Kapitel 1
Terme und Gleichungen

Auch wenn das Wort „Term" ein wenig an Thermalbäder oder gar an den Terminator erinnert, so hat es in Wahrheit doch eine ganz andere Bedeutung, die natürlich etwas mit Mathematik zu tun hat, mit mathematischen Ausdrücken und Formeln. Kurz gesagt, ist „Term" nur eine vornehmere Formulierung für „Rechenausdruck", und da man in der Mathematik ständig rechnet und andauernd irgendwelche Ausdrücke auf dem Papier stehen, hat man es nun mal häufig mit Termen zu tun. Und sie sind auch tatsächlich recht praktisch: Mit Termen kann man systematisch arbeiten, man kann sie vor allem vereinfachen, um leichter mit ihnen umgehen zu können, und erste Verfahrensweisen dafür werden Sie gleich kennenlernen.

Und nicht nur das. Es wäre nicht sehr sinnvoll, eine Methode nur zu lernen, damit man sie eben kennt, Sie sollen auch sehen, dass man etwas damit anfangen kann. Der einfachste Anwendungsbereich von Termen dürfte im Lösen sogenannter linearer Gleichungen bestehen, und deshalb werde ich im Anschluss an die Termvereinfachung noch über solche Gleichungen reden und gleich darauf die eng verwandten linearen Funktionen behandeln. Auch sie sind nicht weiter schlimm und kein Grund zur Beunruhigung. Für den Anfang sehen wir uns aber erst einmal an, wie man mit Termen umgeht und wie man sich – mit etwas Glück – unangenehme Terme vom Hals schaffen kann.

1.1 Terme

Manchmal kommt man nicht daran vorbei, längliche und komplizierte Rechnungen duchzuführen, Beispiele dafür finden Sie auch im täglichen Leben. Denken Sie nur einmal an die Berechnung Ihres Nettogehalts aus Ihrem Bruttoeinkommen: Das geht sicher nicht von jetzt auf gleich durch ein oder zwei kleine Rechenschritte, sondern erfordert einiges an Aufwand. Aufgrund der Steuerklasse und des Familienstandes werden die Steuern berechnet, der Krankenkassenbeitrag hängt von der Krankenkasse ab, die sich an Ihrem Geld erfreut, und auch Arbeitslosen- und Rentenversicherung wollen bezahlt sein. Es handelt sich also bei der Berechnung des Nettogehalts um einen Prozess, der sich über mehrere Stufen hinzieht und nicht im Vorbeigehen zu erledigen ist.

Nun kann man so ein mehrstufiges Berechnungsverfahren sicher verbal formulieren und dann die verbalen Rechenanweisungen Schritt für Schritt abarbeiten. Das

T. Rießinger, *Gleichungen, Umformungen, Terme*, Springer-Lehrbuch,
DOI 10.1007/978-3-662-49335-9_1

hat aber den Nachteil, dass eine solche Beschreibung recht schnell langwierig und unübersichtlich wird und zudem gerade durch die Beschreibung in üblicher Sprache Gelegenheiten für Missverständnisse geschaffen werden. Besser wäre es, einen komplizierten und mehrstufigen Rechenvorgang in einer klaren und völlig interpretationsfreien Weise aufschreiben zu können, damit ihn weltweit jeder verstehen kann, egal ob Asiate oder Europäer. Damit würde nicht nur die Anzahl der Gerichtsverfahren wegen unklarer Formulierungen reduziert, sondern Sie können sich auf diese Weise vielleicht auch viel Arbeit ersparen, weil es neben den Asiaten und Europäern auch noch Computer gibt, die klar formulierte Rechenvorschriften verstehen und ausführen können. Mit einem Besinnungsaufsatz kann kein Computer etwas anfangen, mit einer knackigen Formel, einem anständigen Term dagegen schon. Sehen wir uns deshalb einmal an, wie man eine verbale Beschreibung einer Rechenvorschrift in einen Term übersetzen kann.

Beispiel 1.1
Zu 2 soll $\frac{1}{2}$ addiert und vom Ergebnis 0,25 subtrahiert werden. Das Resultat soll dann mit 3 multipliziert werden, woraufhin 17 hinzuaddiert wird. Am Ende wird das Ganze durch 4 geteilt. Na gut, das kann ich machen. Zunächst ist $2+\frac{1}{2} = \frac{4}{2}+\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$. Davon soll ich 0,25 abziehen, und weil $0{,}25 = \frac{1}{4}$ ist, ergibt das $\frac{5}{2}-\frac{1}{4} = \frac{10}{4}-\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$. Noch bin ich nicht fertig, denn das bisher erreichte Resultat soll mit 3 multipliziert werden, was zu $3 \cdot \frac{9}{4} = \frac{27}{4}$ führt, und anschließend um 17 erhöht werden, und das liefert $\frac{27}{4} + 17 = \frac{27}{4} + \frac{68}{4} = \frac{95}{4}$. Jetzt bin ich fast schon fertig, es fehlt nur noch das abschließende Teilen durch 4 mit dem Resultat $\frac{95}{4} : 4 = \frac{95}{16}$. So kann man das machen, aber es ist doch recht schwerfällig und Sie können leicht den Überblick verlieren. Hat man dagegen alles auf einen Blick vor sich, ohne störende Füllwörter, dann besteht die Chance auf höhere Eindeutigkeit und Übersichtlichkeit. Die ersten Operationen waren eine Addition und eine Subtraktion, die ich zusammenfassen kann zu $2 + \frac{1}{2} - 0{,}25$. Was immer dabei auch herauskommen mag, es wird in jedem Fall eine Zahl sein, die ich mit 3 multiplizieren soll. Ich will das jetzt gar nicht ausrechnen, sondern nur knapp aufschreiben, was auszurechnen ist: erst $2 + \frac{1}{2} - 0{,}25$ und dann die Multiplikation mit 3. Den zuerst notierten Ausdruck setze ich zwischen zwei Klammern, damit er als Einheit gekennzeichnet wird, und diesen geklammerten Ausdruck muss ich dann mit 3 multiplizieren, also

$$3 \cdot \left(2 + \frac{1}{2} - 0{,}25\right).$$

Schon ganz gut, aber noch nicht das Ende. Auf das Ergebnis der Multiplikation muss ich ja noch 17 addieren, was mich zu

$$3 \cdot \left(2 + \frac{1}{2} - 0{,}25\right) + 17$$

führt. Hier musste ich keine weitere Klammer setzen, denn es gilt noch immer das alte Prinzip „Punkt- vor Strichrechnung“. Erst muss ich also den geklammerten

Ausdruck mit 3 multiplizieren und anschließend 17 addieren; das Prinzip macht eine umgekehrte Reihenfolge unmöglich. Noch fehlt aber der letzte Schritt, nämlich das abschließende Teilen des Erreichten durch 4. Darf ich einfach

$$3 \cdot \left(2 + \frac{1}{2} - 0{,}25\right) + 17 : 4$$

schreiben? Darf ich nicht, und den Grund habe ich gerade selbst geliefert. Denken Sie an das Prinzip „Punkt- vor Strichrechnung“: Wenn ich die Rechnung so durchführe, dann muss ich die 3 mit dem Klammerausdruck multiplizieren, dann 17 durch 4 teilen und schließlich die Summe aus beiden errechneten Teilergebnissen bilden. So war's aber nicht gedacht, ich sollte ja das bisher erreichte Ergebnis durch 4 teilen. Deshalb muss ich eben dieses erreichte Ergebnis wieder als eine Einheit kennzeichnen, und das mache ich mit zwei weiteren Klammern. Wenn ich

$$\left(3 \cdot \left(2 + \frac{1}{2} - 0{,}25\right) + 17\right) : 4$$

schreibe, dann wird alles, was zwischen der ersten und der letzten Klammer steht, als eine Einheit betrachtet, und das Ergebnis aller Rechnungen innerhalb der beiden Klammern wird am Ende durch 4 geteilt. Und so habe ich mit

$$\left(3 \cdot \left(2 + \frac{1}{2} - 0{,}25\right) + 17\right) : 4$$

meine „sprachfreie“ Formel gefunden.

So etwas nennt man einen Term. Es ist nichts weiter als ein kompakter Rechenausdruck, der mithilfe eindeutig definierter Rechenzeichen und Klammern einen Rechenvorgang beschreibt, wobei das Prinzip „Punkt- vor Strichrechnung“ berücksichtigt wird.

Term
Unter einem Term versteht man einen Rechenausdruck, der einen Rechenvorgang beschreibt. Er kann mithilfe der bekannten Rechenzeichen und mit Klammern definiert werden.

Sie haben eben gesehen, wie man aus einer verbalen Formulierung einer Rechenvorschrift einen anständigen Term bastelt. Und was macht man mit ihm, wenn man ihn erst mal hat? Ganz klar, man rechnet ihn aus, und wie das geht, zeigt das nächste Beispiel.

Beispiel 1.2
Ich verwende den Term

$$\left(3 \cdot \left(2 + \frac{1}{2} - 0{,}25\right) + 17\right) : 4,$$

den ich gerade entwickelt hatte. Um seinen Wert auszurechnen, habe ich nicht viele Wahlmöglichkeiten, denn der innerste Klammerausdruck soll mit 3 multipliziert werden, und das kann ich kaum schaffen, ohne den Wert des innersten Ausdrucks zu kennen. Also rechnet man zuerst $2 + \frac{1}{2} - 0{,}25 = \frac{9}{4}$; den Rechenweg dazu hatte ich schon im vorigen Beispiel aufgeschrieben. Nun ist die innerste Klammer erledigt und kann mit 3 multipliziert werden. Das ergibt $3 \cdot \frac{9}{4} = \frac{27}{4}$. In der äußeren Klammer wird noch von mir verlangt, darauf 17 zu addieren, und das liefert $\frac{27}{4} + 17 = \frac{95}{4}$. Damit habe ich auch schon den Wert des äußeren Klammerausdrucks berechnet, und das ist auch dringend nötig, denn dieser Wert muss ja noch durch 4 geteilt werden, was wieder zu dem Endergebnis $\frac{95}{16}$ führt.

Das war natürlich nichts Neues, die Rechnungen waren die gleichen wie eben. Wichtig daran ist, dass man diesen Rechenweg in einer einzigen, aus mehreren Schritten bestehenden Rechnung zusammenfassen kann, die den Weg von innen nach außen dokumentiert. Und das geht so:

$$\begin{aligned}\left(3 \cdot \left(2 + \frac{1}{2} - 0{,}25\right) + 17\right) : 4 &= \left(3 \cdot \left(\frac{8}{4} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4}\right) + 17\right) : 4 \\ &= \left(3 \cdot \frac{9}{4} + 17\right) : 4 \\ &= \left(\frac{27}{4} + 17\right) : 4 \\ &= \frac{95}{4} : 4 = \frac{95}{16}.\end{aligned}$$

Wie Sie sehen, entspricht diese Rechnung genau dem verbal beschriebenen Rechenweg. Erst habe ich den Wert der inneren Klammer ausgerechnet, dann diesen Wert mit 3 multipliziert, darauf 17 addiert und schließlich alles durch 4 geteilt. Der Vorteil ist nur, dass ich mir all diese verbalen Formulierungen sparen und sofort den formelmäßigen Rechenweg aufschreiben kann.

Damit haben wir schon einen wesentlichen Punkt im Umgang mit Termen herausgefunden. Sie dienen dazu, komplexere Rechnungen so aufzuschreiben, dass man sie Schritt für Schritt durchführen und schließlich zu einem Ergebnis bringen kann. Damit Sie mir das auch glauben, zeige ich Ihnen noch ein Beispiel.

Beispiel 1.3

Zur Berechnung von $47 + 3 \cdot (19 - 2 \cdot (50 - 38) \cdot (12 + 10))$ schreibe ich erst einmal den vollständigen Rechenweg auf und sage dann noch ein paar Worte dazu. Es gilt:

$$\begin{aligned}47 + 3 \cdot (19 - 2 \cdot (50 - 38) \cdot (2 + 10)) &= 47 + 3 \cdot (19 - 2 \cdot 12 \cdot 12) \\ &= 47 + 3 \cdot (19 - 288) \\ &= 47 + 3 \cdot (-269) \\ &= 47 - 807 = -760.\end{aligned}$$

Die Vorgehensweise ist wieder die gleiche. Ganz innen habe ich die beiden Klammerausdrücke $(50-38)$ und $(2+10)$, die ich zuerst ausgerechnet habe, das ergab in beiden Fällen 12. Anschließend habe ich mich um all das gekümmert, was innerhalb der nächsten Klammern steht, also um $19 - 2 \cdot 12 \cdot 12$, und habe nach dem Prinzip „Punkt- vor Strichrechnung" zuerst die Multiplikationen durchgeführt und dann das Produkt von 19 abgezogen. Das gleiche Prinzip musste ich dann gleich noch einmal verwenden, um mich für die Rechnung $3 \cdot (-269)$ zu entscheiden, und dass ich am Ende $47 - 807$ ausgerechnet habe, bedarf wohl keiner weiteren Erklärung

So geht das immer. Sie müssen sich zuerst der Klammern annehmen, und dabei stets von innen nach außen vorgehen, also die inneren Klammern zuerst vereinfachen. Ansonsten müssen Sie nur die Regel „Punkt- vor Strichrechnung" beachten, und dann kann kaum noch etwas schiefgehen. Beim Umgang mit Potenzen ist noch ein wenig Vorsicht geboten, aber dazu komme ich später.

Man könnte denken, dass über Terme jetzt so gut wie alles gesagt ist, da Sie ja nun wissen, wie man sie ausrechnet. Weit gefehlt. Bisher haben wir hier nur Terme betrachtet, in denen nichts anderes vorkam als schlichte Zahlen, Klammern und Rechenzeichen. Das muss nicht immer so sein; richtig interessant werden die Terme erst, wenn sie auch noch sogenannte Variablen enthalten.

Beispiel 1.4
Ein Ladeninhaber will zu einem bestimmten Artikel die Auswirkungen verschiedener Rabatte auf den Preis berechnen. Der Grundpreis des Artikels beträgt 200 Euro, und die Rabatte werden natürlich wie üblich in Prozent angegeben. Nun weiß er aber noch nicht, für welchen Prozentsatz er sich entscheiden soll, und daher bezeichnet er den Prozentsatz mit dem Buchstaben p. Nach den Formeln der Prozentrechnung, die Sie sicher einmal gelernt haben, ergibt sich dann ein Rabatt in Höhe von $\frac{p}{100} \cdot 200 = 2 \cdot p$. Für $p = 10$ beträgt somit der Rabatt $2 \cdot p = 20$, für $p = 15$ dagegen $2 \cdot p = 30$. Welchen Prozentsatz auch immer der Inhaber wählt, er hat eine einfache Formel zur Hand, in die er den Prozentsatz p einfach nur noch einsetzen muss, um den konkreten Rabatt zu finden. Der Ausdruck $2 \cdot p$ besteht nur aus einem Rechenzeichen, einer konkreten Zahl und einem Bezeichner p, der eine Zahl darstellen soll. Daher ist auch $2 \cdot p$ ein Rechenausdruck, also ein Term.

Die Größe p in diesem Beispiel ist flexibel, sie ist variabel, man kann alles Mögliche in sie einsetzen, und deshalb bezeichnet man sie als eine *Variable*. Terme dürfen also auch Variablen enthalten, die noch nicht mit einer konkreten Zahl belegt sind, aber jederzeit mit einem Wert versehen werden können. Eine Variable vertritt eine Zahl, hält ihr sozusagen den Platz frei, weshalb man sie auf Deutsch auch oft als *Platzhalter* bezeichnet.

Variablen
Terme können auch Variablen enthalten, wobei eine Variable ein Platzhalter für eine Zahl ist, an dessen Stelle jederzeit eine Zahl geschrieben werden kann. Erst wenn alle Variablen durch konkrete Zahlen ersetzt worden sind, kann man den Wert des Terms berechnen.

Hier sollten Sie allerdings nicht zu pessimistisch sein. Sicher: Den endgültigen Wert eines Terms können Sie erst ausrechnen, wenn die in ihm vorkommenden Variablen alle mit Zahlenwerten versehen sind. Aber das heißt nicht, dass Sie mit so einem Term überhaupt nichts anfangen könnten. Tatsächlich ist es mit etwas Glück möglich, komplizierte Terme auch dann schon zu vereinfachen, wenn noch nicht alle Zahlenbelegungen der Variablen bekannt sind. Wie das geht, sehen wir uns im nächsten Abschnitt an.

Übungen

Übung 1.1 Berechnen Sie:

a) $9 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(5 + \frac{8}{9} : \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{9}\right)\right)$,
b) $\left(\frac{23}{17} - \frac{9}{8} \cdot 2\right) \cdot (37 - (12 \cdot 3 + 1))$,
c) zu 12 soll das Produkt von $\frac{3}{4}$ und 28 addiert werden. Anschließend wird das Ergebnis durch 11 geteilt, und von diesem Ergebnis wird 3 subtrahiert. Schreiben Sie die Rechnung als Term und berechnen Sie das Ergebnis.

1.2 Vereinfachung von Termen

Ich fange vorsichtig an und beschränke mich für den Moment auf Terme, die nur eine einzige Variable enthalten; später wird sich das ändern. Ein Beispiel wird Ihnen zeigen, worauf ich hinaus will.

Beispiel 1.5
Ein Artikel wird in aller Regel kistenweise verkauft, wobei in jeder Kiste die gleiche Anzahl von Artikeln enthalten ist. Wie viele Artikel das pro Kiste sind, weiß ich nicht, und deshalb bezeichne ich die Anzahl der Artikel pro Kiste mit dem Buchstaben x, den man immer gern einsetzt, wenn man eine Größe ins Spiel bringen will, deren Wert man noch nicht kennt. Nun liegen noch 2 Exemplare meines Artikels, die irgendwann aus einer Kiste herausgefallen sind, lose herum und können ebenfalls verkauft werden. In einem ersten Schwung werden 8 Kisten verkauft, dann nimmt jemand die beiden Einzelexemplare mit, und am Ende können noch einmal 5 Kisten unters Volk gebracht werden. Wie viele Exemplare meines Artikels waren das? Ganz einfach. Jede Kiste enthält x Exemplare, also wird man in 8 Kisten genau $8 \cdot x$ Exemplare finden. Zu diesen $8 \cdot x$ Exemplaren muss ich die 2 Stück addieren, die einzeln über den Ladentisch gegangen sind, das ergibt dann $8 \cdot x + 2$. Und schließlich waren es noch einmal 5 Kisten mit insgesamt $5 \cdot x$ Exemplaren, die den Kunden angedreht wurden, was zu einem Gesamtabsatz von $8 \cdot x + 2 + 5 \cdot x$ führt. Könnte man das nicht etwas einfacher sagen? Kein Problem. Die Summe aus 8 Kisten und 5 Kisten beträgt natürlich 13 Kisten, in denen sich $13 \cdot x$ Exemplare meines Artikels befinden. Entprechend ist also $8 \cdot x + 5 \cdot x = 13 \cdot x$, denn das beschrieb

gerade die Anzahl der Exemplare. Statt $8 \cdot x + 2 + 5 \cdot x$ kann ich also auch den wesentlich einfacheren Ausdruck $13 \cdot x + 2$ verwenden; dem Ladeninhaber wird das ziemlich egal sein. Sind beispielsweise 10 Exemplare in einer Kiste, so ist $x = 10$, und der Absatz des heutigen Tages liegt bei 132 Exemplaren, egal welche Formel Sie nehmen. Hat man dagegen 20 Exemplare in eine Kiste gepackt, so ergibt sich mit $x = 20$ sogar ein Absatz in Höhe von 262 Exemplaren, der die Augen des Chefs zum Leuchten bringt.

Sie sehen wohl, worauf es hier ankommt. Die beiden Ausdrücke $8 \cdot x$ und $5 \cdot x$ kann ich zu $13 \cdot x$ zusammenfassen, weil hier Gleichartiges adddiert wird: 8 Dinge und 5 Dinge der gleichen Art ergeben nun mal 13 Dinge, egal wie die Dinge nun heißen mögen. Meistens schreibt man übrigens $13x$ anstatt umständlich $13 \cdot x$, und hat dann die Beziehung $8x + 2 + 5x = 13x + 2$. Weiter geht hier nichts. Sie können $13x$ und 2 zu nichts auf der Welt zusammenfassen, solange Sie den Wert von x nicht kennen, genauso wenig wie man aus ganzen Kartons und Einzelstücken eine einheitliche Mengenangabe erzeugen kann, wenn man nicht weiß, wie viele Teile in einem Karton gelagert werden. Über die Gleichung $8x + 2 + 5x = 13x + 2$ kommen Sie nicht hinaus, aber das ist ja auch schon mal besser als nichts.

Wenn Sie also einem Term mit einer Variablen begegnen, dann ordnen Sie am besten die in dem Term vorkommenden Ausdrücke zuerst einmal danach, ob in ihnen ein x vorkommt oder nicht, und dann können Sie genau wie eben zusammenfassen. Zwei Beispiele werden Ihnen dieses Prinzip noch einmal verdeutlichen.

Beispiel 1.6

a) Wie kann man $12x + 4 - 8x + 8$ kürzer schreiben? Ich sortiere zuerst etwas um und schreibe meinen Term als $12x - 8x + 4 + 8$. Nun fasse ich separat die Ausdrücke mit x und die Ausdrücke ohne x zusammen. Das ergibt einerseits $12x - 8x = 4x$ und andererseits $4 + 8 = 12$. Also habe ich insgesamt $12x + 4 - 8x + 8 = 4x + 12$. Das kann man natürlich auch ohne jede verbale Erklärung kurz aufschreiben in der Rechnung:

$$12x + 4 - 8x + 8 = 12x - 8x + 4 + 8 = 4x + 12.$$

b) Variablen müssen nicht immer x heißen, jeder Buchstabe ist willkommen. Wie sieht es beispielsweise aus mit $4 + 2 \cdot 6a - 8 + 3a \cdot 3$? Dieser Term macht einen komplizierten Eindruck, aber das täuscht. Die a-belasteten Teile fasse ich zusammen zu $2 \cdot 6a + 3a \cdot 3$. Nun ist aber $2 \cdot 6a = 2 \cdot 6 \cdot a = 12 \cdot a = 12a$, denn ein mehrfaches Produkt rechnet man aus, indem man einfach der Reihe nach die Multiplikationen durchführt. Entsprechend ist dann $3a \cdot 3 = 3 \cdot a \cdot 3 = 9a$, und daraus folgt, dass $2 \cdot 6a + 3a \cdot 3 = 12a + 9a = 21a$ gilt. Der Rest ist einfach. Die Bestandteile ohne ein a lauten $4-8 = -4$, und das ergibt insgesamt $4 + 2 \cdot 6a - 8 + 3a \cdot 3 = 21a - 4$. Zusammengefasst lautet die Rechnung $4 + 2 \cdot 6a - 8 + 3a \cdot 3 = 2 \cdot 6a + 3a \cdot 3 + 4 - 8 = 21a - 4$.

Das ist ein guter Zeitpunkt, um einmal kurz Luft zu holen. In beiden Beispielen habe ich nämlich etwas getan, das man immer wieder tut, ohne großartig darüber nachzudenken, obwohl es einmal einen genaueren Blick wert ist. Sobald Sie innerhalb eines Terms die einzelnen Ausdrücke sortieren, um die variablenbehafteten und die variablenlosen Teile zu jeweils einem Block zusammenzufassen, wenden Sie einige Regeln an, die Ihnen vermutlich so selbstverständlich vorkommen, dass sie Ihnen gar nicht aufgefallen sind. Im ersten Beispiel musste ich $12x$ und $-8x$ zusammenbringen, obwohl sie gar nicht nebeneinander standen, und das war auch überhaupt kein Problem, da man die Reihenfolge beim Addieren beliebig vertauschen kann. Es ist egal, ob Sie $17 + 9$ oder $9 + 17$ ausrechnen, herauskommen wird beide Male 26. Diese Regel nennt man etwas hochtrabend das *Kommutativgesetz* der Addition.

Natürlich gilt so ein Gesetz nicht nur für die Addition, sondern auch für die Multiplikation: $3 \cdot 5 = 5 \cdot 3 = 15$, die Reihenfolge der Faktoren bei der Multiplikation ist ganz egal. Und wie war das bei meinem zweiten Beispiel mit $2 \cdot 6a$? Hier soll 2 mit $6a$ multipliziert, also – wenn ich einmal Klammern einfügen darf – $2 \cdot (6a)$ berechnet werden. Selbstverständlich könnte ich dafür auch erst $2 \cdot 6$ ausrechnen und das Ergebnis mit a multiplizieren, also – wieder mit Klammern geschrieben – auch $(2 \cdot 6) \cdot a$ ausrechnen. Wie Sie also ein solches Mehrfachprodukt ausrechnen, bleibt ganz Ihnen überlassen, jede Reihenfolge der Multiplikationen ist willkommen. Auch diese Regel hat einen Namen: Man spricht vom *Assoziativgesetz* der Multiplikation.

Kommutativ- und Assoziativgesetze

Für beliebige Zahlen a und b gelten die Kommutativgesetze

$$a + b = b + a \text{ und } a \cdot b = b \cdot a.$$

Für beliebige Zahlen a, b und c gelten die Assoziativgesetze

$$a + (b + c) = (a + b) + c \text{ und } a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

Die Regel $a + (b + c) = (a + b) + c$ hatte ich bisher noch nicht erwähnt, aber sie ist auch kaum der Rede wert. Natürlich ist $3 + (5 + 9) = 3 + 14 = 17$ und andererseits $(3 + 5) + 9 = 8 + 9 = 17$, das wird Sie kaum überraschen. Sehen wir uns lieber in den nächsten Beispielen an, auf welche weiteren Schwierigkeiten Sie bei der Vereinfachung eines Terms stoßen können.

Beispiel 1.7

a) Nun geht es mir um $2 \cdot (x + 3) + 4$. Der Ausdruck $x + 3$ soll mit 2 multipliziert werden, und anschließend will ich auf das Ergebnis noch 4 addieren. Die Reihenfolge ist also klar, aber was ist denn nun $2 \cdot (x + 3)$? Die Auskunft, dass man auch hier das Multiplikationszeichen meistens weglässt und kürzer $2(x + 3)$ schreibt, macht zwar das Schreiben leichter, aber nicht das

Rechnen. Das Problem wird sich aber gleich in Luft auflösen. Was ist denn $2 \cdot (100 + 200)$? Die Summe aus 100 und 200 können Sie verdoppeln, indem Sie erst einmal $100 + 200 = 300$ rechnen und dann das Ergebnis auf 600 verdoppeln. Sie können aber auch jeden einzelnen Summanden verdoppeln und dann die verdoppelten Summanden addieren, was zu der Rechnung $200 + 400 = 600$ führt. In beiden Fällen erhalten Sie das gleiche Ergebnis, und das heißt: $2 \cdot (100 + 200) = 2 \cdot 100 + 2 \cdot 200 = 600$. Schon dieses einfache Beispiel zeigt, wie Sie eine Summe mit 2 multiplizieren: Verdoppeln Sie jeden Summanden einzeln und bilden Sie dann die Summe der verdoppelten Summanden. Nach diesem Prinzip ist $2 \cdot (x + 3) = 2 \cdot x + 2 \cdot 3 = 2x + 6$, also $2(x+3) = 2x+6$. Der Rest ist Routine, denn nach der Methode des Sortierens folgt daraus $2(x + 3) + 4 = 2x + 6 + 4 = 2x + 10$.

b) Noch ein Beispiel von dieser Sorte, damit die Methode nicht in Vergessenheit gerät. Was halten Sie von $2(x - 2) + 3(2x + 5)$? Das ist auch nichts Neues, nur dass ich diesmal die Multiplikationspunkte gleich weggelassen habe. Trotzdem gilt noch immer das Prinzip „Punkt- vor Strichrechnung", das besagt, dass ich zuerst die Multiplikationen durchführen muss. Also rechne ich $2(x-2) = 2 \cdot (x-2) = 2 \cdot x - 2 \cdot 2 = 2x - 4$, denn auch die Differenz $x - 2$ kann ich verdoppeln, indem ich die Einzelteile verdopple und hinterher subtrahiere. Und dann? Warum sollte es beim Multiplizieren mit 3 anders sein als beim Verdoppeln? Um eine Summe mit einer Zahl zu multiplizieren, darf ich jeden einzelnen Summanden mit dieser Zahl multiplizieren und anschließend die neuen Summanden addieren. Daher ist $3(2x+5) = 3 \cdot 2x + 3 \cdot 5 = 6x + 15$, wobei ich bei der Rechnung $3 \cdot 2x$ wieder der Reihe nach multipliziert habe. Jetzt kann ich wieder zusammenfassen und finde $2(x - 2) + 3(2x + 5) = 4x - 4 + 6x + 15 = 4x + 6x - 4 + 15 = 10x + 11$.

Und schon wieder habe ich eine Regel gefunden, die uns in Zukunft das Leben erleichtern wird. Man multipliziert eine Summe oder eine Differenz mit einer Zahl, indem man die einzelnen Bestandteile der Summe oder Differenz mit dieser Zahl multipliziert und anschließend dann die gewünschten Additionen oder Subtraktionen vornimmt. Diese Regel wird als das *Distributivgesetz* bezeichnet.

Distributivgesetz

Für beliebige Zahlen a, b und c gilt das Distributivgesetz

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Man sagt dafür auch, dass die Klammer *ausmultipliziert* wird.

Da man wie zum Beispiel in $3 - 5 = 3 + (-5)$ jede Subtraktion auch als Addition schreiben kann, muss ich keine zwei Fassungen des Distributivgesetzes notieren;

die Fassung für Additionen genügt. Eine Sache ist in diesem Zusammenhang aber noch interessant, und das ist die Frage, was bei einem Minuszeichen vor einer Klammer passiert.

Beispiel 1.8
Was ist $17-(5t+13)$? Dass die Variable hier t heißt und nicht x, braucht Sie nicht zu stören, ein Name ist so gut wie der andere. Aber was macht man mit dem Minuszeichen vor der Klammer? Da ich den Wert von t nicht kenne, ist mir auch der Wert von $5t+13$ nicht geläufig, und wie soll ich etwas abziehen, das ich nicht kenne? Keine Bange, das geht. Natürlich ist -5 das Gleiche wie $(-1)\cdot 5$ und $49+(-1)\cdot 38 = 49-38 = 11$, denn wenn Sie Ihre Schulden von einem Euro verfünffachen, dann haben Sie eben Schulden in Höhe von 5 Euro. Allgemein gesagt, entspricht das Setzen eines Minuszeichens vor eine Zahl dem Multiplizieren dieser Zahl mit -1. Nun ist aber auch $5t+13$ nur eine Zahl wie jede andere, vor der ein Minuszeichen steht, auch wenn ich nicht so genau weiß, um welche Zahl es sich dabei handelt. Daher ist $17-(5t+13) = 17+(-1)\cdot(5t+13)$, und das hilft mir weiter. Nach dem Distributivgesetz ist nämlich $(-1)\cdot(5t+13) = (-1)\cdot 5t + (-1)\cdot 13 = -5t-13$, was dann insgesamt zu der Rechnung

$$\begin{aligned} 17-(5t+13) &= 17+(-1)\cdot(5t+13) = 17+(-1)\cdot 5t+(-1)\cdot 13 \\ &= 17-5t-13 = 4-5t \end{aligned}$$

führt.

Ein Minuszeichen vor einer Klammer ist somit kein Beinbruch und kein Grund zur Unruhe. Wenn Sie es ganz genau aufschreiben wollen, dann können Sie das Minus vor der Klammer als Multiplikation mit (-1) auffassen und das Distributivgesetz anwenden, Sie können aber auch schlicht, wie das Beispiel zeigt, innerhalb der Klammer alle Vorzeichen umkehren und damit dem Minuszeichen vor der Klammer Rechnung tragen. Sehen wir uns dazu mit $6x-(2-5x)$ noch ein Beispiel an. Mit dem Distributivgesetz rechne ich:

$$\begin{aligned} 6x-(2-5x) &= 6x+(-1)\cdot(2-5x) = 6x+(-1)\cdot 2+(-1)\cdot(-5x) \\ &= 6x-2+5x = 11x-2, \end{aligned}$$

wobei ich zum Ausrechnen von $(-1)\cdot(-5x)$ die alte Regel „Minus mal Minus ergibt Plus“ verwendet habe. Analog verläuft das Umkehren sämtlicher Vorzeichen in der Klammer, denn dieses Verfahren liefert:

$$6x-(2-5x) = 6x-2+5x = 11x-2.$$

Aus der positiven 2 in der Klammer wurde eine -2, aus dem minusbehafteten $-5x$ in der Klammer habe ich ein $+5x$ gemacht, und Sie sehen, dass die gleichen Summanden herauskommen wie beim direkten Einsatz des Distributivgesetzes. Das ist ja auch kein Wunder, denn es handelt sich um die gleiche Methode, nur etwas kürzer geschrieben.

http://www.springer.com/978-3-662-49335-9

Gleichungen, Umformungen, Terme
Umgang mit Formeln leicht gemacht
Rießinger, Th.
2016, VIII, 263 S. 28 Abb.,
ISBN: 978-3-662-49335-9