

## 2.1 Stetigkeit

### Aufgabe 110

#### ► Stetigkeit von Funktionen

a) Beweisen Sie die Stetigkeit der folgenden Funktionen in  $x = a$  mit Hilfe der  $\varepsilon$ - $\delta$ -Definition der Stetigkeit:

i)  $f : (0, 1) \ni x \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}; \quad a \in (0, 1);$

ii)  $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{1}{1+x^2} \in \mathbb{R}; \quad a \in \mathbb{R};$

iii)

$$f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 1 \\ \frac{1}{1+x}, & x \in [0, 1) \end{cases}; \quad a = 1.$$

b) Untersuchen Sie die folgende Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  auf Stetigkeit in  $\mathbb{R}$ :

$$f(x) := \begin{cases} |x-2| \frac{(x^2+x-6)(x+2)}{x^2-4x+4}, & x \neq 2 \\ 20, & x = 2 \end{cases}.$$

#### Lösung

a) i) Sei  $a \in (0, 1)$  beliebig. Man hat für  $x \in (0, 1)$

$$|f(x) - f(a)| = \left| \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})} \right| = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} |x - a| \leq \frac{1}{\sqrt{a}} |x - a|.$$

Sei nun  $\varepsilon > 0$  beliebig. Setze  $\delta := \sqrt{a}\varepsilon$ , dann gilt

$$|f(x) - f(a)| \leq \frac{1}{\sqrt{a}}|x - a| < \frac{1}{\sqrt{a}}\delta = \varepsilon \quad \forall x \in (0, 1) \quad \text{mit } |x - a| < \delta.$$

Somit ist die Funktion  $f$  stetig in  $(0, 1)$ .

ii) Sei  $a \in \mathbb{R}$  beliebig. Man hat

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= \left| \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+a^2} \right| = \left| \frac{(1+a^2) - (1+x^2)}{(1+a^2)(1+x^2)} \right| \\ &= |x-a||x+a| \frac{1}{1+a^2+x^2+a^2x^2} \leq |x-a||x+a| \\ &= |(x-a) + 2a||x-a| \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} (2|a| + |x-a|)|x-a|. \end{aligned}$$

Sei nun  $\varepsilon > 0$  beliebig. Setze  $\delta := \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2|a|+1}, 1 \right\}$ , dann gilt

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leq (2|a| + |x-a|)|x-a| < (2|a| + \delta)\delta = 2|a|\delta + \delta^2 \\ &\stackrel{0 < \delta \leq 1}{\leq} 2|a|\delta + \delta = (2|a| + 1)\delta \leq \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{mit } |x-a| < \delta. \end{aligned}$$

Somit ist die Funktion  $f$  stetig in  $\mathbb{R}$ .

iii) Wir haben die Stetigkeit in  $a = 1$  nachzuweisen. Es gilt für  $x \in [0, 1)$ , dass

$$|f(a) - f(x)| = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x} \right| = \frac{1}{2|1+x|} \cdot |x-1| \leq \frac{1}{2} \cdot |x-1|,$$

und wir wählen  $\delta = 2\varepsilon$ .

b) Die Funktion  $f$  ist als Summe, Produkt, etc. stetiger Funktionen (Polynome, Betragsfunktion) auch wieder stetig in  $\mathbb{R}$  bis auf die Nullstellen des Nenners. Es gilt für  $x \neq 2$

$$\begin{aligned} f(x) &= |x-2| \frac{(x^2+x-6)(x+2)}{x^2-4x+4} \\ &= |x-2| \frac{(x+2)(x+3)(x-2)}{(x-2)^2} = (x+2)(x+3) \operatorname{sign}(x-2). \end{aligned}$$

Dies liefert

$$\begin{aligned} \lim_{x \nearrow 2} f(x) &= (2+2)(2+3)(-1) = -20 \neq 20 = f(2) \\ &= (2+2)(2+3) \cdot 1 = \lim_{x \searrow 2} f(x). \end{aligned}$$

Somit ist die Funktion  $f$  unstetig in  $x = 2$ ; hier liegt eine Sprungstelle vor.

## Aufgabe 111

### ► Stetigkeit von Funktionen

Weisen Sie die Stetigkeit der folgenden Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jeweils in  $a$  nach:

a)

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}, \quad a := 0;$$

b)

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x < 1 \\ x - 1, & x \geq 1 \end{cases}, \quad a := 1.$$

### Lösung

a) Es gilt:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} 0 = 0,$$

$$f(0) = 0,$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x = 0.$$

Damit ist gezeigt, dass  $f$  stetig bei 0 ist.

b) Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig,  $\delta := \varepsilon$  und  $|x - a| = |x - 1| < \delta$ . Dann gilt:

$$|f(x) - \underbrace{f(a)}_{=0}| = |f(x)| = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ |x - 1|, & x \geq 1 \end{cases} < \delta = \varepsilon.$$

Folglich ist  $f$  stetig bei  $a = 1$ .

## Aufgabe 112

### ► Gleichmäßig stetige Funktionen

Die Funktion  $f$  sei auf  $\mathbb{R}$  gleichmäßig stetig. Zeigen Sie, dass  $f$  höchstens wie eine lineare Funktion wächst, d.h. dass eine Konstante  $L > 0$  existiert, so dass  $|f(x)| \leq L(1 + |x|)$  in  $\mathbb{R}$  ist.

*Hinweis:* Beweisen Sie die Behauptung indirekt.

**Lösung**

Die Funktion  $f$  wird als gleichmäßig stetig vorausgesetzt, d. h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x' : |x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Wir betrachten zunächst den Fall  $f(0) = 0$ .

Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig gewählt. Dann erhält man aus der Bedingung der gleichmäßigen Stetigkeit ein zugehöriges  $\delta > 0$ , mit dem

$$\forall x, x' : |x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

gilt. Wir zerlegen  $\mathbb{R}$  in unendlich viele Teilintervalle  $(I_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ , wobei mit obigem  $\delta > 0$  die  $I_k$  definiert sind durch:

$$I_k := [x_k, x_{k+1}), \quad x_k := k\delta, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Wir zeigen für diesen Fall die behauptete Abschätzung. Sei also  $x \in \mathbb{R}$  beliebig. Wegen

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} I_k = \mathbb{R}$$

existiert ein  $j \in \mathbb{Z}$ , so dass  $x \in I_j$  gilt. Sei zunächst  $j \geq 0$ , d. h.  $x \geq 0$ . Es folgt

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - f(x_j) + f(x_j)| \\ &\leq |f(x) - f(x_j)| + \left| \sum_{k=1}^j f(x_k) - f(x_{k-1}) \right| \\ &\leq \varepsilon + \sum_{k=1}^j |f(x_k) - f(x_{k-1})| \\ &\leq \varepsilon + j\varepsilon = \varepsilon + \frac{x_j}{\delta} \varepsilon \leq \varepsilon + |x| \frac{\varepsilon}{\delta} \leq \underbrace{\max(\varepsilon, \frac{\varepsilon}{\delta})}_{L:=} (1 + |x|). \end{aligned}$$

Ist  $j < 0$ , d. h.  $x < 0$ , dann folgt ganz analog

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - f(x_{j+1}) + f(x_{j+1})| \\ &\leq |f(x) - f(x_{j+1})| + \left| \sum_{k=j+1}^{-1} f(x_k) - f(x_{k+1}) \right| \\ &\leq \varepsilon + \sum_{k=j+1}^{-1} |f(x_k) - f(x_{k+1})| \\ &\leq \varepsilon + (-(j+1))\varepsilon = \varepsilon + \frac{x_{-(j+1)}}{\delta} \varepsilon \leq \varepsilon + |x| \frac{\varepsilon}{\delta} \leq \underbrace{\max(\varepsilon, \frac{\varepsilon}{\delta})}_{L:=} (1 + |x|). \end{aligned}$$

Ist  $f(0) \neq 0$ , dann betrachte  $f_0 : f_0(x) = f(x) - f(0)$ . Da  $f_0$  mit  $f$  ebenfalls gleichmäßig stetig und  $f_0(0) = 0$  ist, existiert nach dem eben Gezeigten eine Konstante  $L_0$ , so dass für alle  $x \in \mathbb{R}$

$$|f_0(x)| \leq L_0(1 + |x|)$$

gilt. Es folgt

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f_0(x) + f(0)| \leq |f_0(x)| + |f(0)| \\ &\leq L_0(1 + |x|) + |f(0)| = (L_0 + |f(0)|) + L_0|x| \\ &\leq \underbrace{(L_0 + |f(0)|)}_{L:=} (1 + |x|) \end{aligned}$$

und somit die Behauptung.

## Aufgabe 113

### ► Gleichmäßig stetige Funktionen

Zeigen Sie: Ist die Funktion  $f$  auf  $\mathbb{R}$  stetig und existieren die (endlichen) Limites von  $f$  für  $x \rightarrow \infty$  und  $x \rightarrow -\infty$ , so ist  $f$  gleichmäßig stetig auf  $\mathbb{R}$ .

*Hinweis:* Benutzen Sie einen indirekten Beweis.

### Lösung

Wir nehmen an, die Aussage sei falsch, d. h.

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x, x' \in \mathbb{R} : |x - x'| < \delta \wedge |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon.$$

Wähle  $\delta := \frac{1}{n}$ , dann existieren  $x_n, x'_n$  mit  $|x_n - x'_n| < \frac{1}{n}$  und  $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$ .

Ist die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt, so enthält sie nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge  $(x_{\mu_k})_{k \in \mathbb{N}}$ , es gilt also  $x_{\mu_k} \rightarrow x_0$  ( $k \rightarrow \infty$ ) und folglich wegen

$$|x'_{\mu_k} - x_0| \leq |x'_{\mu_k} - x_{\mu_k}| + |x_{\mu_k} - x_0| \leq \underbrace{\frac{1}{\mu_k}}_{\rightarrow 0(k \rightarrow \infty)} + \underbrace{|x_{\mu_k} - x_0|}_{\rightarrow 0(k \rightarrow \infty)} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

und wegen der Stetigkeit von  $f$  bei  $x_0$  auch

$$|f(x_{\mu_k}) - f(x'_{\mu_k})| \leq |f(x_{\mu_k}) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x'_{\mu_k})| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty),$$

was einen Widerspruch zu  $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$  darstellt.

Es bleibt also der Fall, dass  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  unbeschränkt ist. O. E. existiert dann eine Teilfolge  $(x_{\mu_k})_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $x_{\mu_k} \rightarrow \infty$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Dann folgt aber auch  $x'_{\mu_k} \rightarrow \infty$  ( $k \rightarrow \infty$ ) und daher aus der Existenz des Limes von  $f$  für  $x \rightarrow \infty$  (dieser Grenzwert sei mit  $C$  bezeichnet):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{\mu_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x'_{\mu_k}) = C,$$

was ebenfalls im Widerspruch zu  $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$  steht.

## Aufgabe 114

### ► Stetige und gleichmäßig stetige Funktionen

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$g : \mathbb{R} \ni x \mapsto -5x^2 + 1 \in \mathbb{R}$$

in jedem Punkt  $a \in \mathbb{R}$  stetig ist; geben Sie zu beliebigem  $\varepsilon > 0$  ein geeignetes  $\delta > 0$  an. Untersuchen Sie außerdem, ob  $g$  (in  $\mathbb{R}$ ) gleichmäßig stetig ist.

### Lösung

Sei  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$  beliebig. Dann gilt für alle  $x$  mit

$$|x - a| < \delta := \begin{cases} \min\left(\frac{\varepsilon}{20|a|}, \sqrt{\frac{\varepsilon}{10}}\right), & a \neq 0 \\ \sqrt{\frac{\varepsilon}{10}}, & a = 0 \end{cases}$$

dass

$$\begin{aligned} |g(x) - g(a)| &= |-5x^2 + 1 + 5a^2 - 1| = 5|x - a| \cdot |x + a| \\ &\leq 5\delta(|x| + |a|) \leq 5\delta(2|a| + \delta) = 10|a|\delta + 5\delta^2 \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

da  $|x| + |a| \leq |x - a| + 2|a|$ . Also ist  $g$  stetig auf  $\mathbb{R}$ . Um zu zeigen, dass  $g$  nicht gleichmäßig stetig ist, haben wir nachzuweisen:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x, x' \in \mathbb{R} : |x - x'| < \delta \wedge |g(x) - g(x')| \geq \varepsilon.$$

Sei etwa  $\varepsilon = 1$ ,  $\delta > 0$  beliebig. Weiter sei  $x \geq \frac{1}{5\delta} - \frac{\delta}{4}$  und  $x' := x + \frac{\delta}{2}$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} 2x &\geq \frac{2}{5\delta} - \frac{\delta}{2} \implies \left|2x + \frac{\delta}{2}\right| \geq \frac{2}{5\delta} \\ \implies \frac{\delta}{2} \left|2x + \frac{\delta}{2}\right| &\geq \frac{1}{5} \implies |x - x'| \cdot |x + x'| \geq \frac{1}{5} \\ \implies 5 \cdot |x^2 - x'^2| &\geq 1 \implies |g(x) - g(x')| \geq 1 = \varepsilon \end{aligned}$$

und somit, dass  $g$  nicht gleichmäßig stetig ist.

**Aufgabe 115**► **Gleichmäßig stetige Funktionen**

Zeigen Sie:

- a)  $f : (0, 1) \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$  ist gleichmäßig stetig.  
 b)  $g : \mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{1}{1+x^2} \in \mathbb{R}$  ist gleichmäßig stetig.  
 c) Beantworten Sie die Frage (mit Begründung):  
 Nimmt  $g$  aus b) sein Infimum und Supremum an?

*Hinweis:* Zum Beweis von a)–c) sollen **keine** Differenzierbarkeitseigenschaften von  $f$  bzw.  $g$  benutzt werden.

**Lösung**

Eine Funktion  $f : A \rightarrow B$  heißt genau dann gleichmäßig stetig in  $A$ , wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x, y \in A : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

- a) Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig vorgegeben. Wähle  $\delta = \varepsilon/2$ . Dann gilt für  $x, y \in (0, 1)$  mit  $|x - y| < \delta$ :

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x - y| \underbrace{|x + y|}_{\leq 2} \leq 2|x - y| < 2\delta = 2\varepsilon/2 = \varepsilon.$$

- b) Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig vorgegeben. Es gilt  $\forall y \in \mathbb{R}$

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{y}{1+y^2} \leq \frac{1}{2} \quad (\Leftrightarrow \quad 1+y^2 \geq -2y \wedge 2y \leq 1+y^2),$$

da

$$(1-y)^2 = 1-2y+y^2 \geq 0 \quad \text{und} \quad (1+y)^2 = 1+2y+y^2 \geq 0.$$

Also ist

$$\left| \frac{y}{1+y^2} \right| \leq \frac{1}{2} \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Wähle  $\delta = \varepsilon$ . Dann gilt für  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $|x - y| < \delta$ :

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &= \left| \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+y^2} \right| = \left| \frac{y^2 - x^2}{(1+x^2)(1+y^2)} \right| \\ &\leq |y - x| \left( \left| \frac{y}{1+y^2} \right| + \left| \frac{x}{1+x^2} \right| \right) \leq |y - x| < \delta = \varepsilon. \end{aligned}$$

- c) Offenbar ist  $0 < g(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$  und  $g(0) = 1$ .  $g$  nimmt also sein Supremum an. Für das Infimum gilt  $\inf_{x \in \mathbb{R}} g(x) = 0$ . Nach der Charakterisierung des Infimums (vgl. z. B. [3], I.8) ist nämlich zu zeigen, dass

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x \in \mathbb{R} : \varepsilon \geq g(x);$$

letzteres ist offenbar richtig für  $x$  mit  $x^2 \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1$ . Das Infimum wird demzufolge nicht angenommen.

## Aufgabe 116

### ► Gleichmäßig stetige Funktionen

Zeigen Sie ohne die Differenzierbarkeit zu benutzen, dass die folgenden Funktionen auf ihrem Definitionsbereich gleichmäßig stetig sind:

- a)  $f : (0, 2) \ni x \mapsto x^3 \in \mathbb{R};$   
 b)  $g : \mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{1}{1 + |x|} \in \mathbb{R};$

### Lösung

- a) Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Setze  $\delta(\varepsilon) := \frac{\varepsilon}{12}$ . Seien  $x, y \in (0, 2)$  beliebig mit  $|x - y| < \delta(\varepsilon)$ , dann gilt

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |x^3 - y^3| = |x - y||x^2 + xy + y^2| \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |x - y|(|x|^2 + |xy| + |y|^2) \stackrel{|x|, |y| \leq 2}{\leq} 12|x - y| < 12\delta(\varepsilon) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Somit ist die Funktion  $f$  in  $(0, 2)$  gleichmäßig stetig.

- b) Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Setze  $\delta(\varepsilon) := \varepsilon$ . Seien  $x, y \in \mathbb{R}$  beliebig mit  $|x - y| < \delta(\varepsilon)$ , dann gilt

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &= \left| \frac{1}{1 + |x|} - \frac{1}{1 + |y|} \right| = \left| \frac{(1 + |y|) - (1 + |x|)}{(1 + |x|)(1 + |y|)} \right| \\ &\leq \frac{||y| - |x||}{1} \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |x - y| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Somit ist die Funktion  $g$  in  $\mathbb{R}$  gleichmäßig stetig.



## Aufgabe 117

### ► Lipschitz-stetige Funktionen

Eine Funktion  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Lipschitz-stetig*, wenn eine Konstante  $0 \leq L < \infty$  existiert, so dass für alle  $x, y \in D$  gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Zeigen Sie:

- Jede auf  $D$  Lipschitz-stetige Funktion ist auch stetig in  $D$ .
- Der Raum der Lipschitz-stetigen Funktionen ist ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$ .
- Ist  $D$  ein abgeschlossenes Intervall, dann ist auch das Produkt zweier Lipschitz-stetiger Funktionen wieder Lipschitz-stetig.

### Lösung

- Seien  $y \in D$ ,  $\varepsilon > 0$  beliebig. Gilt die Abschätzung für  $L = 0$ , so gilt sie auch für eine größere Konstante. Daher kann  $L \neq 0$  angenommen werden. Setze  $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$ , dann gilt für alle  $x \in D$  mit  $|x - y| < \delta$ , dass

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| < L\delta = \varepsilon.$$

Somit ist die Funktion  $f$  stetig in  $D$ . (Sie ist sogar gleichmäßig stetig.)

- Sei  $V := \{f : D \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist Lipschitz-stetig}\}$ .
  - Die Nullfunktion liegt offensichtlich in  $V$ , da die Lipschitz-Bedingung mit  $L = 0$  erfüllt ist.
  - Seien  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $f \in V$  beliebig, dann gilt

$$|(\alpha f)(x) - (\alpha f)(y)| = |\alpha f(x) - \alpha f(y)| = |\alpha| |f(x) - f(y)| \leq |\alpha| L|x - y|,$$

also ist auch die Funktion  $\alpha f$  Lipschitz-stetig mit der Lipschitz-Konstanten  $|\alpha|L$ , d. h.  $\alpha f \in V$ .

- Seien  $f_1, f_2 \in V$  beliebig. Seien  $L_1, L_2$  die Lipschitz-Konstanten bzgl.  $f_1, f_2$ . Es folgt mithilfe der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} |(f_1 + f_2)(x) - (f_1 + f_2)(y)| &= |(f_1(x) - f_1(y)) + (f_2(x) - f_2(y))| \\ &\leq |f_1(x) - f_1(y)| + |f_2(x) - f_2(y)| \\ &\leq L_1|x - y| + L_2|x - y| \leq (L_1 + L_2)|x - y|; \end{aligned}$$

also ist auch die Funktion  $f_1 + f_2$  Lipschitz-stetig mit der Lipschitz-Konstanten  $L_1 + L_2$ , d. h.  $(f_1 + f_2) \in V$ .

- c) Seien  $f_1, f_2 \in V$  beliebig. Seien  $L_1, L_2$  die Lipschitz-Konstanten bzgl.  $f_1, f_2$ . Da Lipschitz-stetige Funktionen nach Teil a) stetig sind, sind auch  $|f_1|$  und  $|f_2|$  stetig und nehmen daher auf dem abgeschlossenen Intervall  $D$  ihr Maximum an, d. h. es gibt Konstanten  $M_1, M_2$  mit

$$|f_1(x)| \leq M_1 \quad \forall x \in D, \quad |f_2(x)| \leq M_2 \quad \forall x \in D.$$

Dann gilt mithilfe der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} & |(f_1 \cdot f_2)(x) - (f_1 \cdot f_2)(y)| \\ &= |f_1(x)f_2(x) - f_1(x)f_2(y) + f_1(x)f_2(y) - f_1(y)f_2(y)| \\ &\leq |f_1(x)||f_2(x) - f_2(y)| + |f_2(y)||f_1(x) - f_1(y)| \\ &\leq |f_1(x)|L_2|x - y| + |f_2(y)|L_1|x - y| \\ &\leq (M_1L_2 + M_2L_1)|x - y|; \end{aligned}$$

also ist auch die Funktion  $f_1 \cdot f_2$  Lipschitz-stetig mit der Lipschitz-Konstanten  $M_1L_2 + M_2L_1$ , d. h.  $(f_1 \cdot f_2) \in V$ .

## Aufgabe 118

### ► Streng konvexe Funktionen

Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt genau dann *streng konvex*, wenn gilt

$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y) \quad \forall t \in (0, 1), \quad \forall x, y \in [a, b], \quad x \neq y.$$

- a) Zeigen Sie, dass es genau ein  $z \in [a, b]$  gibt mit

$$f(z) = \min_{x \in [a, b]} f(x),$$

falls  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  streng konvex und stetig ist.

- b) Gilt die Aussage von a) auch für das Maximum?  
c) Zeigen Sie, dass  $f : [-2, 3] \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$  streng konvex ist.

### Lösung

- a) Da  $[a, b]$  ein abgeschlossenes Intervall ist und die Funktion  $f$  stetig in  $[a, b]$  ist, nimmt  $f$  das Minimum an. Daher existiert ein  $z \in [a, b]$  mit  $f(z) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ . Angenommen es würde ein  $z' \in [a, b]$ ,  $z' \neq z$ , mit

$$f(z') = f(z) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$$

existieren, dann folgt mit Hilfe der strengen Konvexität mit  $t = \frac{1}{2}$

$$f\left(\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z'\right) < \frac{1}{2}f(z) + \frac{1}{2}f(z') = f(z),$$

was wegen  $\frac{z+z'}{2} \in [a, b]$  ein Widerspruch zur Definition von  $f(z)$  als Minimum ist.

- b) Die Funktion  $g : [-2, 2] \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$  ist nach Teil c) streng konvex und als Polynom stetig. Es gilt jedoch

$$f(-2) = f(2) = \max_{x \in [-2, 2]} f(x) = 4,$$

d. h. die Aussage von a) gilt nicht für das Maximum.

- c) Sei  $t \in (0, 1)$  beliebig. Seien  $x, y \in [-2, 3]$  mit  $x \neq y$  beliebig. Es gilt mit  $0 < t < 1$ , dass  $0 < t^2 < t$  und

$$\begin{aligned} & tf(x) + (1-t)f(y) - f(tx + (1-t)y) \\ &= tx^2 + (1-t)y^2 - (tx + (1-t)y)^2 \\ &= tx^2 + (1-t)y^2 - t^2x^2 - 2t(1-t)xy - (1-t)^2y^2 \\ &= tx^2 + y^2 - ty^2 - t^2x^2 - 2txy + 2t^2xy - y^2 + 2ty^2 - t^2y^2 \\ &= t(x^2 - 2xy + y^2) - t^2(x^2 - 2xy + y^2) \\ &= \underbrace{(t - t^2)}_{>0} \underbrace{(x - y)^2}_{>0} > 0. \end{aligned}$$

## Aufgabe 119

### ► Fixpunkte stetiger Funktionen

Sei  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall. Weiterhin sei  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  stetig. Zeigen Sie, dass die Funktion  $f$  in  $[a, b]$  einen Fixpunkt hat, d. h. es existiert ein  $z \in [a, b]$  mit  $f(z) = z$ .

*Hinweis:* Benutzen Sie den Zwischenwertsatz für stetige Funktionen.

### Lösung

Gilt  $f(a) = a$  oder  $f(b) = b$ , so ist die Existenz eines Fixpunktes offensichtlich. Sei nun  $f(a) \neq a$  und  $f(b) \neq b$ , dann gilt wegen  $f(a), f(b) \in [a, b]$

$$f(a) - a > 0, \quad f(b) - b < 0.$$

Die Funktion  $g$  mit  $g(x) = f(x) - x$  ist als Differenz der stetigen Funktion  $f$  und der Identität stetig, so dass  $g$  nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle  $z \in [a, b]$  besitzt. Es gilt also

$$g(z) = 0 \Leftrightarrow f(z) - z = 0 \Leftrightarrow f(z) = z,$$

daher hat  $f$  auch in diesem Fall einen Fixpunkt.

Aufgabensammlung Analysis 1

mit mehr als 500 Übungen und Lösungen

Reinhardt, H.-J.

2016, VII, 289 S. 19 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-662-49416-5