen Funktionensystems (siehe Funktionalanalysis, Kap. 12) ersetzt, so ändert sich auch die Form des entsprechenden Konvergenzgebiets. Für Legendre-Reihen hat es zum Beispiel Ellipsenform.

Alle Aussagen aus Abschn. 1.3 über Konvergenz von Potenzreihen sind weiterhin gültig. Man ersetze einfach den Begriff „Konvergenzintervall" durch „Konvergenzgebiet" (oder „Konvergenzkreis").

Beispiel

Die Reihe

$$1 + \mathrm{i}\,z + \frac{(\mathrm{i}\,z)^2}{2!} + \frac{(\mathrm{i}\,z)^3}{3!} + \cdots = 1 + \mathrm{i}\,z - \frac{z^2}{2!} - \frac{\mathrm{i}\,z^3}{3!} + \cdots$$

ist für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergent, da ja gilt, dass

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(\mathrm{i}\,z)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{(\mathrm{i}\,z)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\mathrm{i}\,z}{n+1} \right| = 0\,. \qquad \square$$

C.2.1 … und auf dem Computer: Mandelbrots Apfelmännchen

Im Abschnitt über Folgen haben wir festgestellt, dass es oft schwer oder sogar unmöglich ist, die Art der Häufungspunkte zu bestimmen. Bei der Feigenbaum-Folge (in C.1.2) etwa fanden wir sowohl konvergentes Verhalten als auch verschiedene Arten von divergentem Verhalten, abhängig von einem Kontrollparameter. Die Häufungspunkte traten isoliert auf, aber es gab auch Bereiche chaotischen Verhaltens.

Eine Verallgemeinerung dieser Fragestellung führt zu so genannten fraktalen Punktmengen. Der Begriff **Fraktal** wurde von Benoit Mandelbrot geprägt, der sich eingehend mit diesen Strukturen beschäftigt hat [1]. Die sich ergebenden Punktmengen haben eine faszinierende Schönheit, die in vielen Bildbänden festgehalten wurde [2].

Fraktale Punktmengen heißen auch **Julia-Mengen**. Die vielleicht bekannteste davon ist das „Apfelmännchen", auch „Mandelbrot-Menge" genannt. Diese Menge wird mit Hilfe der Häufungspunkte der Folge komplexer Zahlen

$$z_0 = 0\,,\ z_{n+1} = z_n^2 + c\,, \quad z, c \in \mathbb{C}\,, \tag{C.2.1.1}$$

http://www.springer.com/978-3-662-49312-0

Mathematische Methoden in der Physik
Lang, C.B.; Pucker, N.
2016, XXII, 859 S. 192 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-662-49312-0