

Chapitre 5

Processus de population en temps continu

Il lui fallait maintenant une grande variété de modèles peut-être transformables l'un dans l'autre, selon une procédure combinatoire, pour trouver celui qui convenait à une réalité qui, à son tour, était toujours faite de plusieurs réalités différentes, dans le temps comme dans l'espace. Calvino, Palomar.

Dans le Chapitre 3, nous avons considéré des processus de branchement indexés par le temps discret, temps qui modélise par exemple le nombre de générations ou le nombre de périodes de temps dans un processus de reproduction cyclique (reproduction saisonnière, annuelle) ou le temps physique discrétisé. Dans ce chapitre, nous allons considérer des populations dont les individus se reproduisent et meurent à des temps aléatoires, continûment au cours du temps. Nous pourrions ainsi avoir des chevauchements de générations propres à certaines espèces. La dynamique de ces populations va dépendre du temps physique $t \in \mathbb{R}_+$.

Nous allons nous intéresser au processus aléatoire $(X_t, t \geq 0)$ qui décrit la dynamique de la taille de la population. A chaque temps de naissance, le processus croît de 1, ou plus si il y a une reproduction multiple, et il décroît de 1 à chaque mort d'un individu. Ce processus est donc constant par morceaux et saute aux instants aléatoires de naissance et de mort. Nous supposons que le processus aléatoire $(X_t, t \geq 0)$ est markovien, c'est à dire que son comportement aléatoire dans le futur ne dépend du passé que par l'information donnée par son état présent (nous verrons une définition précise ci-dessous). Cette hypothèse implique en fait une propriété de non-vieillesse qui est une hypothèse biologique forte. (Les problèmes de sénescence par exemple, ne pourront pas être étudiés dans ce cadre). Toutefois l'hypothèse de markovianité donne un cadre mathématique qui permet d'obtenir des résultats rigoureux et des réponses quantitatives à un certain nombre de questions. Nous étudierons de manière systématique de tels processus de Markov dont le prototype est le processus de Poisson. Ce processus, comme le mouvement brownien, est un processus

à accroissements indépendants et stationnaires. Nous montrerons que les durées entre deux sauts de ce processus sont des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle et que la loi du processus à un instant fixé est une loi de Poisson. Nous montrerons qu'une structure de même type existe dans un cadre plus général où la loi des instants de saut et la loi de reproduction peuvent dépendre de l'état instantané de la population, décrivant ainsi des situations de densité-dépendance et prenant en compte l'impact des ressources par exemple. Nous montrerons que la dynamique de la loi du processus à chaque instant suit une équation différentielle matricielle (appelée équation de Kolmogorov) dirigée par une matrice spécifique que l'on appelle générateur infinitésimal du processus. Grâce à la propriété de Markov, la donnée de ce générateur et de la condition initiale suffit à caractériser la loi du processus. Les cas spécifiques du processus de branchement à temps continu et du processus de naissance et mort seront étudiés avec un accent particulier pour l'étude de la probabilité d'extinction et de la loi du temps d'extinction quand celui-ci est fini presque-sûrement.

5.1 Processus markovien de saut

Définition 5.1.1 *Un processus de saut $(X_t, t \geq 0)$ est un processus à valeurs dans un espace fini ou dénombrable E dont les trajectoires sont presque-sûrement continues à droite et limitées à gauche et constantes entre des instants de saut isolés. La donnée du processus $(X_t, t \geq 0)$ est équivalente à la donnée de la suite de variables aléatoires $(T_n, Z_n), n \geq 0$, où $T_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est le n -ième instant de saut et $Z_n \in E$ la position du processus juste avant le saut T_{n+1} . De plus $T_0 = 0$ et les instants de saut $T_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ forment une suite croissante telle que*

$$T_n(\omega) < T_{n+1}(\omega) \text{ si } T_n(\omega) < +\infty.$$

On suppose également que les instants de saut ne s'accumulent pas en un temps fini :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\omega) = +\infty. \quad (5.1.1)$$

Dans ce cas, nous avons

$$X_t(\omega) = \sum_{n \geq 0, T_n(\omega) < +\infty} Z_n(\omega) \mathbf{1}_{[T_n(\omega), T_{n+1}(\omega)[}(t).$$

Une trajectoire type est représentée en Figure 5.1.

Remarque 5.1.2 *Nos motivations concernent essentiellement les tailles de populations et nous allons limiter notre étude au cas des processus à valeurs entières avec $E = \mathbb{N}$*

Nous allons supposer de plus que les processus de saut sont markoviens, dans le sens suivant.

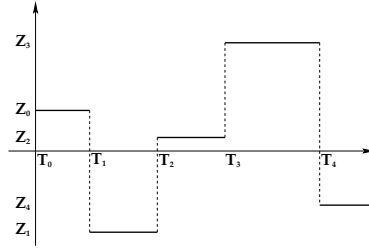


FIGURE 5.1 – Trajectoire d'un processus markovien de saut

Définition 5.1.3 *Un processus de saut $(X_t, t \geq 0)$ à valeurs dans \mathbb{N} est un processus markovien de saut (appelé également chaîne de Markov en temps continu), si pour tous $0 < s < t$, la loi conditionnelle de la variable aléatoire X_t sachant $(X_u, u \leq s)$, ne dépend que de X_s , c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tous $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n < s$ et les états $i_0, i_1, \dots, i_n, i, j \in \mathbb{N}$, on a*

$$\mathbb{P}(X_t = j \mid X_{t_0} = i_0, X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_n} = i_n, X_s = i) = \mathbb{P}(X_t = j \mid X_s = i).$$

On dit que ce processus markovien est homogène si la probabilité $\mathbb{P}(X_t = j \mid X_s = i)$ ne dépend de s et t que par la différence $t - s$.

Dans la suite, nous étudions ces processus markoviens homogènes. Nous utilisons la notation

$$\mathbb{P}(X_t = j \mid X_s = i) = P_{i,j}(t - s).$$

Pour tout $t > 0$, la matrice de taille infinie $P(t) = (P_{i,j}(t))_{i,j \in \mathbb{N}}$ est une matrice markovienne sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N} : \forall i, j \in \mathbb{N}, \forall t > 0$,

$$P_{i,j}(t) \geq 0, \quad \sum_j P_{i,j}(t) = 1.$$

La matrice $P(t)$ est appelée matrice de transition. Elle peut aussi être considérée en tant qu'opérateur sur les suites avec la propriété immédiate que pour une suite $U = (u_n)_n$, la suite $P(t)U$ est le vecteur obtenu par les formules du produit matriciel. Remarquons alors que

$$P(0) = Id.$$

Nous notons $\mu(t)$ la loi de X_t et $\mu(0) = \mu$ désigne la loi initiale du processus.

Nous identifions une fonction $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ avec le vecteur $(g_j)_{j \in \mathbb{N}}$ où $g_j = g(j)$, et une mesure μ sur \mathbb{N} avec le vecteur (μ_i) où $\mu_i = \mu(\{i\})$.

Proposition 5.1.4 Soit $(X_t)_t$ un processus markovien de saut homogène, de loi initiale μ et de matrice $(P(t), t > 0)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tous $0 < t_1 < \dots < t_n$, la loi du vecteur aléatoire $(X_0, X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ est donnée par : pour tous $i_0, i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_n} = i_n) = \mu_{i_0} P_{i_0, i_1}(t_1) P_{i_1, i_2}(t_2 - t_1) \times \dots \times P_{i_{n-1}, i_n}(t_n - t_{n-1}). \quad (5.1.2)$$

Preuve. Il résulte immédiatement des probabilités conditionnelles et de la propriété de Markov que

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_0 = i_0, X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_n} = i_n) \\ = & \mathbb{P}(X_0 = i_0) \mathbb{P}(X_{t_1} = i_1 | X_0 = i_0) \mathbb{P}(X_{t_2} = i_2 | X_0 = i_0, X_{t_1} = i_1) \\ & \times \dots \times \mathbb{P}(X_{t_n} = i_n | X_0 = i_0, \dots, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}) \\ = & \mu_{i_0} P_{i_0, i_1}(t_1) P_{i_1, i_2}(t_2 - t_1) \times \dots \times P_{i_{n-1}, i_n}(t_n - t_{n-1}). \end{aligned}$$

□

Cette proposition est fondamentale car elle montre que la loi μ et les matrices de transition $(P(t), t > 0)$ suffisent à caractériser la loi du processus. En effet, nous savons par le Théorème 4.2.2, que la loi d'un processus à valeurs dans l'ensemble des fonctions de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} muni de la tribu produit, est caractérisée par les lois des marginales finidimensionnelles $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$, pour tous $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

En particulier, pour tout $t > 0$, pour toute fonction positive ou bornée $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, nous avons

$$\mathbb{E}(g(X_t) | X_0 = i) = (P(t)g)_i = \sum_{j \in \mathbb{N}} P_{i,j}(t) g_j.$$

La loi $\mu(t)$ de X_t sera donnée par

$$\mu(t) = \mu P(t) : \forall j \in \mathbb{N}, \mu_j(t) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_i P_{i,j}(t).$$

(La multiplication à gauche par une mesure est duale de la multiplication à droite par une suite).

De plus,

Proposition 5.1.5 Les matrices $(P(t), t > 0)$ vérifient que $P(0) = Id$ et la relation de semi-groupe, appelée équation de Chapman-Kolmogorov :

$$P(t+s) = P(t)P(s) = P(s)P(t). \quad (5.1.3)$$

Ainsi le produit (au sens matriciel) commute.

Remarque 5.1.6 Cette propriété justifie que l'on appelle la famille d'opérateurs $(P(t), t \geq 0)$ le semi-groupe de transition du processus.

Preuve. Soit $i, k \in \mathbb{N}$ et $s, t > 0$. On a

$$\begin{aligned} P_{i,k}(t+s) &= \mathbb{P}(X_{t+s} = k | X_0 = i) = \sum_j P(X_t = j, X_{t+s} = k | X_0 = i) \\ &= \sum_j \mathbb{P}(X_{t+s} = k | X_t = j) \mathbb{P}(X_t = j | X_0 = i) = \sum_j P_{i,j}(t) P_{j,k}(s) \end{aligned}$$

par la propriété de Markov, d'où $P(t+s) = P(t)P(s)$. \square

5.2 Un prototype : le processus de Poisson

5.2.1 Définition d'un processus de Poisson

Nous allons introduire le prototype des processus de saut, que l'on suppose à accroissements indépendants et stationnaires. Ce processus modélise les temps d'apparitions successives d'événements aléatoires.

Définition 5.2.1 Un processus ponctuel sur \mathbb{R}_+ est un processus de saut avec sauts d'amplitude 1. Il se décrit par la donnée d'une suite (presque-sûrement) croissante de temps aléatoires

$$0 < T_1 < T_2 < \cdots < T_n < \cdots,$$

définis sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans \mathbb{R}_+ et vérifiant

$$T_n \rightarrow +\infty \text{ presque-sûrement, quand } n \text{ tend vers l'infini.}$$

Les variables aléatoires T_n modélisent les instants où se produisent les événements.

Les variables aléatoires

$$S_1 = T_1 ; S_2 = T_2 - T_1 ; \cdots, S_n = T_n - T_{n-1}, \cdots$$

modélisent les longueurs des intervalles ou temps d'attente entre deux événements successifs.

Définition 5.2.2 La fonction aléatoire de comptage $(N_t)_{t \geq 0}$ associée au processus ponctuel $\{T_n, n \in \mathbb{N}\}$ est définie par

$$N_t = \sup\{n, T_n \leq t\} = \sum_{j \geq 1} \mathbf{1}_{\{T_j \leq t\}}.$$

N_t est donc le nombre d'événements qui se sont produits avant l'instant t et l'on a $N_{T_n} = n$ pour tout n .

Remarquons que $N_0 = 0$ puisque $T_1 > 0$ et que pour tout t , $N_t < +\infty$ puisque la suite (T_n) tend vers l'infini. Pour $0 \leq s < t$, $N_t - N_s$ est le nombre d'événements qui ont eu lieu pendant l'intervalle de temps $]s, t]$.

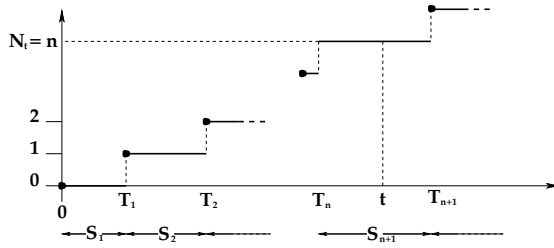


FIGURE 5.2 – Trajectoire d'un processus ponctuel

Remarquons que les trajectoires $t \rightarrow N_t(\omega)$ d'un tel processus sont continues à droite et limitées à gauche, par définition.

Remarque 5.2.3 Les données de la loi du processus ponctuel et de la fonction aléatoire qui lui est associée sont en fait équivalentes. En effet, nous avons

$$\begin{aligned} \{N_t \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ \{N_t = n\} &= \{T_n \leq t < T_{n+1}\} \\ \{N_t \geq n > N_s\} &= \{s < T_n \leq t\}. \end{aligned}$$

Définition 5.2.4 Le processus ponctuel (T_n) ou $(N_t, t \geq 0)$ est appelé processus de Poisson si $(N_t, t \geq 0)$ est à accroissements indépendants et stationnaires, c'est à dire si

- 1) Pour tous $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ dans \mathbb{R}_+ , les accroissements $(N_{t_j} - N_{t_{j-1}}, 1 \leq j \leq n)$ sont des variables aléatoires indépendantes.
- 2) Pour $0 \leq s < t$, la loi de $N_t - N_s$ ne dépend de s et t que par la différence $t - s$. Elle est donc égale à la loi de N_{t-s} .

La propriété (2) s'appelle la stationnarité des accroissements.

Le nom de processus de Poisson est justifié par la propriété suivante :

Proposition 5.2.5 Soit $(N_t, t \geq 0)$ un processus de Poisson. Alors il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $t > 0$, N_t est une variable aléatoire de Poisson de paramètre λt . On a donc

$$\mathbb{P}(N_t = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Définition 5.2.6 Le paramètre λ est appelé intensité du processus de Poisson. Il est égal au nombre moyen d'événements qui se produisent pendant une unité de temps, puisque

$$\mathbb{E}(N_{t+1} - N_t) = \lambda.$$

On dit aussi que les événements se produisent au taux λ .

Preuve. Soit g_t la fonction génératrice de N_t . Nous avons, pour $u \in [0, 1]$,

$$g_t(u) = \mathbb{E}(u^{N_t}) = \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(N_t = k) u^k.$$

Nous voulons montrer que g_t est la fonction génératrice d'une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λt , c'est-à-dire que

$$g_t(u) = \exp(-(\lambda t(1 - u))).$$

Par indépendance des accroissements et pour $s < t$, nous avons que $g_t(u) = g_{t-s}(u)g_s(u)$, et plus généralement nous pouvons prouver que $g_t(u) = ((g_1(u))^t)$. (On le prouve pour les entiers puis pour les rationnels et on conclut en utilisant la décroissance de $t \rightarrow g_t(u)$). Par ailleurs, comme $g_t(u) \geq \mathbb{P}(N_t = 0) = \mathbb{P}(T_1 > t)$, qui tend vers 1 quand $t \rightarrow 0$, nous pouvons assurer que $g_1(u)$ est non nul. Comme de plus, $g_1(u) \leq 1$, il existe donc $\lambda(u) > 0$ tel que

$$g_t(u) = e^{-\lambda(u)t}.$$

Montrons que $\lambda(u)$ est de la forme $\lambda \times (1 - u)$, avec λ constante.

Remarquons que

$$\lambda(u) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} (1 - g_t(u)) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(N_t = k) (1 - u^k).$$

Puisque $u \leq 1$, nous en déduisons que pour tout t ,

$$0 \leq \frac{1}{t} (1 - g_t(u)) - \frac{1}{t} \mathbb{P}(N_t = 1) (1 - u) = \frac{1}{t} \sum_{k \geq 2} \mathbb{P}(N_t = k) (1 - u^k) \leq \frac{1}{t} \mathbb{P}(N_t \geq 2).$$

Supposons que $\frac{1}{t} \mathbb{P}(N_t \geq 2)$ tende vers 0 quand $t \rightarrow 0$. Alors

$$\lambda(u) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \mathbb{P}(N_t = 1) (1 - u)$$

existe et $\lambda(u) = (1 - u)\lambda(0)$, avec $\lambda(0) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \mathbb{P}(N_t = 1)$. Nous aurons donc prouvé la Proposition 5.2.5 avec $\lambda = \lambda(0)$.

Pour étudier le comportement asymptotique de $\mathbb{P}(N_2 \geq t)$, remarquons que

$$\cup_n \{N_{nt} = 0, N_{(n+1)t} \geq 2\} \subset \{T_2 < T_1 + t\},$$

et que par la propriété d'accroissements indépendants stationnaires,

$$\mathbb{P}(\cup_n \{N_{nt} = 0, N_{(n+1)t} \geq 2\}) = \sum_n \mathbb{P}(N_{nt} = 0) \mathbb{P}(N_t \geq 2) \leq \mathbb{P}(T_2 < T_1 + t).$$

Nous en déduisons que

$$\sum_n e^{-\lambda(0)nt} \mathbb{P}(N_t \geq 2) = (1 - e^{-\lambda(0)t})^{-1} \mathbb{P}(N_t \geq 2) \leq \mathbb{P}(T_2 < T_1 + t).$$

Mais, quand t tend vers 0, cette dernière quantité vaut $\mathbb{P}(T_2 \leq T_1) = 0$. Comme pour t suffisamment petit, nous avons par ailleurs que $(\lambda(0)t)^{-1} \leq (1 - e^{-\lambda(0)t})^{-1}$, nous en déduisons finalement que $\frac{1}{t} \mathbb{P}(N_t \geq 2)$ tend vers 0 quand $t \rightarrow 0$. \square

Remarque 5.2.7 Nous pouvons donner une interprétation intuitive de ce résultat. Il résulte de la preuve ci-dessus que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 0) &= 1 - \lambda h + o(h) \\ \mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 1) &= \lambda h + o(h) \\ \mathbb{P}(N_{t+h} - N_t \geq 2) &= o(h). \end{aligned}$$

Donc à $o(h)$ près, $N_{t+h} - N_t$ est une variable aléatoire de Bernoulli prenant la valeur 0 avec probabilité $1 - \lambda h$ et la valeur 1 avec probabilité λh . Cette propriété jointe à l'indépendance des accroissements et à la formule

$$N_{t+s} - N_t = \sum_{j=1}^n (N_{t+jh} - N_{t+(j-1)h}), \quad \text{avec } h = \frac{s}{n},$$

entraîne que $N_{t+s} - N_t$ suit approximativement une loi binomiale de paramètre $(n, \lambda s/n)$. On peut montrer facilement que quand n tend vers l'infini, cette loi tend vers une loi de Poisson de paramètre λs .

Remarque 5.2.8 Notons également que la Proposition 5.2.5 et la propriété d'indépendance des accroissements permettent d'obtenir la loi de tout vecteur $(N_{t_1}, \dots, N_{t_d})$, pour $t_1 < \dots < t_d$.

Nous pouvons également déduire de la Proposition 5.2.5 la loi du premier temps de saut du processus (N_t) .

Corollaire 5.2.9 *La loi du premier temps de saut T_1 est une loi exponentielle de paramètre λ . De même, pour tout $s > 0$, la loi du premier événement après s , soit $T_{N_s+1} - s$, est une loi exponentielle de paramètre λ .*

Preuve. Pour $t > 0$, on a $\mathbb{P}(T_1 > t) = \mathbb{P}(N_t = 0) = e^{-\lambda t}$. De même,

$$\mathbb{P}(T_{N_s+1} - s > t) = \mathbb{P}(N_{s+t} - N_s = 0) = \mathbb{P}(N_t = 0).$$

□

Rappelons qu'une variable aléatoire de loi exponentielle est une variable aléatoire sans mémoire, au sens où pour tous $t, s > 0$,

$$\mathbb{P}(T_1 > t + s \mid T_1 > t) = \mathbb{P}(T_1 > s).$$

Nous allons retrouver cet aspect dans la structure générale d'un processus markovien de saut.

Finissons ce paragraphe en exhibant une martingale liée au processus de Poisson.

Remarquons que la donnée de $(N_s, s \leq t)$ est équivalente à celle de $(N_t, T_1, T_2, \dots, T_{N_t})$. La tribu $\mathcal{F}_t^N = \sigma(N_s, s \leq t)$ est la tribu engendrée par ces variables et décrit donc l'information donnée par le processus $(N_t)_t$ jusqu'au temps t .

Proposition 5.2.10 *Soit $(N_t, t \geq 0)$ un processus de Poisson de paramètre λ . Alors le processus $(M_t, t \geq 0)$ défini par $M_t = N_t - \lambda t$, est une \mathcal{F}_t^N -martingale.*

Preuve. Pour chaque $t > 0$, N_t est une variable aléatoire d'espérance finie donc il en est de même pour M_t . De plus, pour $s < t$,

$$\mathbb{E}(N_t \mid \mathcal{F}_s^N) = \mathbb{E}(N_t - N_s + N_s \mid \mathcal{F}_s^N) = \mathbb{E}(N_t - N_s) + N_s = \lambda(t - s) + N_s.$$

Nous avons utilisé l'indépendance des variables aléatoires $N_t - N_s$ et N_s et la Proposition 5.2.5. □

5.2.2 Propriété de Markov forte

Soit $(N_t, t \geq 0)$ un processus de Poisson d'intensité λ . Pour tout $s > 0$, introduisons le processus $(N_t^s, t \geq 0)$ défini par

$$N_t^s = N_{t+s} - N_s.$$

Ce processus compte le nombre d'événements sur l'intervalle $]s, t]$. Il est facile de voir que c'est également un processus de Poisson d'intensité λ , indépendant de $(N_u, u \leq s)$. En particulier, cela entraîne que $(N_t, t \geq 0)$ vérifie la propriété de Markov et de la Proposition 5.2.5, nous déduisons la

Proposition 5.2.11 *Le processus de Poisson d'intensité λ est un processus de Markov. Sa matrice de transition est donnée par*

$$P_{i,j}(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}, \quad \text{si } j \geq i,$$

et $P_{i,j}(t) = 0$ sinon.

Nous allons généraliser cette propriété aux \mathcal{F}_t^N -temps d'arrêt. Remarquons que pour tout n , le temps de saut T_n est un \mathcal{F}_t^N -temps d'arrêt, puisque $\{T_n \leq t\} = \{N_t \geq n\}$. En revanche si $t < s$, T_{N_s} ne l'est pas car

$$\{T_{N_s} \leq t\} = \{N_s - N_t = 0\} \notin \mathcal{F}_t^N.$$

Proposition 5.2.12 *Soit $(N_t, t \geq 0)$ un processus de Poisson de paramètre λ et S un \mathcal{F}_t^N -temps d'arrêt. Sur l'événement $\{S < +\infty\}$, on pose pour $t \geq 0$*

$$N_t^S = N_{S+t} - N_S.$$

Conditionnellement à $\{S < +\infty\}$, le processus $(N_t^S, t \geq 0)$ est un processus de Poisson d'intensité λ , indépendant de la tribu engendrée par la trajectoire de N jusqu'à S .

Preuve. Nous savons déjà que le résultat est vrai si S est constant. Supposons que S prenne ses valeurs dans une suite croissante de réels positifs $(s_j)_j$. Comme S est un temps d'arrêt,

$$\{S = s_j\} = \{S \leq s_j\} \setminus \{S \leq s_{j-1}\} \in \mathcal{F}_{s_j}^N.$$

Soient $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k$, $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ et A un événement de la tribu engendrée par la trajectoire de N jusqu'à S . On a $A \cap \{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t^N$. Alors

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(A \cap_{i=1}^k \{N_{t_i}^S - N_{t_{i-1}}^S = n_i\} \right) \\ &= \sum_j \mathbb{P} \left(\{S = s_j\} \cap A \cap_{i=1}^k \{N_{s_j+t_i} - N_{s_j} - N_{s_j+t_{i-1}} + N_{s_j} = n_i\} \right) \\ &= \sum_j \mathbb{P} \left(\{S = s_j\} \cap A \right) \prod_{i=1}^k \mathbb{P} \left(N_{s_j+t_i} - N_{s_j+t_{i-1}} = n_i \right) \\ &= \mathbb{P}(A) \prod_{i=1}^k \mathbb{P} \left(N_{t_i-t_{i-1}} = n_i \right). \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

Dans cette preuve nous avons utilisé le fait que le processus $(N_t)_t$ est à accroissements indépendants et stationnaires.

Le résultat est donc établi si la suite des valeurs de S est discrète. Supposons maintenant que S soit un temps d'arrêt quelconque. Nous introduisons la suite $(R_n)_n$ définie par

$$R_n = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} k 2^{-n} \mathbb{1}_{\{(k-1)2^{-n} < S \leq k2^{-n}\}}.$$

Il est facile de voir que les R_n sont des temps d'arrêt qui convergent en décroissant vers S . L'égalité (5.2.4) est vraie pour chaque R_n et l'on peut facilement justifier un passage à la limite, du fait de la continuité à droite des trajectoires de $(N_t)_t$. Cela conclut la preuve. \square

Nous en déduisons le résultat fondamental suivant.

Proposition 5.2.13 *Un processus de Poisson $(N_t, t \geq 0)$ d'intensité λ est un processus de Markov fort. Notons comme précédemment par $(S_n)_n$ la suite des temps d'attente entre les sauts. Alors les variables S_i sont indépendantes et de loi exponentielle de paramètre λ .*

Preuve. La propriété de Markov forte est un corollaire immédiat de la Proposition 5.2.12. Nous savons déjà, par le Corollaire 5.2.9, que $S_1 = T_1$ suit une loi exponentielle de paramètre λ . Appliquons la Proposition 5.2.12 avec $S = T_n$. Ainsi $S_{n+1} = T_{n+1} - T_n$ est le premier instant de saut du processus de Poisson $(N_{T_n+t} - N_{T_n}, t \geq 0)$ d'intensité λ et indépendant de T_1, \dots, T_n , donc aussi de S_1, \dots, S_n . Le résultat suit. \square

La proposition suivante fournit une preuve constructive de l'existence d'un processus de Poisson et un algorithme de simulation.

Proposition 5.2.14 *Soit $(S_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi exponentielle de paramètre λ . Pour tous $n \geq 1$ et $t > 0$, posons $T_n = S_1 + \dots + S_n$ et $N_t = \sup\{n, T_n \leq t\} = \text{Card}\{n, T_n \leq t\}$. Alors $(N_t, t \geq 0)$ est un processus de Poisson d'intensité λ .*

5.2.3 Comportement asymptotique d'un processus de Poisson

Soit $(N_t, t \geq 0)$ un processus de Poisson d'intensité λ . Nous avons alors

$$\mathbb{E}(N_t) = \lambda t, \quad \text{Var}(N_t) = \lambda t.$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(t^{-1} N_t) = \lambda, \quad \text{Var}(t^{-1} N_t) = \frac{\lambda}{t},$$

donc $\frac{N_t}{t}$ converge en moyenne quadratique vers λ , quand t tend vers l'infini.

En fait nous avons également une version forte de cette loi des grands nombres.

Proposition 5.2.15 *Soit $(N_t, t \geq 0)$ un processus de Poisson d'intensité λ . Alors $\frac{N_t}{t}$ converge presque-sûrement vers λ , quand t tend vers l'infini.*

Preuve. Remarquons tout d'abord que $N_n = \sum_{i=1}^n (N_i - N_{i-1})$ est la somme de variables aléatoires indépendantes de même loi de Poisson de paramètre λ . Il résulte alors de la loi forte des grands nombres que $\frac{N_n}{n}$ converge presque-sûrement vers λ , quand n tend vers l'infini. Nous pouvons alors écrire

$$\frac{N_t}{t} = \frac{N_{[t]} [t]}{[t] t} + \frac{N_t - N_{[t]}}{t}.$$

Il nous suffit alors de montrer que $\sup_{n \leq t < n+1} \frac{N_t - N_n}{n}$ tend p.s. vers 0 quand n tend vers l'infini. Posons

$$\xi_n = \sup_{n \leq t < n+1} (N_t - N_n) = N_{n+1} - N_n.$$

Les ξ_n sont indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre λ . La loi des grands nombres entraîne alors que $\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n}$ converge vers λ presque-sûrement et donc que $\frac{\xi_n}{n}$ converge presque-sûrement vers 0. \square

Nous avons également un théorème de la limite centrale.

Théorème 5.2.16 *Soit $(N_t, t \geq 0)$ un processus de Poisson d'intensité λ . Alors le processus $\left(\frac{N_t - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}}, t \geq 0\right)$ converge en loi, quand t tend vers l'infini, vers une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.*

Preuve. Nous allons raisonner comme dans la preuve précédente. Par le théorème de la limite centrale, nous savons que la suite $\left(\frac{N_n - \lambda n}{\sqrt{\lambda n}}\right)_n$ converge en loi vers Z quand n tend vers l'infini, où Z est une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

De plus, $\frac{N_t - N_{[t]}}{\sqrt{\lambda t}} \leq \frac{\xi_{[t]}}{\sqrt{\lambda [t]}}$. Or, $\mathbb{P}\left(\frac{\xi_n}{\sqrt{n}} > \varepsilon\right) = \mathbb{P}(\xi_n > \varepsilon\sqrt{n}) = \mathbb{P}(\xi_1 > \varepsilon\sqrt{n})$, qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Donc $\frac{N_t - N_{[t]}}{\sqrt{\lambda t}}$ tend en probabilité vers 0. Finalement nous avons

$$\frac{N_t - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}} = \frac{N_{[t]} - \lambda [t]}{\sqrt{\lambda [t]}} \times \sqrt{\frac{[t]}{t}} + \frac{N_t - N_{[t]}}{\sqrt{\lambda t}} + \sqrt{\lambda} \frac{[t] - t}{\sqrt{t}}.$$

Nous pouvons alors conclure, sachant que $N_t - N_{[t]}$ et $N_{[t]}$ sont indépendantes et en utilisant les fonctions caractéristiques, comme au Paragraphe 4.2. \square

Nous pouvons en fait établir également un théorème de la limite centrale fonctionnel, qui montre la convergence de la fonction aléatoire

$$t \rightarrow Y_t^u = \frac{N_{ut} - \lambda tu}{\sqrt{\lambda u}}$$

vers le mouvement brownien, quand u tend vers l'infini. La preuve s'inspire de celle déjà vue au Paragraphe 4.2. En effet, nous avons montré que pour t fixé, Y_t^u converge en loi vers une variable aléatoire B_t centrée, de variance t .

De même nous pouvons étudier le comportement en loi de $(Y_{t_1}^u, Y_{t_2}^u - Y_{t_1}^u, \dots, Y_{t_k}^u - Y_{t_{k-1}}^u)$, pour $t_1 < \dots < t_k$, et montrer que ce vecteur converge vers $(Z_{t_1}, Z_{t_2-t_1}, \dots, Z_{t_k-t_{k-1}})$, où les variables aléatoires $Z_{t_i-t_{i-1}}$ sont indépendantes et suivent des lois normales centrées de variances respectives $t_i - t_{i-1}$. Remarquons par ailleurs que l'amplitude des sauts de Y_t^u est $\frac{1}{\sqrt{\lambda u}}$ qui tend vers 0 quand u tend vers l'infini. Nous avons donc montré que le processus $(Y_t^u, t \geq 0)$ converge au sens des marginales fini-dimensionnelles, vers un processus $(B_t, t \geq 0)$ qui est à accroissements indépendants et stationnaires, à trajectoires continues et tel que pour chaque $t > 0$ la variable aléatoire B_t est une variable normale centrée et de variance t . C'est un mouvement brownien (Voir Définition 4.2.5).

Remarque 5.2.17 *Nous avons vu à la Proposition 5.2.10 que le processus $N_t - \lambda t$ est une martingale. Mais (4.5.7) n'est pas satisfaite. En effet, en prenant $t = n/\lambda$, nous pouvons montrer que*

$$\mathbb{E}(|N_t - \lambda t|) = 2 \left(n - n e^{-n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n^k}{k!} - e^{-n} \sum_{k=0}^n k \frac{n^k}{k!} \right),$$

qui tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini. Ainsi, nous ne pouvons pas utiliser le Théorème 4.5.6 pour conclure à la convergence de N_t/t .

5.2.4 Processus de Poisson composé

Etant donné un processus de Poisson, nous pouvons construire des processus markoviens de saut plus compliqués en supposant les amplitudes de saut aléatoires et indépendantes du processus de Poisson. Ces processus sont appelés processus de Poisson composés.

Exemple 5.2.18 Soit $(N_t, t \geq 0)$ un processus de Poisson d'intensité λ et d'instantanés de sauts $(T_n)_n$. Donnons-nous par ailleurs une chaîne de Markov $(Z_n)_n$ à valeurs dans \mathbb{Z} , indépendante de $(N_t)_t$ et de matrice de transition $M_{i,j}$. Alors

$$X_t = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n \mathbb{1}_{[T_n, T_{n+1}[}(t)$$

est un processus markovien de saut de matrice de transition

$$P_{i,j}(t) = \sum_n \mathbb{P}(T_n \leq t < T_{n+1}, Z_n = j | Z_0 = i) = \sum_n \mathbb{P}(N_t = n) \mathbb{P}(Z_n = j | Z_0 = i),$$

par indépendance. D'où

$$P_{i,j}(t) = e^{-\lambda t} \sum_n \frac{(\lambda t)^n}{n!} M_{i,j}^{(n)}.$$

Nous allons voir que la loi des processus markoviens de saut peut être décrite en généralisant cette décomposition : loi des temps entre les sauts et loi de l'amplitude des sauts.

5.3 Générateur d'un processus markovien de saut

5.3.1 Le générateur infinitésimal

Revenons ici au cadre général des processus markoviens de saut. Nous avons vu que la loi d'un tel processus est caractérisée par son semi-groupe dès lors que l'on connaît sa condition initiale (Proposition 5.1.4). La donnée du semi-groupe correspond à la donnée d'une infinité de matrices $P(t), t > 0$. Dans cette partie nous allons montrer qu'il suffit en fait de connaître une seule matrice qui décrit le comportement infinitésimal de $P(t)$ au voisinage de 0. Cela est dû à la propriété de Chapman-Kolmogorov (Proposition 5.1.5). Cette matrice, appelée générateur infinitésimal du processus, permet de décrire la structure du processus.

Remarquons tout d'abord qu'un processus markovien de saut vérifie la propriété de Markov forte.

Théorème 5.3.1 *Soient $(X_t, t \geq 0)$ un processus markovien de saut et S un \mathcal{F}_t^X temps d'arrêt. Conditionnellement à $\{S < +\infty\}$ et à $\{X_S = i\}$, le processus $(X_{S+t}, t \geq 0)$ est indépendant de la tribu engendrée par X jusqu'au temps S et sa loi est celle de $(X_t, t \geq 0)$ issu de $X_0 = i$.*

La preuve est une adaptation de celle donnée pour le processus de Poisson (Proposition 5.2.12) et est laissée au lecteur.

La propriété de semi-groupe (5.1.3) entraîne que la connaissance de $P(t)$ pour tout t peut se déduire de la connaissance de $P(t)$ pour t petit. En fait, nous allons montrer qu'il suffit de connaître sa dérivée à droite en 0.

Théorème 5.3.2 *Soit $P(t), t > 0$, le semi-groupe des matrices de transition d'un processus markovien de saut $(X_t)_t$. Il existe une matrice $(Q_{i,j}, i, j \in \mathbb{N})$, appelée générateur infinitésimal du semi-groupe $(P(t))_t$ ou du processus de Markov $(X_t)_t$, qui vérifie*

$$Q_{i,j} \geq 0 \text{ pour } i \neq j \quad ; \quad Q_{i,i} = - \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus \{i\}} Q_{i,j} \leq 0,$$

cette dernière inégalité étant stricte sauf si l'état i est absorbant. On note $q_i = -Q_{i,i}$. Lorsque $h \downarrow 0$,

$$\begin{aligned} P_{i,j}(h) &= hQ_{i,j} + o(h) \text{ pour } i \neq j, \\ P_{i,i}(h) &= 1 - hq_i + o(h). \end{aligned} \tag{5.3.5}$$

En outre conditionnellement à $X_0 = i$ et si $q_i \neq 0$, l'instant T_1 de premier saut et la position $Z_1 = X_{T_1}$ après le premier saut sont indépendants, avec T_1 de loi exponentielle de paramètre q_i et Z_1 de loi donnée par $\left(\frac{Q_{i,j}}{q_i}, j \neq i\right)$. Si $q_i = 0$, le processus reste absorbé en i .

Remarque 5.3.3 Le générateur infinitésimal peut également être défini comme opérateur de dérivation de la loi du processus, comme dans le cas d'un processus de diffusion (cf. Définition 4.6.19). Pour toute fonction bornée sur \mathbb{N} , on pose

$$Qf(i) = \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \frac{P_t f(i) - f(i)}{t}.$$

Par (5.3.5), nous avons pour t au voisinage de 0,

$$\begin{aligned} P_t f(i) &= \sum_j P_{i,j}(t) f(j) = P_{i,i}(t) f(i) + \sum_{j \neq i} P_{i,j}(t) f(j) \\ &= \left(1 + tQ_{i,i} + o(t)\right) f(i) + \sum_{j \neq i} \left(tQ_{i,j} + o(t)\right) f(j) \\ &= f(i) + t \left(\sum_{j \neq i} Q_{i,j} (f(j) - f(i)) \right) + o(t), \end{aligned}$$

et donc

$$Qf(i) = \sum_{j \neq i} Q_{i,j} (f(j) - f(i)). \quad (5.3.6)$$

Définition 5.3.4 On appelle q_i le taux de saut du processus issu de i . Nous avons donc

$$\mathbb{P}(T_1 > t | X_0 = i) = e^{-q_i t}.$$

Le nombre $Q_{i,j}$ sera appelé taux de transition de i vers j .

Grâce à la propriété de Markov forte, nous en déduisons le résultat suivant.

Corollaire 5.3.5 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, conditionnellement à la tribu engendrée par le processus jusqu'au temps T_{n-1} , la variable aléatoire $T_n - T_{n-1}$ est indépendante de $Z_n = X_{T_n}$. De plus, la loi conditionnelle de $T_n - T_{n-1}$ est une loi exponentielle de paramètre $q_{Z_{n-1}}$, et la loi conditionnelle de Z_n est donnée par $\left(\frac{Q_{Z_{n-1},j}}{q_{Z_{n-1}}}, j \in \mathbb{N}\right)$.

Preuve du Théorème 5.3.2. Nous voulons calculer $\mathbb{P}(T_1 > t | X_0 = i)$. Considérons $n \in \mathbb{N}$ et $h > 0$ et supposons que $h \rightarrow 0$ et que $n \rightarrow \infty$ de telle sorte que $nh \uparrow t$. Nous allons utiliser la propriété de semi-groupe. Pour cela, remarquons tout d'abord que

$$\{T_1 > nh\} \subset \{X_0 = X_h = \dots = X_{nh}\} \subset \{T_1 > nh\} \cup \{T_2 - T_1 \leq h\}.$$

Comme $\mathbb{P}(T_2 - T_1 \leq h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_1 > t | X_0 = i) &= \lim_{h \rightarrow 0, nh \rightarrow t} \mathbb{P}(X_0 = X_1 = \dots = X_{nh} | X_0 = i) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0, nh \rightarrow t} (P_{i,i}(h))^n = \lim_{h \rightarrow 0, nh \rightarrow t} e^{n \ln P_{i,i}(h)}, \text{ par propriété de Markov.} \end{aligned}$$

Comme $P_{i,i}(h)$ tend vers 1 quand $h \rightarrow 0$, nous savons que $\log P_{i,i}(h) \sim P_{i,i}(h) - 1$ au voisinage de 0. Comme de plus n est d'ordre $\frac{t}{h}$, nous pouvons déduire de l'existence de la limite précédente qu'il existe $q_i \in [0, +\infty]$ tel que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(1 - P_{i,i}(h)) = q_i$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(T_1 > t | X_0 = i) = e^{-q_i t}.$$

Cette dernière propriété entraîne que $q_i < +\infty$ et que $q_i = 0$ si et seulement si i est un état absorbant. Nous posons alors $Q_{i,i} = -q_i$.

La démonstration de l'existence d'une limite à $\frac{P_{i,j}(h)}{h}$, pour $i \neq j$ se fait de manière analogue. Nous avons $\{T_1 \leq t, Z_0 = i, Z_1 = j\} = \lim_{h \rightarrow 0, nh \rightarrow t} \cup_{0 \leq m \leq n} \{X_0 = X_h = \dots = X_{(m-1)h} = i, X_{mh} = j\}$, d'où

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_1 \leq t, Z_1 = j | X_0 = i) &= \lim_{h \rightarrow 0, nh \rightarrow t} \sum_{m=0}^{n-1} (P_{i,i}(h))^m P_{i,j}(h) = \lim_{h \rightarrow 0, nh \rightarrow t} \frac{1 - (P_{i,i}(h))^n}{1 - P_{i,i}(h)} P_{i,j}(h) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0, nh \rightarrow t} (1 - (P_{i,i}(h))^n) \frac{h}{1 - P_{i,i}(h)} \frac{1}{h} P_{i,j}(h) \\ &= \frac{1 - e^{-q_i t}}{q_i} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} P_{i,j}(h). \end{aligned} \tag{5.3.7}$$

Ainsi, $Q_{i,j} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} P_{i,j}(h)$ existe pour $i \neq j$ et

$$\mathbb{P}(T_1 \leq t, Z_1 = j | X_0 = i) = (1 - e^{-q_i t}) \frac{Q_{i,j}}{q_i},$$

d'où $\mathbb{P}(T_1 \leq t, Z_1 = j | X_0 = i) = \mathbb{P}(T_1 \leq t | X_0 = i) \mathbb{P}(Z_1 = j | X_0 = i)$, ce qui entraîne l'indépendance de T_1 et Z_1 conditionnellement à $X_0 = i$. De plus,

$$\mathbb{P}(Z_1 = j | X_0 = i) = \frac{Q_{i,j}}{q_i}. \tag{5.3.8}$$

Nous en déduisons que

$$\sum_{j \neq i} Q_{i,j} = q_i = -Q_{i,i}.$$

□

Ce théorème nous permet d'obtenir les équations de Kolmogorov, fondamentales dans la pratique. Ces équations décrivent la dynamique temporelle des lois à partir de la matrice de taux. Soit I la matrice identité sur \mathbb{N} .

Théorème 5.3.6 *Sous l'hypothèse (5.1.1),*

1) $(P(t), t \geq 0)$ est l'unique solution de l'équation de Kolmogorov rétrograde

$$\frac{dP}{dt}(t) = QP(t), \quad \text{pour } t > 0; \quad P(0) = I, \quad (5.3.9)$$

c'est-à-dire que pour tous $i, j \in \mathbb{N}$,

$$\frac{dP_{i,j}}{dt}(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} Q_{i,k} P_{k,j}(t). \quad (5.3.10)$$

Pour tout i de \mathbb{N} et toute fonction g , $u(t, i) = \mathbb{E}(g(X_t) | X_0 = i)$ est solution de

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, i) = \sum_{k \in \mathbb{N}} Q_{i,k} u(t, k), \quad t > 0, \quad ; \quad u(0, i) = g(i), \quad i \in \mathbb{N}.$$

2) $(P(t), t \geq 0)$ est l'unique solution de l'équation de Kolmogorov progressive

$$\frac{dP}{dt}(t) = P(t)Q, \quad \text{pour } t > 0; \quad P(0) = I, \quad (5.3.11)$$

c'est-à-dire que pour tous $i, j \in \mathbb{N}$,

$$\frac{dP_{i,j}}{dt}(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P_{i,k}(t) Q_{k,j}. \quad (5.3.12)$$

En outre, la famille des lois marginales $\mu(t)$ de $(X_t, t \geq 0)$ satisfait l'équation de Fokker-Planck

$$\frac{\partial \mu_j(t)}{\partial t} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_k(t) Q_{k,j}, \quad \text{pour } t > 0, j \in \mathbb{N}.$$

Preuve. L'idée de preuve est la suivante. Pour établir l'équation de Kolmogorov rétrograde, il suffit de dériver $P(t+h)$ en $h=0$ en utilisant la propriété de semi-groupe $P(t+h) = P(h)P(t)$. L'équation pour u s'en déduit en multipliant à droite par le vecteur colonne (g_j) . L'équation progressive s'obtient de la même manière, mais en écrivant $P(t+h) = P(t)P(h)$. L'équation de Fokker-Planck s'en déduit alors immédiatement en multipliant à gauche par le vecteur ligne $(\mu_i(0))$. □

5.3.2 Chaîne de Markov incluse

Soit $(X_t)_t$ un processus markovien de saut, associé à $(T_n, Z_n), n \geq 0$. La suite $Z_n = X_{T_n}$ est une chaîne de Markov à temps discret. C'est une conséquence de la propriété de Markov forte de $(X_t)_t$. Elle est appelée chaîne incluse et vérifie que $Z_{n+1} \neq Z_n$, presque-sûrement, pour tout n . Sa matrice de transition se calcule aisément en fonction du générateur Q de X_t , grâce à (5.3.8) :

$$\tilde{P}_{i,j} = \begin{cases} \frac{Q_{ij}}{q_i} & \text{si } j \neq i \\ 0 & \text{si } j = i. \end{cases}$$

Si l'on pose

$$S_n = q_{Z_{n-1}}(T_n - T_{n-1}),$$

où $q_i = \sum_{j \neq i} Q_{i,j}$, et pour tout $t \geq 0$, $N_t = \sup\{n, \sum_{k=1}^n S_k \leq t\}$, alors le processus $(N_t)_t$ est un processus de Poisson d'intensité 1. En effet, il suffit d'appliquer le Corollaire 5.3.5 : la loi conditionnelle de $T_n - T_{n-1}$ sachant Z_{n-1} est une loi exponentielle de paramètre $q_{Z_{n-1}}$, et donc la loi de S_n est une loi exponentielle de paramètre 1. On utilise pour cela le fait que si U est une variable aléatoire exponentielle de paramètre λ , alors λU est une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1.

Réciproquement, il est possible de définir un processus de Markov à temps continu à valeurs dans \mathbb{N} à partir de son générateur infinitésimal. Soit Q une matrice de taux, c'est-à-dire une matrice indexée par \mathbb{N} telle que pour tous $i, j \in \mathbb{N}$,

$$Q_{i,j} \geq 0 \quad \text{si } j \neq i ; \quad Q_{i,i} = - \sum_{j \neq i} Q_{i,j} \leq 0. \quad (5.3.13)$$

Posons alors $q_i = -Q_{i,i}$ et définissons la matrice de transition \tilde{P} par $\tilde{P}_{i,j} = \frac{Q_{i,j}}{q_i}$ si $i \neq j$ et $q_i \neq 0$, et $\tilde{P}_{i,j} = 0$ si $j = i$, avec la convention $\tilde{P}_{i,j} = 0 \quad \forall j$ si $q_i = 0$. A tout $i \in \mathbb{N}$, nous associons la chaîne $(Z_n)_n$ de matrice de transition \tilde{P} et nous considérons un processus de Poisson $(N_t)_t$ d'intensité 1 indépendant de $(Z_n)_n$. La suite des instants de saut de (N_t) est notée $(T'_n)_n$ et pour $n \geq 1$, on définit

$$U_n = \frac{T'_n - T'_{n-1}}{q_{Z_{n-1}}} \quad ; \quad T_n = U_1 + \dots + U_n.$$

Si la condition de non-explosion (5.1.1) est satisfaite par $(T_n)_n$, alors

$$X_t = \sum_{n \geq 0} Z_n \mathbf{1}_{[T_n, T_{n+1}[}(t), \quad t \geq 0 \quad (5.3.14)$$

est un processus markovien de saut de générateur infinitésimal Q .

Construction algorithmique de $(X_t)_t$:

Il est facile de construire le processus $(X_t, t \geq 0)$ issu de l'état i en itérant la procédure suivante.

- On démarre de $X_0 = i$ et on attend un temps exponentiel S_1 de paramètre q_i . Le processus reste constant égal à i jusqu'au temps S_1 .
- Au temps S_1 , le processus saute de l'état i à l'état j avec probabilité $\frac{Q_{i,j}}{q_i}$.
- On réitère la procédure (on attend un temps exponentiel S_2 de paramètre q_j et indépendamment de S_1, \dots).

Les temps de vie exponentiels U_1, U_2, \dots sont appelés temps de séjour dans les états respectifs Z_1, Z_2, \dots . Le processus a une durée de vie finie si

$$T_\infty = \sum_{k \geq 1} U_k = \lim_n T_n < +\infty.$$

Remarquons que $T_\infty < +\infty$ entraîne de manière évidente que $\lim_{t \uparrow T_\infty} X_t = +\infty$; on dira dans ce cas que le processus explose.

Etudions maintenant la condition de non-explosion (5.1.1) pour $(T_n)_n$, qui assure que le processus est défini par (5.3.14) pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, et prouve alors l'existence d'un processus markovien de saut de générateur infinitésimal Q .

Proposition 5.3.7 *La condition de non-explosion $\lim_n T_n = +\infty$ presque-sûrement, est satisfaite si et seulement si*

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{q_{Z_n}} = +\infty \text{ presque-sûrement.} \quad (5.3.15)$$

Avant de prouver la proposition, énonçons tout de suite un corollaire immédiat.

Corollaire 5.3.8 *Pour qu'un générateur infinitésimal Q soit le générateur infinitésimal d'un processus markovien de saut vérifiant (5.3.13), il suffit que l'une des deux conditions suivantes soit satisfaite :*

(i) $\sup_{i \in E} q_i < +\infty$.

(ii) La chaîne de Markov $(Z_n)_n$ de matrice de transition \tilde{P} est récurrente.

Preuve de la Proposition 5.3.7. Nous avons vu que $T_n - T_{n-1} = \frac{S_n}{q_{Z_{n-1}}}$ et les temps aléatoires S_n sont indépendants. De plus, S_n est loi exponentielle de paramètre 1, donc conditionnellement à Z_{n-1} , la variable aléatoire $\frac{S_n}{q_{Z_{n-1}}}$ suit une loi exponentielle de paramètre $q_{Z_{n-1}}$.

Nous allons montrer que si les (e_i) sont des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre q_i , alors presque-sûrement,

$$\mathcal{E} = \sum_i e_i = +\infty \iff \sum_i \frac{1}{q_i} = +\infty.$$

Comme $\mathbb{E}(e_i) = \frac{1}{q_i}$, il est clair que si $\sum_i \frac{1}{q_i} < +\infty$, alors \mathcal{E} est finie presque-sûrement.

Étudions maintenant le cas où $\sum_i \frac{1}{q_i} = +\infty$. Introduisons la transformée de Laplace de \mathcal{E} . Elle vaut

$$\mathbb{E}(e^{-\lambda \mathcal{E}}) = \prod_i \mathbb{E}(e^{-\lambda e_i}) = \prod_i \frac{q_i}{\lambda + q_i}$$

et elle est nulle si et seulement si $\sum_i e_i = +\infty$ avec probabilité 1.

Le produit ci-dessus est nul si et seulement si la somme $\sum_i \log \left(1 + \frac{\lambda}{q_i}\right)$ vaut $-\infty$. Or, pour λ suffisamment petit, cette série a le même comportement que $-\sum_i \frac{1}{q_i}$, ce qui permet de conclure. \square

5.4 Processus de branchement en temps continu

5.4.1 Définition et propriété de branchement

Considérons un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ décrivant la dynamique de population suivante :

- Au temps $t = 0$, on a un nombre aléatoire X_0 d'individus.
- Chaque individu a un temps de vie aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $a > 0$.
- Au bout de ce temps, l'individu se reproduit suivant la loi de reproduction $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$. La probabilité que sa lignée s'arrête est donc p_0 . Nous éviterons les cas triviaux en supposant que

$$p_0 > 0 ; p_0 + p_1 < 1.$$

- Les temps de vie et les nombres d'enfants de chaque individu sont indépendants les uns des autres.

Définition 5.4.1 *On appelle processus de branchement en temps continu le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ ainsi défini. X_t représente le nombre d'individus présents au temps t .*

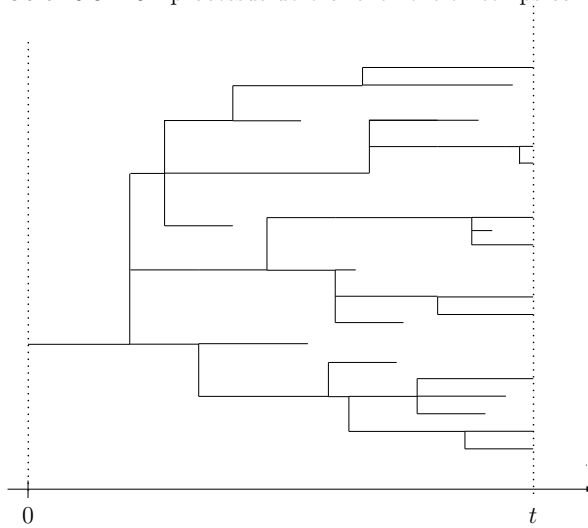
Quand $p_0 + p_2 = 1$, le processus est appelé processus de branchement binaire ou processus de naissance et mort linéaire. Un tel processus modélise par exemple le mécanisme de division cellulaire.

Si de plus, $p_0 = 0$ (une lignée ne disparaît jamais), le processus est appelé processus de fission binaire ou processus de Yule.

Nous introduisons l'espérance de la loi de reproduction $m = \sum_{k \geq 0} k p_k$ et pour $s \in [0, 1]$, sa fonction génératrice $g(s) = \sum_{k \geq 0} p_k s^k$.

Rappelons que si $m < +\infty$, la fonction g est dérivable en 1 et $g'(1) = m$. Notons s_0 la plus petite racine de l'équation $g(s) = s$.

FIGURE 5.3 – Un processus de branchement en temps continu :



Dans la figure 5.3, les branches représentent les lignées des individus. La figure modélise l'évolution au cours du temps de ces lignées.

Remarque 5.4.2 *Le fait de modéliser le temps de vie des individus par une loi exponentielle peut être discuté. En effet une loi exponentielle possède la propriété de non-vieillessement qui ne représente pas forcément la réalité. Toutefois quelques espèces ne vieillissent pas. L'hydre, petit polype d'eau douce de quelques millimètres, en est un exemple, ainsi que certaines tortues, certains mollusques ou coraux ou certains poissons comme l'esturgeon. (Voir [71] sur ce sujet). Cette hypothèse de loi exponentielle est liée à la propriété de Markov pour le processus de saut $(X_t)_{t \geq 0}$, comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent. Cela permet de faire facilement des calculs. Il existe des travaux se démarquant de cette hypothèse et de la markovianité, pour prendre en compte d'autres dynamiques de populations, comme par exemple les processus de branchement âge-dépendants (cf. Kaj-Sagitov [44]) ou les arbres de ramification ("splitting trees") (cf. Lambert [53]), pour lesquelles les durées de vie des individus suivent des lois quelconques.*

Théorème 5.4.3 *Le processus de branchement $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus markovien de saut. Le processus $(Z_n)_n = (X_{T_n})_n$ est une chaîne de Markov de matrice de transition P telle que $P_{i,j} = p_{j-i+1}$ si $j \geq i - 1$ et $P_{i,j} = 0$ sinon. Les temps aléatoires $T_{n+1} - T_n$ sont indépendants conditionnellement à $Z_n = i$ et de loi exponentielle de paramètre ia .*

Propriété fondamentale. La définition du processus nous permet de remarquer que si la population initiale est composée de i individus, les sous-processus issus de ces i ancêtres

sont indépendants et ont même loi. Nous pouvons donc écrire X_t comme

$$X_t = Z_t^1 + \dots + Z_t^i,$$

où les $((Z_t^k, t \geq 0), k = 1, \dots, i)$, sont des processus indépendants et de même loi, celle d'un processus de branchement issu d'un seul individu. Nous dirons que le processus X satisfait la *propriété de branchement*. En particulier, pour tout temps $t > 0$, la fonction génératrice de X_t est égale au produit des fonctions génératrices des Z_t^k , ce qui s'écrit : pour tout $i \geq 0$ et $s \in [0, 1]$,

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{i,j}(t) s^j = \left(\sum_{j=0}^{\infty} P_{1,j}(t) s^j \right)^i, \quad (5.4.16)$$

avec $(P(t), t \geq 0)$ le semi-groupe de transition du processus.

La preuve du Théorème 5.4.3 découle du Corollaire 5.3.5 et de la proposition suivante, qui donne le générateur du processus.

Proposition 5.4.4 *Le générateur du processus de branchement en temps continu est donné par*

1) $q_i = ai$. En particulier, $q_0 = 0$ et le point 0 est absorbant.

2)

$$\begin{aligned} \forall i \neq j, \quad Q_{i,j} &= i a p_{j-i+1}, \quad \text{si } j \geq i-1, \\ &= 0 \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Preuve. 1) Nous savons que $q_i = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - P_{ii}(t)}{t}$. Or $1 - P_{ii}(t) = \mathbb{P}_i(X(t) \neq i)$. Montrons que cette probabilité est proche de $\mathbb{P}_i(T_1 < t) = 1 - e^{-iat}$ pour t petit, où T_1 est l'instant de premier saut. En effet,

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_i(T_1 < t) - \mathbb{P}_i(X(t) \neq i) \\ &= \mathbb{P}_i(\text{Il y a au moins 2 sauts avant } t, \text{ un pour quitter } i \text{ et un pour y revenir}) \\ &\leq \mathbb{P}_i(T_2 < t). \end{aligned}$$

Or, $\mathbb{P}_i(T_2 < t) = \mathbb{P}_i(T_1 + T_2 - T_1 < t) \leq \mathbb{P}_i(T_1 < t) \mathbb{P}_i(T_2 - T_1 < t)$ car par construction, T_1 et $T_2 - T_1$ sont indépendants. Nous en déduisons que $\mathbb{P}_i(T_2 < t)$ est d'ordre t^2 , négligeable devant $\mathbb{P}_i(T_1 < t)$ pour t petit.

2) Par un argument similaire, nous avons également que pour $i \neq j$,

$$P_{i,j}(t) = \mathbb{P}(X_t = j | X_0 = i) = \mathbb{P}(T_1 < t, X_{T_1} = j | X_0 = i) + o(t).$$

Ainsi, $Q_{i,j} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_{i,j}(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \mathbb{P}_i(T_1 < t) \mathbb{P}_i(Z_1 = j) = a i p_{j-i+1}$. □

Nous déduisons du calcul du générateur que

$$\begin{aligned} P_{i,j}(h) &= i a p_{j-i+1} h + o(h), \quad \text{pour } j \geq i-1, \\ P_{i,i}(h) &= 1 - i a h + o(h). \end{aligned}$$

En utilisant la section précédente, nous pouvons facilement écrire les équations de Kolmogorov pour le processus Z .

$$\frac{d}{dt} P_{i,j}(t) = (PQ)_{ij}(t) = -j a P_{i,j}(t) + a \sum_{1 \leq k \leq j+1, k \neq i} k p_{j-k+1} P_{i,k}(t), \quad (\text{progressive}) \quad (5.4.17)$$

$$\frac{d}{dt} P_{i,j}(t) = (QP)_{ij}(t) = -i a P_{i,j}(t) + i a \sum_{k \geq i-1, k \neq i} p_{k-i+1} P_{k,j}(t) \quad (\text{rétrograde}), \quad (5.4.18)$$

avec les conditions initiales

$$P_{i,j}(0+) = \begin{cases} 1 & \text{pour } i = j, \\ 0 & \text{pour } i \neq j. \end{cases}$$

Par exemple, dans le cas de la reproduction binaire critique où $p_0 = p_2 = \frac{1}{2}$, l'équation de Kolmogorov rétrograde devient pour tout i, j

$$\frac{d}{dt} P_{i,j}(t) = \frac{i a}{2} (P_{i+1,j}(t) + P_{i-1,j}(t) - 2P_{i,j}(t)),$$

qui donne une équation de récurrence que l'on peut résoudre.

Toutefois, ces équations de Kolmogorov ne représentent pas l'outil le plus adapté pour décrire la loi d'un processus de branchement et il est plus judicieux d'étudier l'équation dynamique satisfaite par les fonctions génératrices, dès lors que le processus est défini en tout temps.

5.4.2 Equation pour la fonction génératrice

Nous avons vu que grâce à la propriété de branchement, les fonctions génératrices satisfont pour tout temps t la propriété (5.4.16), permettant de réduire la condition initiale à $X_0 = 1$, comme nous allons le supposer maintenant.

Pour $s \in [0, 1]$, nous posons

$$F(s, t) = \mathbb{E}(s^{X_t} | X_0 = 1) = \sum_{j \geq 0} \mathbb{P}(X_t = j | X_0 = 1) s^j = \sum_{j \geq 0} P_{1,j}(t) s^j.$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} F(s, t) &= \sum_{j \geq 0} \frac{\partial}{\partial t} P_{1,j}(t) s^j \\
 &= \sum_{j \geq 0} s^j \sum_{k \geq 0} Q_{1,k} P_{k,j}(t) \quad (\text{Equation de Kolmogorov}) \\
 &= \sum_{k \geq 0} Q_{1,k} \sum_{j \geq 0} s^j P_{k,j}(t) = \sum_{k \geq 0} Q_{1,k} (F(s, t))^k \quad (\text{Propriété de branchement (5.4.16)}).
 \end{aligned}$$

Or $Q_{1,1} = -a$ et $Q_{1,j} = a p_j$ si $j \neq 1$. D'où

$$\frac{\partial}{\partial t} F(s, t) = a \left(\sum_{j \geq 0} p_j (F(s, t))^j - F(s, t) \right) = a (g(F(s, t)) - F(s, t)),$$

où g est la fonction génératrice de la loi de reproduction. Introduisons la fonction

$$u(s) = a(g(s) - s), \quad s \in [0, 1]. \quad (5.4.19)$$

L'équation s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t} F(s, t) = a (g(F(s, t)) - F(s, t)) = u(F(s, t)) \quad (5.4.20)$$

avec $F(s, 0) = s$.

Nous allons voir comment de cette équation, nous pouvons déduire un critère de non-explosion, un critère d'extinction, la dynamique de la moyenne du processus et des calculs explicites dans des cas particuliers.

5.4.3 Critère de non-explosion

Le processus peut avoir un temps de vie infini ou n'être défini que sur un intervalle de temps $[0, T_\infty[$, où T_∞ est fini avec probabilité positive. On a le théorème suivant.

Théorème 5.4.5 *Le processus de branchement en temps continu a un temps de vie infini presque-sûrement si et seulement si $m = g'(1) < +\infty$, ou si $m = +\infty$ et*

$$\int_{1-\varepsilon}^1 \frac{ds}{u(s)} = -\infty.$$

Remarquons avant de prouver ce théorème que la fonction u est positive si g n'a que le seul point fixe 1 (et dans ce cas $m = g'(1) < +\infty$), et qu'elle est positive avant s_0 et négative ensuite dans le cas où g admet un point fixe $s_0 < 1$.

Preuve. Soit $h_i(t) = \mathbb{P}_i(T_\infty > t) = \sum_{j \geq 0} \mathbb{P}_i(Z_t = j)$. Par la propriété de branchement, nous savons que $1 - h_i(t) = 1 - h(t)^i$, où $h(t) = F(1, t)$. L'équation (5.4.20) pour $s = 1$ donne que

$$h'(t) = u(h(t)), \quad t > 0. \quad (5.4.21)$$

Un point limite de la fonction h quand t tend vers l'infini est un point stationnaire de l'équation (5.4.21) et donc un point fixe pour la fonction g . La fonction h est décroissante et $h(0) = 1$, donc $h(t) \leq 1$ pour tout $t \geq 0$. Dans le cas où g n'a que le seul point fixe 1, h est donc constante égale à 1 et $\mathbb{P}_1(T_\infty = \infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 1$.

Supposons maintenant que g admette un point fixe $s_0 < 1$. Remarquons que comme $h(0) = 1$, la fonction h est positive et décroissante et $h(t) \in]s_0, 1]$. Supposons que le processus de branchement ait un temps de vie T_∞ fini avec probabilité positive. Dans ce cas h converge vers s_0 et il existe un temps t_0 tel que $s_0 < h(t_0) < 1$. Fixons $v \in]s_0, 1[$ et posons $U(x) = \int_v^x \frac{ds}{u(s)}$. Comme la fonction $t - U(h(t))$ est de dérivée nulle, elle est constante, et $t - U(h(t)) = t_0 - U(h(t_0)) < +\infty$. En faisant tendre t vers 0, nous obtenons que $U(1^-)$ a une valeur finie. Nous en déduisons que $\int_1^1 \frac{ds}{u(s)}$ est fini, ce qui entraîne que $m = +\infty$. (Par un développement limité de $g(s)$ au voisinage de 1, on remarquera que si $m < +\infty$, l'intégrale diverge forcément).

Réciproquement, supposons que $m = +\infty$ et que $\int_1^1 \frac{ds}{u(s)}$ converge. Nous pouvons alors définir la fonction $U(x) = \int_1^x \frac{ds}{u(s)}$, pour $x \in]s_0, 1]$. En utilisant $h' = u(h)$, nous obtenons que $t - U(h(t)) = 0$, ce qui implique $h(t) < 1$ dès que $t > 0$. \square

5.4.4 Equation de moments - Probabilité et temps d'extinction

Equation de moments

Supposons que $m < +\infty$. Supposons que l'espérance de X_t existe pour tout t et que la fonction F soit suffisamment régulière. Rappelons qu'alors $m(t) = \mathbb{E}(X_t) = \frac{\partial}{\partial s} F(s, t)|_{s=1}$. De (5.4.20), nous pouvons déduire une équation satisfaite par la fonction m . En effet

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{E}(X_t) = \frac{\partial}{\partial s} u(F(s, t))|_{s=1},$$

et $t \rightarrow m(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$m'(t) = u'(F(1, t)) m(t) = u'(1) m(t),$$

avec $u'(1) = a(g'(1) - 1) = a(m - 1)$. Nous en déduisons que

$$m(t) = e^{a(m-1)t} \mathbb{E}(X_0). \quad (5.4.22)$$

Le paramètre $\rho = a(m - 1)$ est appelé paramètre de Malthus. Dans le cas sur-critique où $\rho > 0$, $m(t)$ tend vers l'infini ; dans le cas sous-critique où $\rho < 0$, $m(t)$ tend vers 0. Si $\rho = 0$, dans le cas critique, la population reste constante en moyenne.

Probabilité d'extinction

Intéressons-nous maintenant à l'extinction éventuelle de la population. Notons T_0 le temps d'extinction,

$$T_0 = \inf\{t \geq 0, X_t = 0\},$$

toujours avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$, et introduisons alors la probabilité d'extinction

$$q(t) = \mathbb{P}_1(T_0 \leq t), \quad t \in]0, +\infty[.$$

Théorème 5.4.6 *La loi du temps d'extinction est donnée implicitement par*

$$\int_0^{q(t)} \frac{ds}{u(s)} = t, \quad t \geq 0.$$

Preuve. Les arguments de preuve sont proches de ceux du Théorème 5.4.5. Remarquons que pour tout $t > 0$, $q(t) = \mathbb{P}_1(X_t = 0) = F(0, t)$ qui est une fonction bornée et croissante en temps car l'état 0 est absorbant. Il est clair que $q(0^+) = 0$ et que $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = s_0$, le plus petit point fixe de g . En effet, $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = q_\infty$ est un point stationnaire pour la dynamique définie par (5.4.20) et satisfait donc $g(q_\infty) = q_\infty$. Ainsi $q_\infty = 1$ dans les cas sous-critique et critique, et $q_\infty = s_0 < 1$ dans le cas surcritique. De (5.4.20), nous déduisons également que

$$q'(t) = u(q(t)), \quad t > 0, \tag{5.4.23}$$

avec $q(t) \in [0, s_0[$. La fonction $G(x) = \int_0^x \frac{ds}{u(s)}$ est bien définie pour $x < s_0$. En effet, dans ce cas, $g(s) > s$ et $u(s) \neq 0$. Si nous intégrons (5.4.23), nous obtenons finalement que $G(q(t)) = t$. \square

5.4.5 Le cas binaire

Cas du processus de Yule

Considérons tout d'abord le cas où chaque individu vit un temps exponentiel de paramètre $a > 0$ avant de créer deux descendants, toutes les durées de vie étant indépendantes les unes des autres ($p_2 = 1$). Ce modèle peut représenter une dynamique de bactéries avec division cellulaire en temps continu. Il peut également représenter un mécanisme de reproduction où un individu se reproduit suivant un processus de Poisson d'intensité a

et crée à chaque événement de naissance un unique descendant qui va suivre la même dynamique, indépendamment de son ancêtre et de tout le passé.

Dans ce cas, la fonction génératrice de la loi de reproduction vaut $g(s) = s^2$ et l'équation (5.4.20) devient pour chaque $t > 0$,

$$\frac{\partial}{\partial t} F(s, t) = a (F(s, t)^2 - F(s, t)) \quad \text{avec} \quad F(s, 0) = s.$$

Un calcul élémentaire donne alors

$$F(s, t) = \frac{s e^{-at}}{1 - s(1 - e^{-at})}.$$

Nous reconnaissons la fonction génératrice d'une loi géométrique de paramètre e^{-at} . Nous avons donc la proposition suivante.

Proposition 5.4.7 *Soit un processus de Yule binaire, à taux $a > 0$ et issu d'un individu unique. Alors le nombre de particules au temps t a une distribution géométrique de paramètre e^{-at} .*

Le cas général

Supposons maintenant que $p_0 + p_2 = 1$, avec $p_0 > 0$ et $p_2 > 0$, c'est à dire qu'à un instant de saut, soit l'individu meurt, soit il a un seul descendant. Ce modèle intégrera ainsi les possibles morts de bactéries en plus de la division cellulaire.

Chaque individu a un taux de mort de paramètre $d > 0$ et un taux de reproduction de paramètre $b > 0$. Dans ce cas, le taux total de saut a par individu vaut $a = b + d$ et la loi des sauts est définie ainsi : avec probabilité $p_2 = \frac{b}{b+d}$ on a une naissance et avec probabilité $p_0 = \frac{d}{b+d}$, on a une mort.

Nous avons alors $m = 2p_2 = \frac{2b}{b+d}$ et $r = b - d$ est le taux de croissance. Le processus sera donc surcritique (resp. critique ou sous-critique) si et seulement si $r > 0$, (resp. $r = 0$ ou $r < 0$).

La fonction u s'écrit alors $u(s) = d - (b + d)s + bs^2$ et $s_0 = \min(1, \frac{d}{b})$. Dans le cas binaire critique où $b = d$, $u(s) = b(1 - s)^2$.

Remarquons que, puisque $m < +\infty$, le processus n'explose pas presque-sûrement et $F(1, t) = 1$.

Nous pouvons obtenir dans ce cas binaire une forme explicite de la fonction génératrice. Calculons-la tout d'abord dans le cas critique. Par (5.4.20), elle vérifie

$$\frac{\partial}{\partial t} F(s, t) = b(1 - F(s, t))^2 ; \quad F(s, 0) = s,$$

d'où par un calcul élémentaire,

$$F(s, t) = 1 - \frac{1 - s}{1 + bt(1 - s)}. \quad (5.4.24)$$

Dans le cas de reproduction binaire non critique où $b \neq d$,

$u(s) = (1-s)(d-bs)$. Nous en déduisons par une intégration immédiate que

$$F(s, t) = 1 - \frac{(1-s)(b-d)}{(bs-d)e^{-(b-d)t} + b(1-s)}. \quad (5.4.25)$$

Rappelons que $r = b - d$. Nous savons que la probabilité $q(t) = \mathbb{P}_1(T_0 \leq t)$ vérifie $q(t) = F(0, t)$. Nous en déduisons que

$$q(t) = \begin{cases} d(e^{rt} - 1)/(be^{rt} - d) & \text{si } b \neq d \\ bt/(1 + bt) & \text{si } b = d. \end{cases}$$

Nous pouvons en déduire la probabilité d'extinction $\lim_{t \rightarrow \infty} F(0, t)$.

Si $r \leq 0$, cette limite vaut 1 et le processus s'éteint presque-sûrement.

Si $r > 0$, la probabilité de s'éteindre est $s_0 = \frac{d}{b}$.

Dans le Chapitre 5.5 concernant les processus de naissance et mort (fin du paragraphe 5.5.2), nous verrons de plus que le temps moyen d'extinction vaut

$$\mathbb{E}_1(T_0) = \frac{1}{b} \log \left(\frac{1}{1 - b/d} \right) \quad \text{si } b < d,$$

et est infini si $b \geq d$.

Remarque 5.4.8 Dans le cas critique et en utilisant (5.4.22), nous savons que la moyenne $m(t)$ est constante alors que le processus s'éteint presque-sûrement. C'est un cas où les hypothèses du théorème de convergence dominée ne sont pas vérifiées.

5.4.6 Extensions

Nous pouvons généraliser ce modèle et considérer des processus de branchement avec *immigration* ou avec *croissance logistique*.

Immigration :

Soit $\nu = (\nu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une mesure positive finie sur \mathbb{N} , ($\forall k, \nu_k \geq 0$ et $\sum_k \nu_k < +\infty$), et soit $\rho = \sum_{k \geq 0} \nu_k$. Dans ce modèle de branchement en temps continu avec immigration,

- au taux ρ , des groupes d'immigrants arrivent dans la population, indépendamment de l'état de celle-ci.
- Un groupe est composé de k individus avec probabilité $\frac{\nu_k}{\rho}$.
- Tous les individus présents dans la population se reproduisent et meurent indépendamment suivant le schéma de branchement précédent.

Le processus de branchement avec immigration a les taux de transition :

$$\begin{cases} i \rightarrow i+k & \text{au taux } i p_{k+1} + \nu_k \\ i \rightarrow i-1 & \text{au taux } i p_0. \end{cases}$$

Croissance logistique :

Dans un modèle de population avec croissance logistique,

- Tous les individus présents dans la population se reproduisent et meurent de mort naturelle indépendamment, suivant le schéma de branchement précédent. (p_0 est alors appelé taux de mort naturelle ou intrinsèque).
- Un individu subit la pression des autres individus sur sa survie. Par exemple, les individus peuvent être en compétition pour le partage des ressources. Ainsi la probabilité individuelle de survie va diminuer en fonction de la taille de la population, ce qui va se traduire par un accroissement du taux de mort.

Si l'impact de la compétition entre deux individus est décrit par le paramètre $c > 0$, le processus de population avec croissance logistique a alors les taux de transition :

$$\begin{cases} i \rightarrow i+k & \text{au taux } i p_{k+1} \\ i \rightarrow i-1 & \text{au taux } i p_0 + c i(i-1). \end{cases}$$

Du fait de l'interaction, la propriété de branchement n'est plus satisfaite. Nous allons développer dans le chapitre suivant l'étude des processus de branchement binaire avec une croissance logistique ou plus généralement avec des taux de naissance et de mort individuels dépendant de la taille de la population.

5.5 Processus de naissance et mort

5.5.1 Définition et critère de non-explosion

Définition 5.5.1 *Un **processus de naissance et mort** est un processus markovien de saut à valeurs dans \mathbb{N} dont les amplitudes des sauts sont égales à ± 1 . Ses taux de transition sont donnés par*

$$\begin{cases} i \rightarrow i+1 & \text{au taux } \lambda_i \\ i \rightarrow i-1 & \text{au taux } \mu_i, \end{cases}$$

avec $(\lambda_i)_i$ et $(\mu_i)_i$ deux suites de réels positifs ou nuls, pour $i \in \mathbb{N}$.

Remarquons que nécessairement $\mu_0 = 0$.

Si la population est sans immigration, alors $\lambda_0 = 0$ et l'état 0 est absorbant.

Un tel processus est donc une généralisation d'un processus de branchement binaire, puisqu'a priori, les taux λ_i et μ_i sont des fonctions positives très générales de l'état de la population i . La dépendance en l'état instantané de la population fait que l'on perd la propriété d'indépendance et la propriété de branchement. Ce modèle est un premier pas pour prendre en compte l'interaction entre les individus.

Le générateur infinitésimal vaut

$$Q_{i,i+1} = \lambda_i, \quad Q_{i,i-1} = \mu_i, \quad Q_{i,j} = 0 \text{ sinon.}$$

Le taux global de saut pour une population de taille i vaut $\lambda_i + \mu_i$. Ainsi après un temps de loi exponentielle de paramètre $\lambda_i + \mu_i$, le processus augmente de 1 avec probabilité $\frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}$ et décroît de -1 avec probabilité $\frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}$. Si $\lambda_i + \mu_i = 0$, le processus est absorbé en i .

Nous pouvons écrire la matrice du générateur $Q = (Q_{i,j})$.

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3 + \mu_3) & \lambda_3 & \cdots \\ \cdots & & & & & \\ \cdots & & & & & \end{pmatrix}.$$

Par le théorème 5.3.2, nous avons

$$P_{i,i+1}(h) = \lambda_i h + o(h); \quad P_{i,i-1}(h) = \mu_i h + o(h); \quad P_{i,i}(h) = 1 - (\lambda_i + \mu_i) h + o(h).$$

Exemples :

- 1) Le processus de Yule correspond à $\lambda_i = i\lambda$, $\mu_i = 0$.
- 2) Le processus de branchement ou de naissance et mort linéaire correspond à $\lambda_i = i\lambda$, $\mu_i = i\mu$.
- 3) Le processus de naissance et mort avec immigration à $\lambda_i = i\lambda + \rho$, $\mu_i = i\mu$.
- 4) Le processus de naissance et mort logistique à $\lambda_i = i\lambda$, $\mu_i = i\mu + c(i-1)$.

Les taux de naissance peuvent dépendre de i de bien des manières différentes. Par exemple un phénomène de coopération pourra se traduire par une dépendance quadratique de λ_i en i . L'effet Allee (cf. [50]) décrit un modèle de croissance quand la population est petite (taux de naissance quadratique en i) et de décroissance quand la population est grande (taux de mort cubique) de telle sorte que

$$\lambda_i - \mu_i = r i \left(1 - \frac{i}{K}\right) \left(\frac{i-A}{K}\right).$$

Remarquons que s'il existe $I \in \mathbb{N}^*$ avec $\lambda_I = 0$ alors la taille de la population ne pourra dépasser I et le processus restera borné. Si le taux de naissance croît trop vite par rapport au taux de mort, il se pourrait que le processus explose très vite. Le théorème suivant caractérise la non-explosion du processus en temps fini, par un rapport subtil entre les taux de naissance et les taux de mort. Si tel est le cas, nous pourrions définir le processus pour tout temps $t \in \mathbb{R}_+$.

Théorème 5.5.2 *Supposons que $\lambda_i > 0$ pour tout $i \geq 1$. Alors le processus de naissance et mort a un temps de vie infini presque-sûrement si et seulement si*

$$R := \sum_{i \geq 1} \left(\frac{1}{\lambda_i} + \frac{\mu_i}{\lambda_i \lambda_{i-1}} + \cdots + \frac{\mu_i \cdots \mu_2}{\lambda_i \cdots \lambda_2 \lambda_1} \right) \text{ est infini.}$$

Corollaire 5.5.3 *Si pour tout i , $\lambda_i \leq \lambda i$, avec $\lambda > 0$, le processus est bien défini sur tout \mathbb{R}_+ .*

Remarque 5.5.4 On peut vérifier que les 4 processus de naissance et mort mentionnés dans les exemples satisfont cette propriété et ont donc un temps de vie infini presque-sûrement.

Preuve. Soit $(T_n)_n$ la suite des temps de saut du processus et $(S_n)_n$ la suite des temps entre les sauts,

$$S_n = T_n - T_{n-1}, \quad \forall n \geq 1; \quad T_0 = 0, \quad S_0 = 0.$$

On note $T_\infty = \lim_n T_n$. Le processus n'explose pas presque-sûrement et est bien défini sur tout \mathbb{R}_+ si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_i(T_\infty < +\infty) = 0$.

Nous allons montrer que le processus n'explose pas presque-sûrement si et seulement si la seule solution $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ positive et bornée de $Qx = x$ est la solution nulle et nous verrons que c'est équivalent au critère de non-explosion pour les processus de naissance et mort.

Pour tout i , on pose $h_i^{(0)} = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $h_i^{(n)} = \mathbb{E}_i(\exp(-\sum_{k=1}^n S_k))$. Soit $q_i = \lambda_i + \mu_i$. La propriété de Markov entraîne que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_i \left(\exp \left(- \sum_{k=1}^{n+1} S_k \right) \middle| S_1 \right) &= \mathbb{E}_i \left(\exp(-S_1) \exp \left(- \sum_{k=2}^{n+1} S_k \right) \middle| S_1 \right) \\ &= \mathbb{E}_i \left(\exp(-S_1) \mathbb{E}_{X_{S_1}} \left(\exp \left(- \sum_{k=1}^n S_k \right) \right) \right), \end{aligned}$$

car pour le processus translaté de S_1 , les nouveaux temps de sauts sont les $T_n - S_1$. On a alors

$$\mathbb{E} \left(\mathbb{E}_{X_{S_1}} \left(\exp \left(- \sum_{k=1}^n S_k \right) \right) \right) = \sum_{j \neq i} \mathbb{P}_i(X_{S_1} = j) \mathbb{E}_j \left(\exp \left(- \sum_{k=1}^n S_k \right) \right) = \sum_{j \neq i} \frac{Q_{i,j}}{q_i} \mathbb{E}_j \left(\exp \left(- \sum_{k=1}^n S_k \right) \right).$$

Nous en déduisons que

$$\mathbb{E}_i \left(\exp \left(- \sum_{k=1}^{n+1} S_k \right) | S_1 \right) = \sum_{j \neq i} \frac{Q_{i,j}}{q_i} \mathbb{E}_j \left(\exp \left(- \sum_{k=1}^n S_k \right) \right) \mathbb{E}_i \left(\exp(-S_1) \right)$$

et que pour tout n ,

$$h_i^{(n+1)} = \sum_{j \neq i} \frac{Q_{i,j}}{q_i} h_j^{(n)} \mathbb{E}_i \left(\exp(-S_1) \right).$$

De plus, comme

$$\mathbb{E}_i \left(\exp(-S_1) \right) = \int_0^\infty q_i e^{-q_i s} e^{-s} ds = \frac{q_i}{1 + q_i},$$

nous en déduisons finalement que

$$h_i^{(n+1)} = \sum_{j \neq i} \frac{Q_{i,j}}{1 + q_i} h_j^{(n)}. \quad (5.5.26)$$

Soit $(x_i)_i$ une solution de $Qx = x$, positive et bornée par 1. Nous avons $h_i^{(0)} = 1 \geq x_i$, et grâce à la formule précédente, nous en déduisons facilement par récurrence que pour tout i et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h_i^{(n)} \geq x_i \geq 0$. En effet, si $h_j^{(n)} \geq x_j$, on a $h_i^{(n+1)} \geq \sum_{j \neq i} \frac{Q_{i,j}}{1 + q_i} x_j$.

Comme x est solution de $Qx = x$, il vérifie $x_i = \sum_j Q_{i,j} x_j = Q_{i,i} x_i + \sum_{j \neq i} Q_{i,j} x_j = -q_i x_i + \sum_{j \neq i} Q_{i,j} x_j$, d'où $\sum_{j \neq i} \frac{Q_{i,j}}{1 + q_i} x_j = x_i$, et $h_i^{(n+1)} \geq x_i$.

Si le processus n'explose pas presque-sûrement, on a $T_\infty = +\infty$ p.s., et $\lim_n h_i^{(n)} = 0$. En faisant tendre n vers l'infini dans l'inégalité précédente, nous en déduisons que $x_i = 0$. Ainsi, dans ce cas, la seule solution positive bornée de $Qx = x$ est la solution nulle.

Supposons maintenant que le processus explose avec probabilité strictement positive. Soit $z_i = \mathbb{E}_i(e^{-T_\infty})$. Il existe i avec $\mathbb{P}_i(T_\infty < +\infty) > 0$ et pour cet entier i , $z_i > 0$. Un passage à la limite utilisant $T_\infty = \lim_n T_n$ et $T_n = \sum_{k=1}^n S_k$ justifie que $z_j = \lim_n h_j^{(n)}$. La formule (5.5.26) nous permet alors de conclure que pour l'entier i tel que $z_i > 0$, $z_i = \sum_{j \neq i} \frac{Q_{i,j}}{1 + q_i} z_j$.

Nous avons obtenu une solution z de l'équation $Qz = z$, positive et bornée, avec $z_i > 0$, et exhibé ainsi une solution non triviale et bornée à l'équation.

Appliquons ce résultat au processus de naissance et mort. Supposons que $\lambda_i > 0$ pour $i \in \mathbb{N}^*$, et $\lambda_0 = \mu_0 = 0$. Soit $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une solution de l'équation $Qx = x$. Introduisons pour

$$n \geq 1, \quad \Delta_n = x_n - x_{n-1}, \quad \text{et} \quad r_n = \frac{1}{\lambda_n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\mu_{k+1} \cdots \mu_n}{\lambda_k \lambda_{k+1} \cdots \lambda_n} + \frac{\mu_1 \cdots \mu_n}{\lambda_1 \cdots \lambda_n}.$$

L'équation $Qx = x$ sera ici donnée par $x_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$ par

$$\lambda_n x_{n+1} - (\lambda_n + \mu_n) x_n + \mu_n x_{n-1} = x_n.$$

En posant $f_n = \frac{1}{\lambda_n}$ et $g_n = \frac{\mu_n}{\lambda_n}$, nous obtenons

$$\Delta_1 = x_1; \Delta_2 = x_2 - x_1 = \Delta_{n+1} = \Delta_n g_n + f_n x_n.$$

Remarquons que pour tout n , $\Delta_n \geq 0$, et donc la suite $(x_n)_n$ est croissante.

Si $x_1 = 0$, la solution est clairement nulle. Sinon, nous en déduisons que

$$\Delta_{n+1} = \frac{1}{\lambda_n} x_n + \sum_{k=1}^{n-1} f_k g_{k+1} \cdots g_n x_k + g_1 \cdots g_n x_1.$$

Puisque $(x_k)_k$ est croissante, cela entraîne que $r_n x_1 \leq \Delta_{n+1} \leq r_n x_n$, et par itération

$$x_1(1 + r_1 + \cdots r_n) \leq x_{n+1} \leq x_1 \prod_{k=1}^n (1 + r_k).$$

Nous avons donc montré que la suite $(x_n)_n$ est bornée si et seulement si la série de terme général r_k converge et le théorème est prouvé. \square

5.5.2 Equations de Kolmogorov et mesure invariante

Nous pouvons écrire dans ce cadre les deux équations de Kolmogorov.

Equation de Kolmogorov progressive : pour tous $i, j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \frac{dP_{i,j}}{dt}(t) &= \sum_k P_{i,k}(t) Q_{k,j} = P_{i,j+1}(t) Q_{j+1,j} + P_{i,j-1}(t) Q_{j-1,j} + P_{i,j}(t) Q_{j,j} \\ &= \mu_{j+1} P_{i,j+1}(t) + \lambda_{j-1} P_{i,j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) P_{i,j}(t). \end{aligned} \quad (5.5.27)$$

Equation de Kolmogorov rétrograde : pour tous $i, j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \frac{dP_{i,j}}{dt}(t) &= \sum_k Q_{i,k} P_{k,j}(t) = Q_{i,i-1} P_{i-1,j}(t) + Q_{i,i+1} P_{i+1,j}(t) + Q_{i,i} P_{i,j}(t) \\ &= \mu_i P_{i-1,j}(t) + \lambda_i P_{i+1,j}(t) - (\lambda_i + \mu_i) P_{i,j}(t). \end{aligned} \quad (5.5.28)$$

Définissons pour tout $j \in \mathbb{N}$ la probabilité

$$p_j(t) = \mathbb{P}(X(t) = j) = \sum_i \mathbb{P}(X(t) = j | X_0 = i) \mathbb{P}(X(0) = i) = \sum_i \mathbb{P}(X(0) = i) P_{i,j}(t).$$

Un calcul simple permet de montrer que dans ce cas, l'équation de Kolmogorov progressive (5.5.27) s'écrit

$$\frac{dp_j}{dt}(t) = \lambda_{j-1} p_{j-1}(t) + \mu_{j+1} p_{j+1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) p_j(t). \quad (5.5.29)$$

Cette équation décrit la dynamique de la loi du processus au temps t . Elle peut permettre en particulier de trouver une solution stationnaire quand il y en a une. Cela revient à trouver une famille $(\pi_j)_j$ de nombres compris entre 0 et 1 tels que $\sum_j \pi_j < +\infty$ et pour tout j ,

$$\lambda_{j-1} \pi_{j-1} + \mu_{j+1} \pi_{j+1} - (\lambda_j + \mu_j) \pi_j = 0.$$

5.5.3 Critère d'extinction - Temps d'extinction

Nous supposons ici que le processus est défini sur tout \mathbb{R}_+ et nous nous intéressons à la probabilité que le processus atteigne 0 en partant d'une condition initiale strictement positive. Certains des calculs de cette section peuvent être trouvés dans [46] ou dans [2] et ils sont développés rigoureusement dans [9].

Soit T_0 le temps d'atteinte de 0 par le processus de naissance et mort,

$$T_0 = \inf\{t \geq 0, X_t = 0\},$$

avec la convention $\{T_0 = +\infty\}$ si cet état n'est jamais atteint. Posons $u_i = \mathbb{P}_i(T_0 < +\infty)$ la probabilité d'extinction en temps fini, pour un processus issu de l'état i . On a $u_0 = 1$.

En conditionnant par le premier saut $X_{T_1} - X_0 \in \{-1, +1\}$ du processus, nous obtenons la relation de récurrence suivante : pour tout $i \geq 1$,

$$\lambda_i u_{i+1} - (\lambda_i + \mu_i) u_i + \mu_i u_{i-1} = 0. \quad (5.5.30)$$

Cette équation peut également être obtenue à partir de l'équation de Kolmogorov rétrograde (5.5.28). En effet, $u_i = \mathbb{P}_i(\exists t > 0, X_t = 0) = \mathbb{P}_i(\cup_t \{X_t = 0\}) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{i,0}(t)$, et

$$\frac{dP_{i,0}}{dt}(t) = \mu_i P_{i-1,0}(t) + \lambda_i P_{i+1,0}(t) - (\lambda_i + \mu_i) P_{i,0}(t).$$

Théorème 5.5.5 (i) Si $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_1 \cdots \mu_k}{\lambda_1 \cdots \lambda_k} = +\infty$, alors les probabilités d'extinction u_i sont égales à 1. Ainsi le processus de naissance et mort s'éteint presque-sûrement en temps fini pour toute condition initiale non nulle.

(ii) Si $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_1 \cdots \mu_k}{\lambda_1 \cdots \lambda_k} = U_{\infty} < +\infty$, alors pour $i \geq 1$,

$$u_i = (1 + U_{\infty})^{-1} \sum_{k=i}^{\infty} \frac{\mu_1 \cdots \mu_k}{\lambda_1 \cdots \lambda_k}.$$

Le processus a une probabilité strictement positive de survivre, pour toute condition initiale non nulle.

Preuve. Résolvons (5.5.30). Nous savons que $u_0 = 1$. Supposons tout d'abord que pour un état N , $\lambda_N = 0$ et $\lambda_i > 0$ pour $i < N$. Définissons $u_i^{(N)} = \mathbb{P}_i(T_0 < T_N)$, où T_N est le temps d'atteinte de N . Alors $u_0^N = 1$ et $u_N^N = 0$. Posons

$$U_N = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\mu_1 \cdots \mu_k}{\lambda_1 \cdots \lambda_k}.$$

Des calculs élémentaires utilisant (5.5.30) montrent que pour $i \in \{1, \dots, N-1\}$

$$u_i^{(N)} = (1 + U_N)^{-1} \sum_{k=i}^{N-1} \frac{\mu_1 \cdots \mu_k}{\lambda_1 \cdots \lambda_k} \quad \text{et en particulier} \quad u_1^{(N)} = \frac{U_N}{1 + U_N}.$$

Pour prouver le cas général, faisons tendre N vers l'infini en supposant que $\lambda_i > 0$ pour tout i . Il est immédiat de remarquer que $u_i^{(N)}$ converge alors vers u_i . Il y aura alors extinction presque sûrement en temps fini ou non, suivant que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_1 \cdots \mu_k}{\lambda_1 \cdots \lambda_k}$ diverge ou non. □

Application du Théorème 5.5.5 au processus de branchement binaire (processus de naissance et mort linéaire). Chaque individu naît à taux b ($\lambda_i = bi$) et meurt à taux d ($\mu_i = di$).

En appliquant les résultats précédents, nous voyons que quand $b \leq d$, i.e. quand le processus est sous-critique ou critique, la suite $(U_N)_N$ tend vers l'infini quand $N \rightarrow +\infty$ et on a extinction avec probabilité 1. Si en revanche $b > d$, la suite $(U_N)_N$ converge vers $\frac{d}{b-d}$ et un calcul simple montre que $u_i = (d/b)^i$. Nous retrouvons ainsi le résultat obtenu dans le Paragraphe 5.4.5.

Application du Théorème 5.5.5 au processus de naissance et mort logistique
Supposons ici que les taux de naissance et de mort valent

$$\lambda_i = \lambda i ; \quad \mu_i = \mu i + ci(i-1). \quad (5.5.31)$$

Le paramètre c modélise la pression de compétition entre deux individus. Il est facile de montrer (par le critère de d'Alembert) que dans ce cas, la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_1 \cdots \mu_k}{\lambda_1 \cdots \lambda_k}$ diverge, conduisant à l'extinction presque-sûre du processus. Ainsi, la compétition entre les individus rend l'extinction inévitable.

Revenons au cas général et supposons que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_1 \cdots \mu_k}{\lambda_1 \cdots \lambda_k}$ diverge. Le temps d'extinction T_0 est bien défini et nous souhaitons calculer ses moments. Nous utilisons les notations classiques (cf [46])

$$\pi_1 = \frac{1}{\mu_1} ; \pi_n = \frac{\lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n} \quad \forall n \geq 2.$$

Introduisons également la suite des temps de passage T_n du processus aux états n . Puisque T_0 est fini presque-sûrement, nous pouvons assurer que T_n sera également fini p.s. dès lors que le processus est issu d'une condition initiale supérieure à n .

Proposition 5.5.6 *Supposons que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_1 \cdots \mu_k}{\lambda_1 \cdots \lambda_k} = \sum_n \frac{1}{\lambda_n \pi_n} = +\infty. \quad (5.5.32)$$

Alors

(i) pour tout $a > 0$ et $n \geq 1$,

$$G_n(a) = \mathbb{E}_{n+1}(\exp(-aT_n)) = 1 + \frac{\mu_n + a}{\lambda_n} - \frac{\mu_n}{\lambda_n} \frac{1}{G_{n-1}(a)}. \quad (5.5.33)$$

(ii) $\mathbb{E}_1(T_0) = \sum_{k \geq 1} \pi_k$ et pour tout $n \geq 2$,

$$\mathbb{E}_n(T_0) = \sum_{k \geq 1} \pi_k + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k \pi_k} \sum_{i \geq k+1} \pi_i = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\sum_{i \geq k+1} \frac{\lambda_{k+1} \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_{k+1} \cdots \mu_i} \right). \quad (5.5.34)$$

Preuve. (i) Soit τ_n une variable aléatoire de même loi que T_n sous \mathbb{P}_{n+1} et considérons la transformée de Laplace de τ_n . Suivant [4, p. 264] et grâce à la propriété de Markov et au Corollaire 5.3.5, nous pouvons écrire

$$\tau_{n-1} \stackrel{(d)}{=} \mathbb{1}_{\{Y_n = -1\}} \mathcal{E}_n + \mathbb{1}_{\{Y_n = 1\}} (\mathcal{E}_n + \tau_n + \tau'_{n-1})$$

où Y_n , \mathcal{E}_n , τ'_{n-1} et τ_n sont des variables aléatoires indépendantes, \mathcal{E}_n suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_n + \mu_n$, τ'_{n-1} est distribuée comme τ_{n-1} et $\mathbb{P}(Y_n = 1) = 1 - \mathbb{P}(Y_n = -1) = \lambda_n / (\lambda_n + \mu_n)$. Nous en déduisons

$$G_{n-1}(a) = \frac{\lambda_n + \mu_n}{a + \lambda_n + \mu_n} \left(G_n(a) G_{n-1}(a) \frac{\lambda_n}{\lambda_n + \mu_n} + \frac{\mu_n}{\lambda_n + \mu_n} \right)$$

et (5.5.33) suit.

(ii) Différentiations (5.5.33) en $a = 0$. Nous obtenons que

$$\mathbb{E}_n(T_{n-1}) = \frac{\lambda_n}{\mu_n} \mathbb{E}_{n+1}(T_n) + \frac{1}{\mu_n}, \quad n \geq 1.$$

Comme dans la preuve du Théorème 5.5.5, nous étudions tout d'abord le cas particulier où $\lambda_N = 0$. Nous avons $\mathbb{E}_N(T_{N-1}) = \frac{1}{\mu_N}$ et une simple induction donne

$$\mathbb{E}_n(T_{n-1}) = \frac{1}{\mu_n} + \sum_{i=n+1}^N \frac{\lambda_n \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_n \cdots \mu_i}.$$

Nous en déduisons que $\mathbb{E}_1(T_0) = \sum_{k=1}^N \pi_k$ et en écrivant $\mathbb{E}_n(T_0) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}_k(T_{k-1})$, nous obtenons

$$\mathbb{E}_n(T_0) = \sum_{k=1}^N \pi_k + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k \pi_k} \sum_{i=k+1}^N \pi_i.$$

Pour le cas général, soit $N > n$. Le processus est continu à droite et limité à gauche et grâce à (5.5.32), le processus n'explose pas en temps fini et T_0 est fini presque-sûrement, quelque soit la condition initiale. Ainsi $\sup_{t \geq 0} X_t < +\infty$ \mathbb{P}_n -p.s. et $T_N = +\infty$ pour N assez grand. Le théorème de convergence monotone donne alors

$$\mathbb{E}_n(T_0; T_0 \leq T_N) \longrightarrow_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_n(T_0).$$

Considérons alors un processus de naissance et mort X^N avec taux de naissance et mort $(\lambda_k^N, \mu_k^N; k \geq 0)$ tels que $(\lambda_k^N, \mu_k^N) = (\lambda_k, \mu_k)$ pour $k \neq N$ et $\lambda_N^N = 0$, $\mu_N^N = \mu_N$. Puisque $(X_t, t \leq T_N)$ et $(X_t^N, t \leq T_N^N)$ ont même loi sous \mathbb{P}_n , nous avons

$$\mathbb{E}_n(T_0; T_0 \leq T_N) = \mathbb{E}_n(T_0^N; T_0^N \leq T_N^N),$$

ce qui entraîne

$$\mathbb{E}_n(T_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_n(T_0^N; T_0^N \leq T_N^N) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_n(T_0^N),$$

où la convergence du dernier terme est due à la monotonie stochastique de T_0^N par rapport à N sous \mathbb{P}_n . Utilisant maintenant que T_0^N est stochastiquement inférieur à T_0 sous \mathbb{P}_n , nous avons également

$$\mathbb{E}_n(T_0) \geq \mathbb{E}_n(T_0^N).$$

Finalement,

$$\mathbb{E}_n(T_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_n(T_0^N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \pi_k + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k \pi_k} \sum_{i=k+1}^N \pi_i,$$

ce qui conclut la preuve. \square

Remarque 5.5.7 La formule (5.5.33) permet de calculer tous les moments de T_n . L'Exercice 5.7.4 s'intéresse aux moments d'ordres 2 et 3.

Application au branchement binaire. Revenons à l'exemple du processus de branchement binaire (voir Paragraphe 5.4.5), avec taux de naissance individuel b et taux de mort individuel d , dans le cas où $d > b$. Nous avons extinction presque-sûre et nous pouvons calculer $\mathbb{E}_1(T_0)$. En effet

$$\mathbb{E}_1(T_0) = \sum_{k \geq 1} \pi_k = \sum_{k \geq 1} \frac{b^{k-1}}{k d^k} = \frac{1}{b} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \left(\frac{b}{d}\right)^k = \frac{1}{b} \log \left(\frac{1}{1 - b/d} \right).$$

Remarquons également que dans ce cas, en appliquant (5.5.34) et pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{E}_n(T_0) = \frac{1}{b} \sum_{j \geq 1} \left(\frac{b}{d}\right)^j \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+j}.$$

Une comparaison simple montre que

$$\int_1^n \frac{1}{x+j} dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+j} \leq \int_0^{n-1} \frac{1}{x+j} dx.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{b} \sum_{j \geq 1} \left(\frac{b}{d}\right)^j \left(\log(n+j) - \log(1+j) \right) \leq \mathbb{E}_n(T_0) \leq \frac{1}{b} \sum_{j \geq 1} \left(\frac{b}{d}\right)^j \left(\log(n-1+j) - \log j \right).$$

Nous en déduisons que

$$\mathbb{E}_n(T_0) \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{b-d}, \quad (5.5.35)$$

quand n tend vers l'infini. En effet, il est facile de montrer, par le Théorème de convergence dominée, que la série de terme général $\left(\frac{b}{d}\right)^j \frac{\log(n+j)}{\log n}$ converge quand n tend vers l'infini vers $\sum_{j \geq 1} \left(\frac{b}{d}\right)^j = \frac{b}{b-d}$. En effet pour j et n assez grands, $\frac{\log(n+j)}{\log n} \leq \frac{\log(nj)}{\log n} \leq 1 + \log(1+j)$ et la série $\sum_{j \geq 1} \left(\frac{b}{d}\right)^j (1 + \log(1+j))$ converge.

L'équation (5.5.35) nous dit que même si la taille de la population initiale est très grande, le temps moyen d'extinction est court dès lors que le processus est sous-critique. Nous avons déjà observé ce type de comportement pour le processus de Galton-Watson (voir Théorème 3.2.12). Mais que se passe-t-il si n est extrêmement grand, comme c'est par exemple le cas si l'on considère des cohortes de bactéries (dont la taille arrive très vite autour de 10^{10}) ? Pour étudier cette question, nous allons supposer dans le paragraphe suivant que la condition initiale n est de la forme Kx_0 , où K tend vers l'infini.

5.6 Approximations continues : modèles déterministes et stochastiques

Nous pouvons observer que les calculs deviennent vite très compliqués pour les processus de naissance et mort que nous venons d'étudier et il peut être intéressant d'en avoir des approximations plus maniables. Quand la taille de la population est très grande, les taux de saut deviennent si grands que les temps entre les sauts sont infinitésimaux et tendent vers 0. Il est donc très difficile d'observer tous les événements de saut qui surviennent et dans la limite de très grande population, la dynamique de taille de la population va être proche de celle d'un processus continu en temps. Dans ce paragraphe, nous allons obtenir des approximations valables pour les grandes populations, qui seront soit déterministes soit stochastiques suivant le choix d'échelle entre les paramètres démographiques et l'ordre de grandeur des ressources (ou de la taille de la population). Nous justifierons ainsi des modèles classiques de dynamique des populations. Ces différentes approximations vont donner des résultats qualitativement différents pour le comportement en temps long de la population et vont ainsi nous permettre de réfléchir à la pertinence du choix d'un modèle.

5.6.1 Approximations déterministes - Equations malthusienne et logistique

Supposons que le processus de naissance et mort soit paramétré par un nombre $K \in \mathbb{N}$ qui représente l'échelle de taille du système. L'hypothèse principale est que la condition initiale Z_0^K est d'ordre K , pour K tendant vers l'infini, au sens où

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{1}{K} Z_0^K = x_0 \in \mathbb{R}_+^*, \quad (5.6.36)$$

où la limite est une limite en loi. Les taux de naissance λ_i^K et de mort μ_i^K peuvent également dépendre de K . Notons $(Z_t^K, t \geq 0)$ le processus de naissance et mort ainsi défini.

Notre but est d'étudier le comportement asymptotique du processus $(Z_t^K, t \geq 0)$ quand $K \rightarrow +\infty$. Pour obtenir une approximation non triviale du processus, nous allons le renormaliser par $\frac{1}{K}$ (cela revient à donner le poids $\frac{1}{K}$ à chaque individu), et considérer le processus $(X_t^K, t \geq 0)$ défini par $X_t^K = \frac{1}{K} Z_t^K$. Les états pris par le processus X^K sont alors de la forme $\frac{i}{K}$, $i \in \mathbb{N}$.

Nous étudions donc la limite (en loi) de la suite de processus $(X_t^K, t \geq 0)$, quand K tend vers l'infini. Remarquons tout d'abord que, comme les sauts du processus de naissance et mort $(Z_t^K, t \geq 0)$ sont d'amplitude ± 1 , les sauts du processus $(X_t^K, t \geq 0)$ sont d'amplitude $\pm \frac{1}{K}$ et tendent vers 0 quand $K \rightarrow \infty$. Ainsi, si le processus $(X_t^K, t \geq 0)$ converge vers un processus limite $(X_t, t \geq 0)$, le processus $(X_t, t \geq 0)$ sera continu en temps. Remarquons également que le processus X pourra prendre n'importe quelle valeur réelle positive.

Nous allons voir que le comportement asymptotique de la suite $(X^K)_K$ est lié à la dépendance en K des taux de naissance et mort. Deux cas sont particulièrement intéressants :

Le cas du processus de naissance et mort linéaire : on a

$$\lambda_i^K = \lambda i = \lambda \frac{i}{K} K \quad ; \quad \mu_i^K = \mu i = \mu \frac{i}{K} K.$$

Posons $r = \lambda - \mu$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\lim_{K \rightarrow \infty, \frac{i}{K} \rightarrow x} \frac{1}{K} (\lambda_i^K - \mu_i^K) = r x \quad ; \quad \lim_{K \rightarrow \infty, \frac{i}{K} \rightarrow x} \frac{1}{K^2} (\lambda_i^K + \mu_i^K) = 0. \quad (5.6.37)$$

Le cas du processus de naissance et mort logistique : on a

$$\lambda_i^K = \lambda i = \lambda \frac{i}{K} K \quad ; \quad \mu_i^K = \mu i + \frac{c}{K} i(i-1) = \mu \frac{i}{K} K + c \frac{i}{K} K \left(\frac{i}{K} - \frac{1}{K} \right),$$

avec $c > 0$. Ainsi, pour tout état $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\lim_{K \rightarrow \infty, \frac{i}{K} \rightarrow x} \frac{1}{K} (\lambda_i^K - \mu_i^K) = r x - c x^2 \quad ; \quad \lim_{K \rightarrow \infty, \frac{i}{K} \rightarrow x} \frac{1}{K^2} (\lambda_i^K + \mu_i^K) = 0. \quad (5.6.38)$$

Le processus de naissance et mort linéaire ne suppose *pas d'interaction* entre les individus, ce qui peut être considéré comme irréaliste. Sous une hypothèse de ressource globale fixée, il y a en général *compétition entre les individus* pour le partage des ressources, ce qui accroît le taux de mort dans les grandes populations. Le processus de naissance et mort logistique permet de réguler la taille de la population dans le cas où le taux de croissance individuel $\lambda - \mu$ est positif. Chaque individu est en compétition avec les $i - 1$ autres individus de la population et sa biomasse est l'énergie qu'il peut consacrer à la compétition. On peut supposer qu'elle est proportionnelle à ses ressources individuelles et donc proportionnelle à $\frac{1}{K}$ puisque la taille de la population est d'ordre K . C'est pourquoi le coefficient de compétition est supposé de la forme $\frac{c}{K}$.

Dans les résultats présentés ci-dessous, nous généralisons les hypothèses ci-dessus, mais en nous focalisant toujours sur le comportement asymptotique de $\frac{1}{K} (\lambda_i^K - \mu_i^K)$ et de $\frac{1}{K^2} (\lambda_i^K + \mu_i^K)$. Nous allons supposer plus généralement dans la suite de ce paragraphe que les taux de naissance et mort vérifient

$$\lim_{K \rightarrow \infty, \frac{i}{K} \rightarrow x} \frac{1}{K} (\lambda_i^K - \mu_i^K) = H(x) \quad ; \quad \lim_{K \rightarrow \infty, \frac{i}{K} \rightarrow x} \frac{1}{K^2} (\lambda_i^K + \mu_i^K) = 0, \quad (5.6.39)$$

où la fonction H est continue.

Théorème 5.6.1 *Soit $T > 0$. Supposons que la suite $(X_0^K)_K$ converge en loi, quand K tend vers l'infini, vers une valeur déterministe x_0 et plaçons-nous sous les hypothèses (5.6.39). Supposons de plus que l'équation différentielle*

$$\frac{dx(t)}{dt} = H(x(t)) ; x(0) = x_0. \quad (5.6.40)$$

admette une solution unique.

Alors, le processus $(X_t^K, t \in [0, T])$ converge en loi vers la solution déterministe $(x(t), t \in [0, T])$ de (5.6.40).

Preuve. (succincte) Ce théorème est prouvé par un résultat de compacité-unicité sur l'ensemble des trajectoires, qui est l'ensemble des fonctions continues à droite et limitées à gauche de $[0, T]$ à valeurs dans \mathbb{R}_+ . Cet ensemble est appelé espace de Skorohod et noté $\mathbb{D}([0, T], \mathbb{R}_+)$. Il est muni d'une topologie qui le rend métrique séparable complet, ce qui permet d'appliquer les résultats généraux de caractérisation de la convergence en loi, (Cf. Billingsley [11]). La compacité de la suite des lois des processus X^K est alors caractérisée par la tension uniforme de ces lois :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \text{ un compact } K_\varepsilon \subset \mathbb{D}([0, T], \mathbb{R}_+), \text{ tel que } \sup_K \mathbb{P}(X^K \in K_\varepsilon^C) \leq \varepsilon.$$

Une caractérisation des compacts de $\mathbb{D}([0, T], \mathbb{R}_+)$ est alors possible par un critère d'équi-continuité et d'équi-bornitude adapté du critère d'Ascoli (pour les fonctions continues). Cela permet de donner des critères de tension (voir [11] ou Aldous [1]), que nous ne développerons pas plus en détail ici, mais qui sont satisfaits dans notre cas. (Voir par exemple Bansaye-Méléard [9]).

La suite des lois des processus X^K est donc compacte et il existe une sous-suite de $(X^K)_K$ qui converge en loi vers un processus X . Nous voulons montrer que X est solution de l'équation différentielle (5.6.40), ce qui assurera son unicité. Par souci de simplicité, notons encore la sous-suite par $(X^K)_K$.

Une première approche, élémentaire, consiste à étudier l'accroissement du processus $(X_t^K, t \geq 0)$ entre des temps t et $t + h$. Par le Théorème 5.3.2, pour tous $i \geq 1$ et $K \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_{t+h}^K - Z_t^K \mid Z_t^K = i) &= ((i+1-i)\lambda_i^K + (i-1-i)\mu_i^K)h + o(h) \\ &= (\lambda_i^K - \mu_i^K)h + o(h). \\ \text{Var}(Z_{t+h}^K - Z_t^K \mid Z_t^K = i) &= (\lambda_i^K + \mu_i^K)h - (\lambda_i^K - \mu_i^K)^2 h^2 + o(h). \end{aligned}$$

Ainsi, nous en déduisons que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{t+h}^K - X_t^K \mid Z_t^K = i) &= \frac{1}{K}(\lambda_i^K - \mu_i^K)h + \frac{1}{K}o(h), \\ \text{Var}(X_{t+h}^K - X_t^K \mid Z_t^K = i) &= \frac{1}{K^2}(\lambda_i^K + \mu_i^K)h + \frac{1}{K^2}o(h). \end{aligned}$$

Supposons que les infiniment petits $o(h)$ apparaissant dans les formules ci-dessus le sont uniformément en K . Ainsi, le processus limite X satisfera que

$$\begin{aligned} X_0 &= x_0, \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{E}(X_{t+h} - X_t | X_t) &= H(X_t), \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \text{Var}(X_{t+h} - X_t | X_t) &= 0. \end{aligned}$$

Les variances des accroissements tendent vers 0 plus vite que h et la stochasticité disparaît donc à la limite. Nous en déduisons que X est déterministe, continu en temps et solution de l'équation différentielle

$$\frac{dX_t}{dt} = H(X_t) ; X_0 = x_0.$$

L'unicité des solutions de cette équation entraîne alors que la suite $(X^K)_K$ converge vers l'unique solution de l'équation. La taille Z_t^K de la population est alors de l'ordre de grandeur $Kx(t)$.

Une deuxième approche de preuve moins élémentaire pour cette identification consiste à étudier la convergence des générateurs. Le générateur de X^K est défini par (5.3.6). Considérons une fonction f bornée de classe C_b^2 . Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} Q^K f\left(\frac{i}{K}\right) &= \sum_{y \in \frac{\mathbb{N}}{K}} Q^K\left(\frac{i}{K}, y\right) \left(f(y) - f\left(\frac{i}{K}\right)\right) \\ &= \lambda_i^K \left(f\left(\frac{i}{K} + \frac{1}{K}\right) - f\left(\frac{i}{K}\right)\right) + \mu_i^K \left(f\left(\frac{i}{K} - \frac{1}{K}\right) - f\left(\frac{i}{K}\right)\right) \\ &= \frac{(\lambda_i^K - \mu_i^K)}{K} f'\left(\frac{i}{K}\right) + o\left(\frac{\|f''\|_\infty}{K}\right), \end{aligned}$$

qui converge uniformément vers $Qf(x) = H(x)f'(x)$, quand $K \rightarrow \infty$ et $\frac{i}{K} \rightarrow x$. Nous reconnaissons le générateur du processus déterministe, solution de (5.6.40). \square

Equation malthusienne

Supposons que l'hypothèse (5.6.37) soit satisfaite, à savoir que $H(x) = rx$. Alors, la limite en "grande population" est décrite par la solution de l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = r x(t) ; x(0) = x_0.$$

C'est l'équation de Malthus. Il est facile de décrire le comportement en temps long de la solution $x(t)$ en fonction du signe de r .

- $r > 0$, taux de croissance positif : $x(t) \rightarrow +\infty$. La population explose.
- $r < 0$, taux de croissance négatif : $x(t) \rightarrow 0$. La population s'éteint.
- $r = 0$ taux de croissance nul. La taille de la population est stationnaire.

Equation logistique

Supposons maintenant que l'hypothèse (5.6.38) soit satisfaite. Alors, la limite en grande population est décrite par la solution de l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = x(t)(r - cx(t)) ; x(0) = x_0, \quad (5.6.41)$$

appelée *équation logistique*. Cette équation est célèbre en dynamique des populations (introduite par Verhulst en 1838, cf. [6]) dans le cas où le taux de croissance r est positif mais où la compétition va entraîner une régulation de la population et l'empêcher d'exploser.

Supposons donc $r > 0$. L'équation a deux équilibres : 0 et $\frac{r}{c} \neq 0$ et 0 est instable. Il est facile de trouver la solution explicite de l'équation (5.6.41) :

$$x(t) = \frac{rx_0 e^{rt}}{r - Cx_0 + Cx_0 e^{rt}}.$$

et de voir que cette solution converge quand $t \rightarrow \infty$, dès que $x_0 \neq 0$, vers la quantité $\frac{r}{c}$ appelée capacité de charge. Il est important de souligner la différence de comportement en temps long entre

- ce modèle logistique et le modèle de Malthus.
- cette équation logistique limite et le processus stochastique en petite population, puisque nous avons vu au Chapitre 5.5.3 que le processus de naissance et de mort logistique s'éteint presque-sûrement. Ainsi, *les limites quand $K \rightarrow \infty$ et $t \rightarrow \infty$ ne commutent pas !*

L'utilisation d'un tel modèle déterministe n'a donc de sens que pour de grandes populations. Elle ne prend pas en compte les variations stochastiques dues aux petits effectifs. Ainsi, en écologie, si la population passe en-dessous d'un certain effectif, le modèle déterministe perd son sens et il est pertinent de considérer le modèle stochastique. Des travaux de recherche récents cherchent à définir le seuil de taille à partir duquel le modèle déterministe n'est plus adapté, cf. Coron et al. [26].

5.6.2 Approximation stochastique - Stochasticité démographique, Equation de Feller

Nous considérons toujours un modèle de processus de naissance et mort linéaire ou logistique. Nous supposons maintenant que les taux de naissance et de mort individuels sont d'ordre de grandeur K . Cette hypothèse a un sens si nous considérons une population de très petits individus. En effet, la théorie métabolique qui relie la masse des êtres vivants avec leurs caractéristiques (mortalité, fécondité, etc.), prédit que les temps caractéristiques individuels (âge à maturité, durée de vie, etc) croissent avec la masse des individus (voir [12], [72]). Les taux individuels correspondant vont alors être d'autant plus grands

que les individus sont petits. Plus précisément, nous supposons que les taux individuels de naissance et de mort sont respectivement de la forme

$$\widehat{\lambda}_i^K = \gamma i K + \lambda_i^K \quad \text{et} \quad \widehat{\mu}_i^K = \gamma i K + \mu_i^K,$$

où λ_i^K et μ_i^K sont choisis comme en (5.6.39). Ainsi,

$$\lim_{K \rightarrow \infty, \frac{i}{K} \rightarrow x} \frac{1}{K} (\widehat{\lambda}_i^K - \widehat{\mu}_i^K) = H(x) \quad (5.6.42)$$

$$\lim_{K \rightarrow \infty, \frac{i}{K} \rightarrow x} \frac{1}{K^2} (\widehat{\lambda}_i^K + \widehat{\mu}_i^K) = 2\gamma x. \quad (5.6.43)$$

Par rapport à l'étude précédente, le seul calcul qui change est le calcul des variances. Ici la limite des variances n'est pas nulle. Plus précisément, on obtient que

$$\text{Var}(X_{t+h} - X_t | X_t) = 2\gamma X_t h + o(h).$$

Rappelons que par ailleurs, $\mathbb{E}(X_{t+h} - X_t | X_t) = H(X_t) h + o(h)$. Nous supposons encore (5.6.36), en permettant à la limite X_0 d'être éventuellement aléatoire. La suite de processus $(X_t^K, t \geq 0)$ converge alors vers un processus stochastique.

Théorème 5.6.2 *Soit $T > 0$. Supposons que la suite $(X_0^K)_K$ converge en loi, quand K tend vers l'infini, vers une variable aléatoire X_0 de carré intégrable. Supposons de plus que (5.6.42) et (5.6.43) soient satisfaites. Alors, la suite de processus $(X_t^K, t \in [0, T])$ converge en loi vers le processus $(X_t, t \in [0, T])$ solution de l'équation différentielle stochastique*

$$dX_t = H(X_t)dt + \sqrt{2\gamma X_t} dB_t ; X_0, \quad (5.6.44)$$

dès lors que l'on a existence et unicité de l'équation (5.6.44). ($(B_t, t \geq 0)$ désigne un mouvement brownien standard).

Dans le cas où la fonction H est lipschitzienne, le Théorème 4.6.11 nous assure de l'existence et unicité de la solution de (5.6.44). C'est en particulier vrai pour le cas malthusien, où la suite de processus $(X_t^K, t \in [0, T])$ converge vers le processus $(X_t, t \in [0, T])$ solution de l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = r X_t dt + \sqrt{2\gamma X_t} dB_t ; X_0. \quad (5.6.45)$$

C'est l'équation de Feller étudiée au Paragraphe 4.7.1 et dans l'Exercice 4.8.6.

Dans le cas logistique, l'équation limite devient

$$dX_t = (r - c X_t) X_t dt + \sqrt{2\gamma X_t} dB_t ; X_0. \quad (5.6.46)$$

C'est l'équation de Feller logistique étudiée au Paragraphe 4.7.2 et dans l'Exercice 4.8.7. Par des arguments généraux (voir [40]), l'on peut montrer qu'il y a existence et unicité

d'une solution jusqu'au temps $T_0 \wedge T_\infty$ et que 0 est un point absorbant. Or nous avons montré au Paragraphe 4.7.2 que $T_\infty = \infty$ p.s. et que $\mathbb{P}(T_0 < +\infty) = 1$. Ainsi la solution est bien définie et est unique sur tout \mathbb{R}_+ .

Preuve. La preuve du Théorème 5.6.2 se déroule de manière similaire à celle du Théorème 5.6.1, en particulier la preuve de la tension des lois. En revanche l'identification de la loi limite est plus subtile. Pour une preuve complète, nous renvoyons à Lipow [54] ou à [9]. Donnons ici quelques indications.

Par rapport à l'étude précédente, le terme qui change dans le calcul du générateur est le terme d'ordre 2 qui correspond à la variance infinitésimale. Ici ce terme n'est pas nul. Plus précisément, le générateur de X^K , pour toute fonction f de classe C_b^3 , s'écrit

$$\begin{aligned} Q^K f\left(\frac{i}{K}\right) &= \sum_{y \in \frac{\mathbb{N}}{K}} Q^K\left(\frac{i}{K}, y\right) \left(f(y) - f\left(\frac{i}{K}\right)\right) \\ &= \widehat{\lambda}_i^K \left(f\left(\frac{i}{K} + \frac{1}{K}\right) - f\left(\frac{i}{K}\right)\right) + \widehat{\mu}_i^K \left(f\left(\frac{i}{K} - \frac{1}{K}\right) - f\left(\frac{i}{K}\right)\right) \\ &= \frac{(\lambda_i^K - \mu_i^K)}{K} f'\left(\frac{i}{K}\right) + \frac{1}{2K^2} (\widehat{\lambda}_i^K + \widehat{\mu}_i^K) f''\left(\frac{i}{K}\right) + o\left(\frac{\|f'''\|_\infty}{K^2}\right), \end{aligned}$$

qui converge uniformément vers $Qf(x) = H(x)f'(x) + \gamma x f''(x)$, quand K tend vers l'infini et $\frac{i}{K}$ tend vers x . Nous reconnaissons le générateur du processus de diffusion

$$dX_t = H(X_t)dt + \sqrt{2\gamma X_t}dB_t.$$

□

Remarque 5.6.3 Nous avons introduit et justifié différents modèles markoviens, probabilistes ou déterministes, continus en temps ou à saut, qui décrivent la dynamique de la même population dans des échelles de taille et de temps variées. Ces modèles ont des comportements asymptotiques très différents.

Résumons les différentes modélisations du cas logistique :

- Le processus de naissance et mort logistique décrit la dynamique de la taille d'une petite population soumise aux fluctuations aléatoires. Le processus tend vers 0 en temps long. Nous avons obtenu en ce cas le temps moyen d'extinction comme somme d'une série.

- Le modèle déterministe : l'équation logistique - Celui-ci est une approximation en grande population du processus de naissance et mort. La solution de l'équation logistique converge quand le temps tend vers l'infini vers une limite non nulle, appelée capacité de charge, qui décrit l'état d'équilibre de la population. Ce modèle a un sens si l'on étudie une grande population, qui bien qu'aléatoire, est approchée par cette approximation déterministe. La probabilité que le processus de naissance et mort s'éloigne de la capacité de charge est petite mais non nulle et peut être quantifiée par un théorème de grandes déviations. Le

temps moyen d'extinction est alors de l'ordre de e^{CK} où $C > 0$ dépend des paramètres de naissance et mort (cf [22]).

- *L'équation différentielle stochastique de Feller logistique* - Ce modèle est une approximation en grande population, mais sous l'hypothèse que les taux de naissance et de mort sont très grands. Il est pertinent si l'on étudie des populations très petites et en grand nombre, qui se reproduisent et meurent très rapidement (populations d'insectes ou de bactéries par exemple). Le "bruit" créé par les sauts permanents dus aux naissances et aux morts est tellement important qu'il va subsister à la limite. C'est ce qui explique l'apparition d'une nouvelle stochasticité démographique, à travers le terme stochastique brownien. Dans ce cas, nous avons montré par des arguments de calcul stochastique que le processus converge presque-sûrement vers 0 et nous pouvons décrire la loi du temps d'atteinte de 0.

5.6.3 Les modèles de proie-prédateur, système de Lotka-Volterra

Il est possible de développer des modèles de processus de branchement ou de naissance et de mort multi-types en temps continu. Nous nous intéressons ici à un cas qui prend en compte les interactions entre les sous-populations des deux types.

Nous allons définir, pour une population initiale de taille K ,

- $r_i^{1,K}$: taux de croissance de la sous-population de type 1 dans l'état i ,
- $r_i^{2,K}$: taux de croissance de la sous-population de type 2 dans l'état i ,
- $\frac{c_{11}}{K} > 0$: taux de compétition entre deux individus de type 1,
- $\frac{c_{12}}{K} > 0$: taux de compétition d'un individu de type 2 sur un individu de type 1,
- $\frac{c_{21}}{K} > 0$: taux de compétition d'un individu de type 1 sur un individu de type 2,
- $\frac{c_{22}}{K} > 0$: taux de compétition entre deux individus de type 2.

Nous supposons que pour tout état x ,

$$\lim_{K \rightarrow \infty, \frac{1}{K} \rightarrow x} \frac{1}{K} r_i^{1,K} = r_1 x ; \quad \lim_{K \rightarrow \infty, \frac{1}{K} \rightarrow x} \frac{1}{K} r_i^{2,K} = r_2 x , \quad (5.6.47)$$

où r_1 et r_2 sont deux nombres réels strictement positifs, ce qui veut dire qu'en l'absence de toute compétition, les deux populations auraient tendance à se développer à vitesse exponentielle.

Nous pouvons adapter les arguments du Paragraphe 5.6.1 et montrer que le processus de naissance et mort $(\frac{1}{K} Z_t^K, t \in [0, T]) = ((\frac{1}{K} Z_t^{1,K}, \frac{1}{K} Z_t^{2,K}), t \in [0, T])$, composé des deux sous-processus décrivant les tailles des sous-populations de type 1 et de type 2 renormalisées par $\frac{1}{K}$, converge quand K tend vers l'infini vers la solution déterministe

$(x(t), t \in [0, T]) = ((x_1(t), x_2(t)), t \in [0, T])$ du système différentiel suivant :

$$\begin{aligned} dx_1(t) &= r_1 x_1(t) - c_{11} (x_1(t))^2 - c_{12} x_1(t) x_2(t), \\ dx_2(t) &= r_2 x_2(t) - c_{21} x_1(t) x_2(t) - c_{22} (x_2(t))^2. \end{aligned} \quad (5.6.48)$$

Ces systèmes ont été beaucoup étudiés par les biologistes théoriciens et par les spécialistes de systèmes dynamiques. Ils sont connus sous le nom de systèmes de Lotka-Volterra compétitifs. L'on peut montrer facilement que le système a un équilibre instable $(0, 0)$ et trois équilibres stables $(\frac{r_1}{c_{11}}, 0)$, $(0, \frac{r_2}{c_{22}})$ qui représentent la fixation d'une population et la disparition de l'autre et un équilibre non trivial (x_1^*, x_2^*) facilement calculable qui décrit une population à l'équilibre avec coexistence des deux types.

Il est possible de généraliser l'hypothèse (5.6.47) comme au Paragraphe 5.6.1 ou considérer des paramètres $c_{ij} > 0$ qui peuvent modéliser de la coopération et obtenir ainsi un système dynamique plus compliqué. Un cas très célèbre de tel système dynamique est le modèle de proie-prédateur. Le modèle historique de prédation est dû à Volterra (1926) et de manière presque contemporaine à Lotka (voir [6]). Imaginons que les deux types de populations sont respectivement des proies et les prédateurs de ces proies. Nous supposons que :

- En l'absence de prédateurs, l'effectif de la population de proies croît exponentiellement.
- En l'absence de proies, l'effectif de la population de prédateurs décroît exponentiellement.
- Les taux de disparition des proies et de croissance des prédateurs sont proportionnels au nombre de rencontres entre une proie et un prédateur.

Nous obtenons alors le modèle suivant :

$$\begin{aligned} dx_1(t) &= \alpha_1 x_1(t) - \beta_1 x_1(t) x_2(t), \\ dx_2(t) &= -\alpha_2 x_2(t) + \beta_2 x_1(t) x_2(t), \end{aligned} \quad (5.6.49)$$

où les paramètres α_1 , α_2 , β_1 et β_2 sont positifs. Pour l'étude des systèmes (5.6.48) et (5.6.49), nous renvoyons en particulier au livre de Jacques Ista [41]. Voir aussi Renshaw [65], Kot [50].

Il existe aussi une version stochastique du modèle (5.6.48) où l'on peut ajouter à chaque équation un terme de la forme $\sqrt{\gamma_i} X_i(t) dB_i(t)$, où B_i est un mouvement brownien. Ce système de Lotka-Volterra stochastique est obtenu comme approximation du processus de naissance et mort multi-type dans le cas de naissances et morts très rapides, comme pour l'équation de Feller. (Voir Cattiaux-Méléard [16]).

5.7 Exercices

Exercice 5.7.1 Effet de la pêche sur un banc de sardines

On modélise ici l'évolution du nombre de sardines présentes dans un banc par un processus $(X_t, t \geq 0)$. Les sardines se reproduisent et leur nombre croît au taux $g > 0$. A des instants

$(T_i : i \geq 1)$ aléatoires, la pêche provoque la disparition d'une proportion de la population de sardines.

Nous modélisons le processus comptant les événements de pêche, $N_t := \text{Card}\{i \geq 1 : T_i \leq t\}$, par un processus de Poisson d'intensité $r > 0$.

De plus les pêches successives ont des effets indépendants et identiquement distribués, indépendants de $(N_t : t \geq 0)$.

On suppose que $X_0 = 1$.

1 - Justifier que la taille de la population de sardines au temps $t \geq 0$ est donnée par le processus

$$X_t = e^{gt} \prod_{i=1}^{N_t} F_i$$

où les $(F_i : i \geq 1)$ forment une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une variable aléatoire $F \in [0, 1]$.

Dans la suite, on suppose que $\mathbb{E}(\log(\frac{1}{F})) < +\infty$.

On rappelle que $\frac{N_t}{t} \rightarrow r$ p.s. quand $t \rightarrow +\infty$ (voir Proposition 5.2.15).

2-a - Montrer que

$$\frac{\log(X_t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} g - r \mathbb{E}(\log(\frac{1}{F})) \quad \text{p.s.}$$

2-b - En déduire la limite presque-sûre de X_t , quand $g \neq r \mathbb{E}(\log(\frac{1}{F}))$.

3-a - Montrer que

$$Y_t = e^{-gt+rt(1-\mathbb{E}(F))} X_t$$

est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t), t \geq 0)$.

3-b - En déduire que Y_t converge p.s. vers une variable aléatoire Y_∞ finie presque-sûrement.

3-c - On suppose que $\mathbb{P}(F = 1) < 1$. Montrer que $Y_\infty = 0$ p.s..

4 - Une législation pour la préservation des sardines pourrait consister à fixer l'effet moyen de la pêche, c'est-à-dire fixer $c = \mathbb{E}(F) \in]0, 1[$.

Cette contrainte est-elle judicieuse pour la préservation des sardines ?

Pour une valeur c fixée par la législation, existe-t-il un taux de croissance g qui assure la survie des sardines ?

Exercice 5.7.2

On admet que la population des individus infectés par le virus VIH croît selon un processus de Poisson d'intensité inconnue λ . On notera N_t le nombre d'individus infectés à l'instant t . On ne prendra pas en compte les décès.

Chaque individu infecté subit une période d'incubation entre le moment où il est infecté par le VIH et le moment où les symptômes du SIDA apparaissent. La durée de cette période d'incubation est aléatoire. Les périodes d'incubation pour les différents individus sont indépendantes et identiquement distribuées, de loi commune la loi sur \mathbb{R}_+ de fonction de répartition connue G . On notera pour $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\tilde{G}(t) = 1 - G(t).$$

On note N_t^1 le nombre d'individus qui, à l'instant t , présentent les symptômes du SIDA, et par N_t^2 le nombre d'individus qui, à l'instant t , sont infectés par le VIH mais ne présentent pas encore les symptômes du SIDA.

1 - *Préliminaires* : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note S_n l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$. Soit $t > 0$ et X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes, de loi uniforme sur $[0, t]$. On appelle (Y_1, \dots, Y_n) la même suite ordonnée par ordre croissant.

Montrer que le vecteur aléatoire (Y_1, \dots, Y_n) suit la loi uniforme sur l'ensemble

$$\{(y_1, \dots, y_n); y_1 \leq \dots \leq y_n \leq t\},$$

dont on donnera la densité. (On pourra remarquer que pour toute f continue bornée,

$$\mathbb{E}(f(Y_1, \dots, Y_n)) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathbb{E}(f(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) \mathbf{1}_{\{X_{\sigma(1)} \leq \dots \leq X_{\sigma(n)}\}}).$$

2 - Soient T_1, T_2, \dots, T_n les n premiers temps de saut du processus $(N_t, t \geq 0)$.

Soit $0 < t_1 < \dots < t_n < t$. Calculer

$$\mathbb{P}(T_1 < t_1 < T_2 < t_2 < T_3 < \dots < T_n < t_n | N_t = n).$$

En déduire que la loi conditionnelle du vecteur aléatoire (T_1, \dots, T_n) sachant $N_t = n$ est la loi trouvée en 1).

3 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et (T_1, \dots, T_n) défini comme ci-dessus. On appelle (Z_1, \dots, Z_n) le vecteur $(T_{\sigma(1)}, \dots, T_{\sigma(n)})$, où σ est une permutation aléatoire indépendante du processus $(N_t, t \geq 0)$ et tirée uniformément dans S_n .

Donner la loi de (Z_1, \dots, Z_n) conditionnellement à $N_t = n$.

4 - Quelle est la probabilité qu'un individu infecté par le VIH au temps s voit les symptômes apparaître au temps t ? En déduire la probabilité p_t que l'individu infecté au temps Z_i soit malade au temps t , et la probabilité q_t qu'il ne le soit pas. (On remarquera qu'elles ne dépendent pas de i).

5 - Calculer, pour $k, l \in \mathbb{N}$, la probabilité $\mathbb{P}(N_t^1 = k; N_t^2 = l)$.

En déduire que pour tout $t > 0$, N_t^1 et N_t^2 sont deux variables aléatoires indépendantes, qui suivent des lois de Poisson dont on donnera les paramètres.

Exercice 5.7.3

Soient $(N_t^1, t \geq 0)$ et $(N_t^2, t \geq 0)$ deux processus de Poisson indépendants d'intensité respective λ_1 et λ_2 . Ces deux processus sont définis par leurs suites de temps de sauts : $(T_n^1)_n$ et $(T_m^2)_m$, par :

$$N_t^1 = \sum_{j \geq 1} \mathbb{1}_{\{T_j^1 \leq t\}} \quad ; \quad N_t^2 = \sum_{j \geq 1} \mathbb{1}_{\{T_j^2 \leq t\}}.$$

- 1 - Quelle est la loi du couple de variables aléatoires (T_1^1, T_1^2) ?
- 2 - En déduire la valeur de $\mathbb{P}(T_1^1 < T_1^2)$.
- 3 - Quelle est loi de la variable aléatoire $\tau = \inf(T_1^1, T_1^2)$.
- 4 - Soit $0 \leq s \leq t$. Donner la fonction génératrice de la variable aléatoire $N_t^1 - N_s^1$.
- 5 - On définit le processus $(N_t, t \geq 0)$ par $N_t = N_t^1 + N_t^2$.
Donner la fonction génératrice de la variable aléatoire $N_t - N_s$.
En déduire que $(N_t, t \geq 0)$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda_1 + \lambda_2$.
- 6 - On note R_k la suite des temps de saut de $(N_t)_t$:

$$N_t = \sum_{j \geq 1} \mathbb{1}_{\{R_j \leq t\}}.$$

On introduit également une suite $(X_j)_j$ de variables aléatoires indépendantes, de même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$, et indépendante du processus de Poisson $(N_t)_t$.

On définit les processus $(M_t^1)_t$ et $(M_t^2)_t$ par

$$M_t^1 = \sum_{j \geq 1} \mathbb{1}_{\{R_j \leq t\}} \mathbb{1}_{\{X_j = 1\}} \quad ; \quad M_t^2 = \sum_{j \geq 1} \mathbb{1}_{\{R_j \leq t\}} \mathbb{1}_{\{X_j = 0\}}.$$

Calculer, en conditionnant par la valeur de N_t , la probabilité $\mathbb{P}(M_t^1 = k_1; M_t^2 = k_2)$, pour $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$.

En déduire que M_t^1 et M_t^2 sont deux variables aléatoires de Poisson indépendantes de paramètres respectifs λ_1 et λ_2 .

On admettra de plus que les processus $(M_t^1)_t$ et $(M_t^2)_t$ sont des processus de Poisson indépendants d'intensités respectives λ_1 et λ_2 .

- 7 - On rappelle que R_{n+m-1} est le $(n+m-1)$ -ième temps de saut du processus (N_t) .
Montrer que pour tout entier $k \leq n+m-1$, on a

$$\mathbb{P}(M_{R_{n+m-1}}^1 = k) = \binom{n+m-1}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{n+m-1-k}.$$

- 8 - Justifier que pour $n, m \in \mathbb{N}^*$, $\{T_n^1 < T_m^2\}$ a même probabilité que $\{M_{R_{n+m-1}}^1 \geq n\}$, où T_n^1 et T_m^2 ont été définis au début de l'exercice.

9 - En déduire que

$$\mathbb{P}(T_n^1 < T_m^2) = \sum_{k=n}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{n+m-1-k}.$$

Exercice 5.7.4

Considérons un processus de naissance et mort avec les notations du Paragraphe 5.5.2 et supposons que (5.5.32) soit vérifié. Montrer que pour tout $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{n+1}(T_n^2) &= \frac{2}{\lambda_n \pi_n} \sum_{i \geq n} \lambda_i \pi_i \mathbb{E}_{i+1}(T_i)^2; \\ \mathbb{E}_{n+1}(T_n^3) &= \frac{6}{\lambda_n \pi_n} \sum_{i \geq n} \lambda_i \pi_i \mathbb{E}_{i+1}(T_i) \text{Var}_{i+1}(T_i).\end{aligned}$$

Exercice 5.7.5

On considère une population constituée de N individus de deux types, notés A et a . La dynamique de cette population est la suivante : chaque individu A donne naissance à un autre individu A au taux 1 et chaque individu a donne naissance à un autre individu a au taux $1 + s$, où $s > -1$ représente l'avantage sélectif de a . Simultanément à chaque naissance, un individu est choisi au hasard parmi les N individus de la population, et meurt au profit du nouveau-né.

Ainsi, la population reste de taille constante égale à N .

On note N_t le nombre d'individus de type a présents au temps t .

1 - Supposons qu'il y ait k individus de type a dans la population. Quel est le taux de naissance d'un individu de type a ? Quelle est la probabilité qu'un individu de type A soit remplacé par un individu de type a ?

En déduire le générateur infinitésimal du processus de Markov $(N_t, t \geq 0)$. Que dire des états 0 et N pour le processus $(N_t, t \geq 0)$?

2 - On note $T_N = \inf\{t \geq 0 : N_t = N\}$ et pour $k \in \{0, \dots, N\}$ on pose

$$u(k) = \mathbb{P}_k(T_N < +\infty) = \mathbb{P}(T_N < +\infty | N_0 = k).$$

Pour $k \in \{1, \dots, N-1\}$ donner une relation reliant $u(k+1)$, $u(k)$ et $u(k-1)$.

3 - En déduire une expression de u . (On pourra traiter à part le cas $s = 0$).

4 - Pour tout $k \in \{0, \dots, N\}$ on note $w(k) = \mathbb{E}_k(T_N \mathbb{1}_{T_N < +\infty}) = \mathbb{E}(T_N \mathbb{1}_{T_N < +\infty} | N_0 = k)$. Montrez que pour tout $k \in \{1, \dots, N-1\}$ on a la relation

$$\frac{k(N-k)}{N}(1+s)(w(k+1) - w(k)) + \frac{k(N-k)}{N}(w(k-1) - w(k)) = -u(k).$$

5 - Dans le cas où $s = 0$ en déduire une expression pour $\mathbb{E}_1(T_N | T_N < +\infty)$.

Exercice 5.7.6

Soit $(Z_t, t \geq 0)$ un processus de branchement binaire de taux de naissance et de mort respectivement b et d . On note $r = b - d$ le taux de croissance, et l'on suppose que $r > 0$. On note \mathcal{P}_k la loi de ce processus issu de k individus.

1 - Justifier que pour tout entier k , et tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $\mathbb{E}_k(Z_t) = ku(t)$, où u est une fonction qui ne dépend que de t .

En déduire que pour tout entier k , et tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $\mathbb{E}_k(Z_t) = k \exp(rt)$, où l'indice k indique que $Z_0 = k$. (On pourra utiliser l'équation de Kolmogorov rétrograde).

2 - En utilisant la propriété de Markov, montrer que $(Z_t \exp(-rt); t \geq 0)$ est une martingale (pour la filtration engendrée par Z).

3 - On désigne par T_n le premier temps d'atteinte de l'entier n par le processus $(Z_t, t \geq 0)$.

3-a - Justifier que

$$T_n > T_0 \Rightarrow T_n = +\infty.$$

3-b - En déduire rigoureusement que $\mathbb{E}_k(\exp(-rT_n)) = k/n$, $\forall n \geq k$.

4 - Soit ρ une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $r > 0$, indépendante du processus $(Z_t, t \geq 0)$.

4-a - Montrer que $\mathbb{P}_k(T_n \leq \rho) = \frac{k}{n}$.

4-b - Soit $S_t := \sup_{s \leq t} Z_s$. Trouver la loi de S_ρ .

Que vaut $\mathbb{E}(S_\rho)$?

Exercice 5.7.7

Soit $(X_t, t \geq 0)$ un processus de naissance et mort en temps continu, issu de $X_0 > 0$ et de générateur

$$\begin{aligned} Q_{i,i+1} &= \lambda i, \quad \forall i \geq 0, \\ Q_{i,i-1} &= \mu i(i-1), \quad \forall i \geq 1. \end{aligned}$$

1-a - Le processus $(X_t, t \geq 0)$ peut-il atteindre 0 ?

1-b - Donner les probabilités de transition de la chaîne de Markov incluse.

1-c - Montrer que la chaîne de Markov incluse est irréductible sur \mathbb{N}^* . Est-elle irréductible sur \mathbb{N} ?

2 - Soit $\pi = (\pi_j, j \in \mathbb{N}^*)$ une probabilité invariante sur \mathbb{N}^* , c'est à dire telle que $\pi Q = 0$.

2-a - Déterminer l'équation satisfaite par cette probabilité invariante π .

2-b - Montrer que, pour chaque $i \in \mathbb{N}^*$, on a $\pi_i = \frac{\lambda^{i-1}}{i! \mu^{i-1}} \pi_1$.

2-c - Montrer que $\pi_1 = \frac{\lambda}{\mu(e^{\lambda/\mu} - 1)}$.

3 - Soit Y une variable aléatoire de Poisson de paramètre $a > 0$.

3-a - Calculer $\mathbb{P}(Y > 0)$.

En déduire la valeur de $\mathbb{P}(Y = i | Y > 0)$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$.

3-b - Montrer que π est la loi de Poisson d'une variable aléatoire de Poisson conditionnée à rester strictement positive, dont on donnera le paramètre.

Exercice 5.7.8 *Le but de l'exercice est de modéliser une dynamique de population avec immigration.*

Soit $(X_t, t \geq 0)$ un processus de naissance et de mort, à valeurs dans \mathbb{N} , de générateur Q donné pour tout $k \geq 1$ (k nombre entier), par :

$$\begin{aligned} Q_{k,k+1} &= \lambda k + a, \\ Q_{k,k-1} &= \mu k, \\ Q_{k,k} &= -(\lambda k + \mu k + a), \end{aligned}$$

où a , λ et μ sont trois réels strictement positifs.

1 - Donner la chaîne de Markov incluse.

2 - Soit $P_{ij}(t) = \mathbb{P}(X_t = i | X_0 = j)$. Ecrire l'équation aux dérivées partielles pour P .

3 - Soit $\mathbb{E}_i(X_t) = \mathbb{E}(X_t | X_0 = i)$. Montrer que

$$\partial_t \mathbb{E}_i(X_t) = (\lambda - \mu) \mathbb{E}(X_t | X_0 = i) + a.$$

4 - Calculer $\mathbb{E}_i(X_t)$.

5 - Etudier la limite, quand $t \rightarrow +\infty$, de $\mathbb{E}_i(X_t)$. On pourra discuter suivant les valeurs respectives de λ et μ .

6 - Soit $\pi = (\pi_j, j \in \mathbb{N})$ une probabilité sur \mathbb{N} telle que $\pi Q = 0$.

On suppose que $\lambda < \mu$. Montrer que pour tout $k \geq 1$

$$\pi_k = \frac{a(\lambda + a)(2\lambda + a) \cdots ((k-1)\lambda + a)}{\mu \cdot 2\mu \cdots (k-1)\mu \cdot k\mu} \pi_0.$$

7 - Montrer que

$$\pi_0 = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{a}{\lambda}}.$$

On pourra utiliser la formule suivante : pour tout $x \in [0, 1[$, pour tout $N \in \mathbb{R}_+$,

$$\frac{1}{(1-x)^N} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{N+k-1}{k} x^k,$$

où pour tout $N \in \mathbb{R}_+$,

$$\binom{N+k-1}{k} = \frac{(N+k-1)(N+k-2) \cdots N}{k!}.$$

8 - En déduire π .

Exercice 5.7.9 *Processus de branchement binaire et diffusion de Feller - Modèle de division de populations.*

Partie I : Processus de branchement binaire.

On considère un processus de naissance et mort $(X_t : t \geq 0)$ où indépendamment, les individus se reproduisent au taux b et meurent au taux d , avec $b \neq d$.

I.0 - Quelle est alors la loi du temps de vie d'un individu donné ?

A quelle(s) hypothèse(s) biologique(s) ces caractéristiques mathématiques correspondent-elles ?

Quelle est la loi du nombre de fois où un individu se reproduira au cours de son existence ?

I.1 - Quel est le générateur du processus $(X_t : t \geq 0)$?

I.2 - On note $u_\lambda(t, x) = \mathbb{E}(\exp(-\lambda X_t) \mid X_0 = x)$ pour $\lambda \geq 0$ et $x \in \mathbb{N}$.

a - Montrer que pour tout $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{N}$,

$$u_\lambda(t, x) = u_\lambda(t, 1)^x.$$

b - Montrer que u_λ vérifie pour tout $t \geq 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_\lambda(t, 1) = (u_\lambda(t, 1) - 1)(bu_\lambda(t, 1) - d), \quad u_\lambda(0, 1) = \exp(-\lambda).$$

Cette équation se résout par séparation des variables et on admet que

$$u_\lambda(t, 1) = 1 - \frac{(b-d)}{b - [b - d \exp(\lambda)][1 - \exp(\lambda)]^{-1} \exp(-(b-d)t)}.$$

I.3 - Montrer que $\mathbb{P}_1(X_t = 0)$ peut s'obtenir à partir de la fonction $\lambda \rightarrow u_\lambda(t, 1)$.

En déduire que pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}_1(X_t > 0) = \frac{(b - d)}{b - d \exp(-(b - d)t)}.$$

Remarque : On trouve ainsi la vitesse d'extinction du processus de branchement binaire obtenu au Paragraphe 5.4.5.

Partie II : Diffusion de Feller et comportement asymptotique.

On appelle diffusion de Feller ($Y_t : t \geq 0$) de paramètre $\sigma > 0$ le processus qui vérifie l'équation différentielle stochastique :

$$Y_t = y_0 + \int_0^t Y_s ds + \int_0^t \sigma \sqrt{2Y_s} dB_s,$$

avec $y_0 \geq 0$.

II.0 - Considérons le processus Z solution de l'EDS

$$Z_t = z_0 + \int_0^t h(Z_s) ds + \int_0^t g(s, Z_s) dB_s.$$

Justifier que pour la fonction f de classe $C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} f(t, Z_t) &= f(0, z_0) + \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial s}(s, Z_s) + \frac{\partial f}{\partial y}(s, Z_s) h(Z_s) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(s, Z_s) g(s, Z_s)^2 \right] ds \\ &\quad + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}(s, Z_s) g(s, Z_s) dB_s. \end{aligned}$$

II.1 - Montrer que $\bar{Y}_t = Y_t e^{-t}$ vérifie l'équation différentielle stochastique

$$\bar{Y}_t = y_0 + \int_0^t e^{-s/2} \sigma \sqrt{2\bar{Y}_s} dB_s.$$

II.2 - Soit $t_0 \geq 0$. On pose pour $t \in [0, t_0]$, et $\lambda, y \geq 0$,

$$v_\lambda(t, y) = \exp \left(- \frac{\lambda y}{\sigma^2 \lambda (\exp(-t) - \exp(-t_0)) + 1} \right)$$

et on vérifie facilement que cette fonction satisfait pour tous $s, y \geq 0$,

$$\frac{\partial v_\lambda}{\partial s}(s, y) + \frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial y^2}(s, y) \sigma^2 y e^{-s} = 0.$$

a - Montrer que $(v_\lambda(t, \bar{Y}_t) : 0 \leq t \leq t_0)$ satisfait l'équation différentielle stochastique

$$v_\lambda(t, \bar{Y}_t) = v_\lambda(0, y_0) - \int_0^t \lambda \frac{v_\lambda(s, \bar{Y}_s)}{\sigma^2 \lambda (\exp(-s) - \exp(-t_0)) + 1} e^{-s/2} \sigma \sqrt{2 \bar{Y}_s} dB_s.$$

On admettra alors que $(v_\lambda(t, \bar{Y}_t) : 0 \leq t \leq t_0)$ est une martingale par rapport à la filtration brownienne.

b - En déduire la valeur de $\mathbb{E}_{y_0}(v_\lambda(t_0, \bar{Y}_{t_0}))$ puis que

$$\mathbb{E}_{y_0}(\exp(-\lambda Y_t)) = \exp\left(-\frac{y_0}{\sigma^2(1 - \exp(-t)) + (\lambda \exp(t))^{-1}}\right).$$

c - Justifier sommairement que la loi de Y_t partant de $y_0 + y'_0$ est la même que celle de $Y_t^1 + Y_t^2$, où Y^1 et Y^2 sont deux diffusions de Feller indépendantes de même loi que Y issues respectivement de y_0 et y'_0 .

II.3 - Montrer que

$$\mathbb{P}_{y_0}(Y_t > 0) = 1 - \exp\left(-\frac{y_0}{\sigma^2(1 - \exp(-t))}\right),$$

puis que $\mathbb{P}_{y_0}(\forall t \geq 0 : Y_t > 0) = 1 - \exp(-y_0/\sigma^2)$.

II.4 - On considère pour $N \geq 1$ le processus de branchement binaire $(X_t^N : t \geq 0)$ avec taux de naissance individuel $b_N = b + \sigma^2 N$ et taux de mort individuel $d_N = b - 1 + \sigma^2 N$, où $b > 1$.

a - A votre avis, que modélisent des taux de naissance et de mort de cette forme ?

Quel est le taux de croissance moyen de la population ?

b - Vérifier que $u_\lambda^{(N)}(t) = \mathbb{E}_1(\exp(-\lambda X_t^N))$ satisfait

$$1 - u_{\lambda/N}^{(N)}(t) \sim \frac{1}{N} \frac{\lambda}{\lambda \sigma^2 + (1 - \lambda \sigma^2) \exp(-t)} \quad \text{lorsque } N \rightarrow \infty.$$

c - En déduire que pour tous $t, \lambda \geq 0$,

$$\mathbb{E}(\exp(-\lambda X_t^N/N) \mid X_0 = N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_1(\exp(-\lambda Y_t)).$$

d - Expliquer comment simuler une diffusion de Feller de paramètre σ à partir de variables aléatoires exponentielles de paramètre 1 indépendantes.

Partie III : Diffusion de Feller branchante

Une population d'insectes se développe avec des naissances et des morts rapides. On modélise sa taille Y_t au temps t par la diffusion de Feller de paramètre $\sigma > 0$ définie dans la partie II. On suppose que la taille initiale de la population est $Y_0 = 1$ p.s.

III.1 - On note $T_x = \inf\{t \geq 0 : Y_t = x\}$ pour $x \geq 0$.

a - Montrer que $\alpha = \sup\{\mathbb{P}_x(Y_1 > 0) : x \in [0, 2]\} < 1$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}_1(Y_{n+1} > 0, Y_n < 2, Y_{n-1} < 2, \dots, Y_1 < 2) \leq \alpha^{n+1}.$$

En déduire que $\mathbb{P}_1(T_0 = \infty, T_2 = \infty) = 0$.

b - Montrer en utilisant la partie précédente que

$$\mathbb{P}_1(T_2 < T_0) \geq 1 - \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2}\right) > 0.$$

Si la population d'insectes atteint la taille 2, elle se divise en deux sous-populations de taille 1 à cause de contraintes de ressources. Les deux populations évoluent alors indépendamment suivant des diffusions de Feller de paramètre σ issues de 1. Celles-ci, de manière similaire, s'éteignent ou atteignent le niveau 2 et se séparent de nouveau en deux sous-populations de taille 1, etc.

III.2 - On considère le processus de Galton-Watson Z_n où chaque individu meurt avec probabilité $1 - p$ et a deux enfants avec probabilité p , où $p = \mathbb{P}_1(T_2 < T_0)$.

Justifier que la probabilité que le nombre de sous-populations d'insectes en vie atteigne zéro en temps fini est la probabilité d'extinction du processus Z_n .

III.3 - Quelle est la probabilité que la taille totale de la population d'insectes (obtenue en sommant sur les tailles de chaque sous-population) tende vers l'infini en temps infini ?

Que dire alors du comportement asymptotique du nombre de populations présentes ?

Exercice 5.7.10

Comportement quasi-stationnaire de certains processus

Le but de ce problème est de comprendre le comportement en temps long de certains processus markoviens. Par exemple, il a été vu en cours qu'un processus de Galton-Watson sous-critique s'éteint en temps fini avec probabilité 1, mais que le conditionner à survivre pendant un long temps permet d'obtenir une distribution *quasi-stationnaire* décrivant son état avant l'extinction. Nous allons généraliser ce résultat aux processus markoviens de saut à espace d'états fini.

On s'intéresse donc ici à un processus markovien $(Z_t)_{t \geq 0}$ prenant ses valeurs dans l'espace $\{0, 1, \dots, N\}$ (où $N \geq 1$ est un entier fixé) et dont le seul état absorbant est 0. On suppose que le temps d'atteinte T_0 de 0 est fini p.s..

On rappelle que si ν est une distribution sur $\{1, \dots, N\}$, \mathbb{P}_ν désigne la mesure de probabilité donnée par

$$\mathbb{P}_\nu(Z_t = j) = \sum_{i=1}^N \nu(i) \mathbb{P}_i(Z_t = j), \quad \forall t \geq 0, j \in \{0, \dots, N\},$$

sous laquelle la valeur initiale Z_0 a pour loi ν .

1 - Donner un exemple de situation biologique dans laquelle il semble pertinent de représenter la population par un processus de Markov à espace d'états fini et absorbé en 0.

2 - On rappelle qu'une distribution α est dite *quasi-stationnaire* pour Z si pour tout $t \geq 0$ et tout $j \in \{1, \dots, N\}$,

$$\sum_{i=1}^N \alpha(i) \mathbb{P}_i(Z_t = j \mid Z_t > 0) = \alpha(j).$$

2-a - Supposons que Z admette une distribution quasi-stationnaire α . Montrer que pour tous $s, t \geq 0$ et $j \in \{1, \dots, N\}$, on a

$$\mathbb{P}_\alpha(T_0 > t + s, Z_t = j) = \mathbb{P}_\alpha(T_0 > t + s \mid Z_t = j) \mathbb{P}_\alpha(Z_t = j \mid T_0 > t) \mathbb{P}_\alpha(T_0 > t).$$

En déduire que

$$\mathbb{P}_\alpha(T_0 > t + s) = \mathbb{P}_\alpha(T_0 > t) \mathbb{P}_\alpha(T_0 > s).$$

2-b - En déduire que si Z_0 a pour loi α , alors le temps d'extinction de Z suit une loi exponentielle dont on notera $\theta(\alpha)$ le paramètre.

Dans la suite, on note \bar{P}_t la matrice de coefficients $\bar{P}_t(i, j) = \mathbb{P}_i(X_t = j)$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, N\}$ (on remarquera que la matrice \bar{P}_t de taille $N \times N$ est obtenue à partir de P_t en oubliant l'état 0). On suppose que \bar{P}_1 a ses entrées strictement positives et que $\mathbb{P}_i(Z_1 = 0) > 0$ pour tout i .

3-a - Justifier que pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$,

$$\sum_{j=1}^N \bar{P}_1(i, j) < 1.$$

3-b - Montrer que le Théorème de Perron-Frobenius (Théorème 3.7.7) s'applique et qu'il existe

- une unique valeur propre réelle $\lambda_0 > 0$, supérieure en module à toutes les autres (réelles ou complexes),
- un unique vecteur propre à gauche u et un unique vecteur propre à droite v tels que $u_i > 0, v_i > 0$ pour tout i et tels que $\sum_{i=1}^N u_i = 1$ et $\sum_{i=1}^N u_i v_i = 1$, satisfaisant

$$\sum_{i=1}^N u_i \bar{P}_1(j, i) = \lambda_0 u_j \quad \forall j \in \{1, \dots, N\} \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^N \bar{P}_1(i, j) v_j = \lambda_0 v_i \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

3-c - Justifier que $\lambda_0 < 1$. Il peut donc s'écrire $\lambda_0 = e^{-\theta'}$, pour un réel $\theta' > 0$.

On admettra que pour tout $t \geq 0$, \bar{P}_t s'écrit sous la forme

$$\bar{P}_t = e^{-\theta' t} A + \mathcal{O}(e^{-\chi t}), \quad (5.7.50)$$

où A est la matrice de coefficients $A_{i,j} = v_i u_j$, $\chi > \theta'$ et $\mathcal{O}(e^{-\chi t})$ est une matrice dont les entrées ne dépassent pas $C e^{-\chi t}$ pour une constante C donnée. Nous allons utiliser ce résultat pour obtenir le comportement avant extinction de Z .

4-a - Soit $i \in \{1, \dots, N\}$. En utilisant (5.7.50), donner un équivalent de $\mathbb{P}_i(T_0 > t)$ lorsque $t \rightarrow \infty$. (*Indication : quelles sont les valeurs que peut prendre Z_t lorsque $T_0 > t$?*)

4-b - En déduire que pour tous $i, j \in \{1, \dots, N\}$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_i(Z_t = j \mid T_0 > t) = u_j.$$

5 - Nous allons montrer dans cette question que $u = (u_1, \dots, u_N)$ est une distribution quasi-stationnaire pour Z .

5-a - Montrer que pour tous $s, t \geq 0$ et tout $j \neq 0$, on a

$$\mathbb{P}_u(Z_{t+s} = j \mid T_0 > t + s) = \sum_{i=1}^N \mathbb{P}_u(Z_t = i \mid T_0 > t) \mathbb{P}_i(Z_s = j) \frac{\mathbb{P}_u(T_0 > t)}{\mathbb{P}_u(T_0 > t + s)}. \quad (5.7.51)$$

5-b - Montrer en découpant selon les valeurs possibles de Z_t que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_u(T_0 > t + s \mid T_0 > t) = \mathbb{P}_u(T_0 > s).$$

5-c - En faisant tendre t vers l'infini dans (5.7.51), montrer que u est bien une distribution quasi-stationnaire pour Z .

5-d - En se rappelant la notation de la question 2-b), donner une expression de $\theta(u)$.



<http://www.springer.com/978-3-662-49454-7>

Modèles aléatoires en Ecologie et Evolution

Méléard, S.

2016, XII, 267 p. 15 ill., Softcover

ISBN: 978-3-662-49454-7