

## 19 Integralrechnung

Die *Integralrechnung* gehört neben der Differentialrechnung zu Grundgebieten der Mathematik (Ingenieurmathematik), da beide in zahlreichen mathematischen Modellen praktischer Probleme benötigt werden:

- Während sich die Differentialrechnung mit lokalen Eigenschaften von Funktionen beschäftigt, befasst sich die *Integralrechnung* mit *globalen Eigenschaften*.
- In der *Physik* treten Integrale u.a. bei der Bestimmung von Schwerpunkten und Trägheitsmomenten und in zahlreichen Formeln und Gleichungen auf (siehe Beisp.19.5a).
- In der *Mathematik* werden Integrale u.a. zur Berechnung von Flächen- und Rauminhalten (siehe Beisp.19.5c) benötigt.

### 19.1 Einführung

Die *Lösung* des Problems, ob eine gegebene Funktion  $f(x)$  die *Ableitung* (siehe Abschn. 18.2) einer noch zu bestimmenden Funktion  $F(x)$  ist (d.h.  $F'(x)=f(x)$ ), führt zur *Integralrechnung* für reelle Funktionen  $f(x)$  einer reellen Variablen  $x$ , wobei  $F(x)$  als *Stammfunktion* bezeichnet wird:

- Offensichtlich stellt die *Integralrechnung* die *Umkehrung* der *Differentialrechnung* dar.
- Es gibt vier Arten von Integralen, die eng miteinander zusammenhängen:

*Unbestimmte, bestimmte, uneigentliche und mehrfache Integrale*

In den folgenden Abschn.19.2-19.5 werden sie kurz vorgestellt, wobei Berechnungsmöglichkeiten mit MATHEMATICA im Vordergrund stehen.



Die *Integralrechnung* hat die beiden folgenden *Fragen*

- Besitzt jede stetige *Funktion*  $f(x)$  eine *Stammfunktion*  $F(x)$ .
- Wie lässt sich eine *Stammfunktion*  $F(x)$  für eine *gegebene Funktion*  $f(x)$  bestimmen.

zu beantworten:

- Frage I lässt sich *positiv* beantworten:  
Jede auf einem Intervall  $[a,b]$  *stetige Funktion*  $f(x)$  besitzt eine *Stammfunktion*  $F(x)$ . Dies ist jedoch nur eine *Existenzaussage*, die leider keinen Berechnungsalgorithmus liefert.
- Frage II lässt sich allgemein *nicht positiv* beantworten:
  - Es existiert *kein endlicher Algorithmus* zur exakten Berechnung von *Stammfunktionen*  $F(x)$  für beliebige stetige Funktionen  $f(x)$ . Die Integralrechnung liefert Berechnungsalgorithmen nur für spezielle Klassen von Funktionen.
  - Dies ist ein wesentlicher *Unterschied* zur *Differentialrechnung*, die einen endlichen Algorithmus zur Berechnung von Ableitungen differenzierbarer Funktionen bereitstellt, die sich aus elementaren mathematischen Funktionen zusammensetzen.



## 19.2 Unbestimmte Integrale

*Unbestimmte Integrale* bilden die Grundlage der Integralrechnung, so dass sie im folgenden Abschn.19.2.1 kurz vorgestellt und in den weiteren Abschn.19.2.2 und 19.2.3 ihre Berechnungen mit MATHEMATICA besprochen werden.

### 19.2.1 Definition

*Unbestimmte Integrale* schreiben sich in der Form

$$\int f(x) dx \quad (f(x) - \text{Integrand, } x - \text{Integrationsvariable})$$

und bezeichnen die *Gesamtheit* von *Stammfunktionen*  $F(x)$  einer Funktion  $f(x)$ , d.h. alle Funktionen  $F(x)$  mit  $F'(x)=f(x)$ :

- Die Berechnung eines unbestimmten Integrals ist äquivalent zur Berechnung einer Stammfunktion, da sich alle für eine Funktion  $f(x)$  existierenden Stammfunktionen  $F(x)$  höchstens um eine *Konstante* (Integrationskonstante)  $C$  unterscheiden, d.h. es gilt

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

- Aufgrund der Frage II aus Abschn.19.1 ist nicht zu erwarten, dass sich zu jeder stetigen Funktion  $f(x)$  eine Stammfunktion exakt berechnen lässt, d.h. damit sind auch MATHEMATICA Grenzen gesetzt.
- Die Integralrechnung kennt jedoch eine Reihe von *Methoden* zur Berechnung von *Stammfunktionen* für spezielle stetige Funktionen  $f(x)$  wie
  - *partielle Integration*
  - *Partialbruchzerlegung* (für gebrochenrationale Funktionen)
  - *Substitution*

### 19.2.2 Exakte Berechnung mit MATHEMATICA

MATHEMATICA bietet folgende zwei Möglichkeiten zur *exakten Berechnung unbestimmter Integrale* (exakte Integration) mit Integrand  $f(x)$  und Integrationsvariable  $x$ . Beide Möglichkeiten haben die gleiche Berechnungsgrundlage. Sie unterscheiden sich nur in der Darstellung:

- Anwendung der integrierten (vordefinierten) Funktion **Integrate** (*Integrationsfunktion*) in der Form

**In[1]:= Integrate[f[x], x]**

- Anwendung des *Integrationsoperators* für unbestimmte Integrale

$$\int \square d\square$$

aus dem Menü **Palettes**, der durch die Menüfolge

**Palettes⇒Basic Math Assistant⇒Advanced**

aufgerufen wird und dessen zwei Platzhalter folgendermaßen auszufüllen sind:

$$\text{In}[2] := \int f[x] \, dx$$



Bei der *exakten Berechnung unbestimmter Integrale* mittels MATHEMATICA ist Folgendes zu beachten:

- Der Integrand  $f[x]$  und die Integrationsvariable  $x$  sind direkt einzugeben. Des Weiteren kann  $f[x]$  vorher im Notebook definiert werden.
- Ein Ergebnis wird ohne Integrationskonstante berechnet.
- Wird kein exaktes Ergebnis berechnet, gibt MATHEMATICA das *Integral unverändert* zurück bzw. eine Meldung aus (siehe Beisp.19.1d). In diesem Fall kann eine *numerische Berechnung* herangezogen werden.
- In einigen Fällen lässt sich das Scheitern der exakten Berechnung von Integralen vermeiden, wenn der Integrand  $f(x)$  vor Anwendung von MATHEMATICA per Hand *vereinfacht* wird:
  - *Gebrochenrationale Funktionen* in *Partialbrüche* zerlegen (siehe Abschn.13.4.4).
  - *Gängige Substitutionen* durchführen.



### Beispiel 19.1:

Illustration der exakten Berechnung unbestimmter Integrale mittels MATHEMATICA:

a) Das folgende Integral

$$\int x \cdot \sin x \, dx = -x \cdot \cos x + \sin x$$

ist durch *partielle Integration* berechenbar und lässt sich mittels MATHEMATICA folgendermaßen berechnen:

- Anwendung der Integrationsfunktion **Integrate**:

**In[1] := Integrate[x\*Sin[x], x]**

**Out[1] = -x Cos[x] + Sin[x]**

- Anwendung des Integrationsoperators aus dem Menü **Palettes**:

**In[2] := ∫ x \* Sin[x] dx**

**Out[2] = -x Cos[x] + Sin[x]**

b) Berechnung unbestimmter Integrale, deren Integrand *gebrochenrationale Funktionen* sind. Hierfür ist die *Partialbruchzerlegung* einsetzbar, die aber nicht immer zum Erfolg führt:

- MATHEMATICA wendet auch die Partialbruchzerlegung an:
  - Das folgende Integral wird mittels **Integrate** exakt berechnet:

$$\int \frac{1}{x^4 + x^3 - 7 \cdot x^2 - x + 6} \, dx$$

**In[1]:= Integrate[1/(x^4+x^3-7\*x^2-x+6), x]**

**Out[1]=**  $-\frac{1}{8} \text{Log}[1-x] + \frac{1}{15} \text{Log}[2-x] + \frac{1}{12} \text{Log}[1+x] - \frac{1}{40} \text{Log}[3+x]$

- Das folgende Integral wird mittels **Integrate** nicht exakt berechnet:

$$\int \frac{1}{x^4 + 4 \cdot x + 1} dx$$

**In[2]:= Integrate[1/(x^4+4\*x+1), x]**

Das von MATHEMATICA angezeigte Ergebnis ist nicht verwendbar, da noch Nullstellen eines Polynoms vierten Grades zu berechnen sind.

- Die beiden obigen Integrale lassen bereits erkennen, dass MATHEMATICA mittels *Partialbruchzerlegung* nur diejenigen *exakt berechnen* kann, deren Nullstellen des Nennerpolynoms einfach zu bestimmen sind. Obwohl bis zum 4. Grad eine Lösungsformel existiert (siehe Abschn.17.3.1), wird das zweite Integral nicht berechnet, da das Nennerpolynom komplexe und nichtganzzahlige reelle Nullstellen besitzt. Das erste Integral berechnet MATHEMATICA, da das Nennerpolynom nur ganzzahlige Nullstellen -3, -1, 1 und 2 besitzt.

- c) Berechnung des unbestimmten Integrals, dessen Integrand

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

von *symbolischen Parametern* a, b und c abhängt:

**In[1]:= Integrate[a\*x^2+b\*x+c, x]**

**Out[1]=**  $c x + \frac{b x^2}{2} + \frac{a x^3}{3}$

- d) Das folgende unbestimmte Integral wird mittels **Integrate** nicht exakt berechnet:

$$\int x^x dx$$

**In[1]:= Integrate[x^x, x]**

**Out[1]=**  $\int x^x dx$

Da für diesen Integranden keine Stammfunktion existiert, die sich aus elementaren mathematischen Funktionen zusammensetzt, gibt MATHEMATICA das Integral unverändert zurück.

Es lässt sich nur eine *numerische Berechnung* anwenden, die Beisp.19.3b durchführt.



### 19.2.3 Numerische (näherungsweise) Berechnung mit MATHEMATICA

Mit integrierten (vordefinierten) *Numerikfunktionen* zur Berechnung bestimmter Integrale (siehe Abschn.19.3.3) lassen sich mit MATHEMATICA numerisch (näherungsweise) auch Funktionswerte von *Stammfunktionen* F(x) für benötigte x-Werte berechnen, wenn die aus

dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (siehe Abschn.19.3.1) folgende Formel

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

herangezogen wird:

- Das bestimmte Integral dieser Formel lässt sich für benötigte x-Werte numerisch berechnen, so dass sich eine *Liste von Funktionswerten* für die gesuchte *Stammfunktion*  $F(x)$  ergibt, d.h. eine *tabellarische Darstellung* von  $F(x)$  (siehe Beisp.19.3b).
- Die erhaltene tabellarische Darstellung von  $F(x)$  kann mittels MATHEMATICA
  - grafisch dargestellt werden,
  - durch analytisch gegebene Funktionen mittels Interpolation oder Quadratmittellapproximation angenähert werden (siehe Abschn.11.4 und 11.5).

## 19.3 Bestimmte Integrale

*Bestimmte Integrale* spielen in mathematischen Modellen für praktische Probleme eine große Rolle, so dass sie im folgenden Abschn.19.3.1 kurz vorgestellt und in den weiteren Abschn.19.3.2 und 19.3.3 ihre Berechnungen mit MATHEMATICA besprochen werden.

### 19.3.1 Definition

*Bestimmte Integrale* schreiben sich in der Form

$$\int_a^b f(x) dx$$

( $f(x)$  - Integrand,  $x$  - Integrationsvariable,  $a$  und  $b$  - untere bzw. obere Integrationsgrenze) und sind aufgrund des *Hauptsatzes* der *Differential- und Integralrechnung* durch die Formel

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (F(x) - \text{beliebige Stammfunktion von } f(x))$$

mit dem zugehörigen unbestimmten Integral

$$\int f(x) dx$$

verbunden:

- Der *Wert* (reelle Zahl)  $F(b)-F(a)$  eines *bestimmten Integrals* über dem Integrationsintervall  $[a,b]$  ist gegeben, wenn eine Stammfunktion  $F(x)$  des Integranden  $f(x)$  bekannt ist. Damit ist die Berechnung bestimmter Integrale auf die Berechnung zugehöriger unbestimmter Integrale zurückgeführt.
- Der *Hauptsatz* der *Differential- und Integralrechnung* liefert die Formel

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$$

für die spezielle *Stammfunktion*  $F(x)$  von  $f(x)$  mit  $F(a)=0$ :

- Die Formel hat nur symbolischen Charakter, da sie nicht zur exakten Berechnung von  $F(x)$  anwendbar ist.
- Die Formel kann jedoch zur numerischen Berechnung von Stammfunktionen  $F(x)$  herangezogen werden (siehe auch Abschn.19.2.3), wie im Beisp.19.3b illustriert ist.

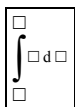
### 19.3.2 Exakte Berechnung mit MATHEMATICA

Da die *exakte Berechnung* bestimmter Integrale auf der unbestimmter beruht, gilt das dort gesagte auch für die Anwendung von MATHEMATICA.

MATHEMATICA bietet folgende zwei Möglichkeiten zur *exakten Berechnung* bestimmter Integrale mit Integrand  $f(x)$ , Integrationsvariable  $x$  und unterer bzw. oberer Integrationsgrenze  $a$  und  $b$ .

Beide Möglichkeiten haben die gleiche Berechnungsgrundlage. Sie unterscheiden sich nur in der Darstellung (siehe auch Abschn.19.2.2):

- Anwendung der integrierten (vordefinierten) Integrationsfunktion **Integrate** in der Form  
**In[1]:= Integrate[f[x], {x, a, b}]**
- Anwendung des *Integrationsoperators* für bestimmte Integrale



aus dem Menü **Palettes**, der durch die Menüfolge

**Palettes**⇒**Basic Math Assistant**⇒**Advanced**

aufgerufen wird und dessen vier Platzhalter folgendermaßen auszufüllen sind:

$$\text{In[2]:= } \int_a^b f[x] \, dx$$



Bei *exakter Berechnung* bestimmter Integrale mittels MATHEMATICA ist Folgendes zu beachten:

- Integrand  $f[x]$ , Integrationsvariable  $x$ , untere und obere Integrationsgrenze  $a$  bzw.  $b$  sind direkt einzugeben. Des Weiteren kann  $f[x]$  vorher im Notebook definiert werden.
- Wird kein exaktes Ergebnis berechnet, gibt MATHEMATICA das *Integral unverändert* zurück bzw. eine Meldung aus (siehe Beisp.19.2b). In diesem Fall kann eine *numerische Berechnung* herangezogen werden.
- In einigen Fällen lässt sich das *Scheitern* der exakten Berechnung von Integralen *vermeiden*, wenn der Integrand  $f(x)$  vor Anwendung von MATHEMATICA per Hand *vereinfacht* wird:

- Gebrochenrationale Funktionen in Partialbrüche zerlegen (siehe Abschn.13.4.4).
- Gängige Substitutionen durchführen.



### Beispiel 19.2:

Illustration der exakten Berechnung bestimmter Integrale mittels MATHEMATICA:

a) Exakte Berechnung des bestimmten Integrals

$$\int_0^{\pi} x \cdot \sin(x) \, dx = \pi$$

für das im Beisp.19.1a das zugehörige unbestimmte Integral berechnet ist:

- Anwendung der Funktion **Integrate**:

```
In[1]:= Integrate[x*Sin[x], {x, 0, Pi}]
```

```
Out[1]= π
```

- Anwendung des Integrationsoperators für bestimmte Integrale aus dem Menü **Palettes**:

```
In[2]:= ∫0π x * Sin[x] dx
```

```
Out[2]= π
```

b) Das bestimmte Integral

$$\int_1^2 x^x \, dx$$

wird von MATHEMATICA *nicht exakt berechnet* (siehe auch Beisp.19.1d):

```
In[1]:= Integrate[x^x, {x, 1, 2}]
```

```
Out[1]= ∫12 x^x dx
```

Das Integral wird unverändert ausgegeben, so dass nur eine *numerische Berechnung* möglich ist (siehe Beisp.19.3a).



### 19.3.3 Numerische (näherungsweise) Berechnung mit MATHEMATICA

Die Numerische Mathematik stellt eine Reihe von Methoden zur numerischen (näherungsweisen) Berechnung bestimmter Integrale zur Verfügung, auf die wir im Buch nicht eingehen können. Die Kenntnis dieser Methoden ist auch für die Anwendung von MATHEMATICA nicht erforderlich.

MATHEMATICA berechnet bestimmte Integrale numerisch unter Anwendung der Numerikfunktion **N** in folgender Form, wie Beisp.19.3 illustriert:

- Anwendung der integrierten (vordefinierten) Funktion **Integrate** in der Form mit **N**:

**In[1]:= NIntegrate[f[x], {x,a,b}]**     o d e r     **In[1]:= Integrate[f[x], {x,a,b}]/N**

- Anwendung des Integrationsoperators für bestimmte Integrale in der Form

$$\mathbf{In[1]:= N\left[\int_a^b f[x] \, dx \right]} \quad \text{o d e r} \quad \mathbf{In[1]:= \int_a^b f[x] \, dx //N}$$

### Beispiel 19.3:

Illustration der numerischen Berechnung bestimmter Integrale mittels MATHEMATICA:

- a) Das bestimmte Integral aus Beisp.19.2b

$$\int_1^2 x^x \, dx$$

lässt sich *nur numerisch* (näherungsweise) berechnen. Mit MATHEMATICA kann dies auf folgende Art geschehen:

**In[1]:= NIntegrate[x^x, {x,1,2}]**     o d e r     **In[1]:= Integrate[x^x, {x,1,2}]/N**

o d e r

$$\mathbf{In[1]:= N\left[\int_1^2 x^x \, dx \right]} \quad \text{o d e r} \quad \mathbf{In[1]:= \int_1^2 x^x \, dx //N}$$

**Out[1]= 2.05045**

- b) Die numerische (näherungsweise) Berechnung von *Funktionswerten* einer *Stammfunktion* F(x) mit der Eigenschaft F(1)=0 für die Funktion (Integrand)

$$f(x) = x^x$$

aus Beisp.19.1d im Intervall [1,2] mit Schrittweite 0.1 gelingt unter Verwendung der Formel

$$F(x) = \int_1^x s^s \, ds$$

mittels der MATHEMATICA-Funktionen **Table** und **NIntegrate** folgendermaßen:

**In[1]:= Table[NIntegrate[s^s, {s,1,x}], {x,1,2,0.1}]**

**Out[1]= {0., 0.105347, 0.222889, 0.355187, 0.50529,**  
           **0.676863, 0.874335, 1.10309, 1.36969, 1.68218, 2.05045}**



## 19.4 Uneigentliche Integrale

*Uneigentliche Integrale* stellen eine *Verallgemeinerung* bestimmter Integrale (siehe Abschn.19.3) für den Fall dar, dass der Integrand und/oder das Integrationsintervall unbeschränkt sein können. Da sie nicht immer einen konkreten Wert liefern, spricht man von Konvergenz bzw. Divergenz (siehe Beisp.19.4).



Auf die Theorie, die Grenzwerte einsetzt, können wir nicht näher eingehen. Wir stellen nur im Abschn.19.4.1 mögliche Formen uneigentlicher Integrale und im Abschn.19.4.2 Berechnungsmöglichkeiten mittels MATHEMATICA vor.

### 19.4.1 Einführung

Es gibt drei Formen uneigentlicher Integrale:

I. Das *Integrationsintervall* ist *unbeschränkt*, z.B.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$$

II. Der *Integrand* ist im Integrationsintervall  $[a,b]$  *unbeschränkt*, z.B.

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$$

III. Sowohl *Integrationsintervall* als auch *Integrand* sind *unbeschränkt*, z.B.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} dx$$

### 19.4.2 Berechnung mit MATHEMATICA

Die Berechnung uneigentlicher Integrale wird auf die Berechnung bestimmter (eigentlicher) Integrale unter Verwendung von Grenzwerten zurückgeführt:

- Bei allen Typen von uneigentlichen Integralen kann im Konvergenzfall die *exakte Berechnung* mit der integrierten (vordefinierten) MATHEMATICA-Funktion **Integrate** versucht werden, die als Integrationsgrenzen auch  $\pm\infty$  ( $\pm$ Unendlich, **Infinity**) zulässt (siehe Beisp.19.4).
- Die numerische Berechnung uneigentlicher Integrale gestaltet sich kompliziert, so dass hierauf verzichtet wird.

#### Beispiel 19.4:

Illustration der Berechnung uneigentlicher Integrale mittels MATHEMATICA:

a) Für das *konvergente* uneigentliche Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^5} dx = 1/4$$

- kann die Berechnung direkt mittels **Integrate** folgendermaßen geschehen:

**In[1]:** `Integrate[1/x^5, {x,1,Infinity}]`

$$\text{Out[1]} = \frac{1}{4}$$

- kann die Berechnung in der Form

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_1^s \frac{1}{x^5} dx$$

als bestimmtes Integral mit anschließender Grenzwertberechnung (siehe Abschn. 18.4) mittels **Integrate** und **Limit** folgendermaßen geschehen:

**In[2]:= Limit[Integrate[1/x^5, {x,1,s}], s->Infinity]**

$$\text{Out[2]} = \frac{1}{4}$$

- b) Für das *divergente* uneigentliche Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$$

erkennt **Integrate** die *Divergenz* und gibt eine Meldung und das Integral unverändert aus:

**In[1]:= Integrate[1/x, {x,1,Infinity}]**

*Integral of  $\frac{1}{x}$  does not converge on  $\{1, \infty\}$*

$$\text{Out[1]} = \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$$

- c) Wenn das *divergente* uneigentliche Integral

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$$

*formal integriert* wird, ohne zu erkennen, dass der Integrand bei  $x=0$  unbeschränkt ist, wird das *falsche Ergebnis* -2 erhalten.

**Integrate** erkennt die *Divergenz* und gibt eine Meldung und das Integral unverändert aus:

**In[1]:= Integrate[1/x^2, {x,-1,1}]**

*Integral of  $\frac{1}{x^2}$  does not converge on  $\{-1,1\}$*

$$\text{Out[1]} = \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$$



*Zusammenfassend lässt sich zur Berechnung uneigentlicher Integrale mittels MATHEMATICA sagen, dass sich auch eine Überprüfung empfiehlt, wenn ein Ergebnis geliefert wird. Diese kann u.a. durch eine Behandlung als bestimmtes (eigentliches) Integral mit anschließender Grenzwertberechnung erfolgen.*



## 19.5 Mehrfache Integrale

Im Folgenden wird die Berechnung mehrfacher Integrale am Beispiel

- *zweifacher Integrale* (Doppelintegrale)

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

– *dreifacher Integrale*

$$\iiint_G f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

betrachtet, wobei  $D$  und  $G$  beschränkte Gebiete in der *Ebene* bzw. im *Raum* sind:

- Die *exakte Berechnung* mehrfacher Integrale führt die Integralrechnung auf die Berechnung mehrerer einfacher Integrale zurück, so dass die MATHEMATICA-Funktion **Integrate** aus Abschn.19.3.2 durch Schachtelung anwendbar ist (siehe Beisp.19.5). Dabei erhöht eine vorher per Hand durchgeführte Koordinatentransformation häufig die Effektivität.
- Die *numerische Berechnung* mehrfacher Integrale lässt sich durch Schachtelung von Numerikfunktionen von MATHEMATICA zur Berechnung einfacher Integrale wie z.B. **NIntegrate** aus Abschn.19.3.3 durchführen, wie Beisp.19.5b illustriert.

### Beispiel 19.5:

Illustration der exakten und numerischen Berechnung mehrfacher Integrale:

- a) Berechnung des *Massenträgheitsmoments* bzgl. einer Kante des im ersten Oktanten liegenden *Würfels*  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq a$ ,  $0 \leq z \leq a$  mit Kantenlänge  $a > 0$  und Dichte  $\rho = 1$ :

Wenn die Bezugskante in der  $z$ -Achse liegt, berechnet sich das gesuchte Trägheitsmoment  $I_z$  durch das folgende *dreifache Integral*:

$$I_z = \int_{z=0}^a \int_{y=0}^a \int_{x=0}^a (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$$

*Exakte Berechnung* durch Schachtelung von **Integrate**:

- Mit symbolischen Integrationsgrenzen  $a$  lässt sich das Integral nur exakt berechnen.
- Bei Schachtelung von **Integrate** ist zu beachten, dass die richtige Berechnungsreihenfolge von innen nach außen eingehalten wird, d.h. folgende Anwendung.

**In[1]:= Integrate[Integrate[Integrate[x^2+y^2, {x, 0, a}], {y, 0, a}], {z, 0, a}]**

$$\mathbf{Out[1]} = \frac{2a^5}{3}$$

- b) Berechnung des zweifachen Integrals

$$\int_0^1 \int_0^y \sin(x+y) \, dx \, dy$$

mit einem nichtrechteckigen Integrationsbereich:

- *exakt* durch Schachtelung von **Integrate**:

**In[2]:= Integrate[Integrate[Sin[x+y], {x, 0, y}], {y, 0, 1}]**

$$\mathbf{Out[2]} = \mathbf{Sin[1]} - \frac{\mathbf{Sin[2]}}{2}$$

- *numerisch* (näherungsweise) durch Schachtelung von **NIntegrate**:

**In[3]:= NIntegrate[NIntegrate[Sin[x+y], {x, 0, y}], {y, 0, 1}]**

**Out[3]=** 0.386822

c) Das *Volumen*  $18 \cdot \pi$  einer *Halbkugel* mit Radius 3 wird durch das dreifache Integral

$$\int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} dz \, dy \, dx$$

berechnet, das durch Integration bzgl.  $z$  auf folgendes zweifache Integral

$$\int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} \, dy \, dx$$

führt. Dieses zweifache Integral kann **Integrate** mittels

**In[4]:=Integrate[Integrate[Sqrt[x^2+y^2],{y,-Sqrt[9-x^2], Sqrt[9-x^2]}],{x,-3,3}]**

*exakt berechnen:*

**Out[4]=**  $18 \pi$

◆

MATHEMATICA kompakt

Mathematische Problemlösungen für Ingenieure,  
Mathematiker und Naturwissenschaftler

Benker, H.

2016, XVI, 295 S. 20 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-662-49610-7