

2.1 Harmonische Schwingung, Dämpfung, Resonanz

I Theorie

Schwingungen spielen eine große Rolle in allen Bereichen der Physik. In Uhren sind sie fundamental, in mechanischen Maschinen sind sie oft unerwünscht, in der Akustik werden sie gezielt eingesetzt, in der Elektrodynamik bilden sie die Grundlage für Radiosender und in der Molekül- und Festkörperphysik geben sie Aufschluss über die quantenmechanischen Kopplungsmechanismen der Atome.

Harmonischer Oszillator

Der harmonische Oszillator stellt ein grundlegendes Schwingungssystem dar. Sein Kennzeichen ist, dass die Beschleunigung proportional zur Auslenkung aus der Gleichgewichtslage und stets zu dieser hin gerichtet ist. Typisch hierfür ist eine an einer elastischen Feder befestigte, reibungsfrei schwingende Masse m (Abb. 2.1).

Wird sie um die Strecke x aus dem Gleichgewicht ausgelenkt, so wirkt die rücktreibende Federkraft $F = -k x$. Diese führt zur Beschleunigung der Masse gemäß $F = m a$ in Richtung der Gleichgewichtslage bei $x = 0$ (Abschn. 1.1). Aufgrund der Trägheit schwingt die Masse darüber hinaus, wird aber durch $F = -k (-x)$ wieder zurückgetrieben. Das System aus rücktreibender Kraft (Feder) und trägem Element (Masse) versucht also, immer in die stabile Ruhelage zurückzukehren. Aus der Kräftegleichung

Abb. 2.1 Schema eines harmonischen Oszillators

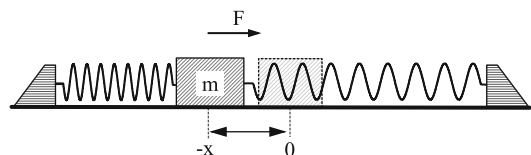
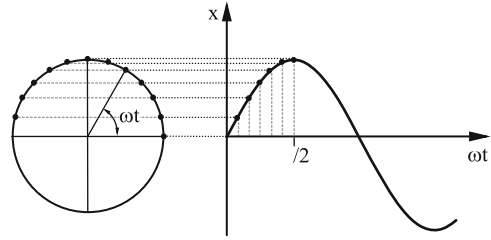


Abb. 2.2 Harmonische Schwingung als Projektion einer Kreisbewegung



$m a = -k x$ erhalten wir für die freie, ungedämpfte (reibungsfreie) Schwingung die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0 \quad (\text{Schwingungsgleichung, ungedämpft}). \quad (2.1)$$

Die Lösung dieser **Differentialgleichung** (DGL) ist keine Zahl, sondern eine Funktion $x(t)$, welche die DGL jederzeit erfüllen muss. Die Lösung lautet

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{Schwingungsfunktion}). \quad (2.2)$$

Diese Kurve ist in Abb. 2.2 dargestellt. Die Auslenkung $x(t)$ ändert sich cosinusförmig, wobei die Amplitude x_0 die maximale Verschiebung aus der Gleichgewichtslage angibt. Das Argument $(\omega t + \varphi)$ heißt Phase, und die Phasenkonstante φ ist die Phase bei $t = 0$. Die Phasenkonstante richtet sich nach der Anfangsbedingung der Schwingung. Ist z. B. zum Start der Schwingung ($t = 0$) die Masse maximal ausgelenkt, so folgt $\varphi = 0$. Durchläuft die Masse dagegen bei $t = 0$ die Gleichgewichtslage in positive x -Richtung, so ist $\varphi = -90^\circ$ und in Gl. 2.2 könnte die Cosinusfunktion durch eine Sinusfunktion mit $\varphi = 0$ ersetzt werden. Beide Funktionen sind also gleichwertig. Die Schwingungskurve erhalten wir, wenn an der schwingenden Masse ein Stift befestigt ist, und ein Blatt Papier unter ihr mit konstanter Geschwindigkeit nach unten gezogen wird. Für einen vollen Schwingungsdurchgang benötigt das System die Periodendauer T . Der Kehrwert, die Frequenz f , gibt die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde an.

$$f = \frac{1}{T}, \quad [f] = \frac{1}{s} = \text{Hz} = \text{Hertz} \quad (\text{Frequenz}). \quad (2.3)$$

Die Kreisfrequenz ω ergibt sich aus der Periodizität von 2π der Cosinusfunktion.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f, \quad [\omega] = \frac{1}{s} \quad (\text{Kreisfrequenz}). \quad (2.4)$$

Ein Schwingungsdurchgang der Periodendauer T entspricht also einem vollen Kreisumlauf von 2π . Generell kann die harmonische Schwingung als von der Seite betrachtete Projektion einer Kreisbewegung aufgefasst werden (Abb. 2.2). Der Radius entspricht der

Amplitude x_0 , der Winkel ωt variiert mit der Zeit. Die Kreisfrequenz ω erhalten wir, wenn Gl. 2.2 in die DGL 2.1 eingesetzt und nach ω aufgelöst wird:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad [\omega] = \frac{1}{s} \quad (\text{Eigenfrequenz}). \quad (2.5)$$

Jedes schwingende System hat somit eine charakteristische Eigenfrequenz, oft als ω_0 gekennzeichnet, die sich einstellt, wenn es frei schwingen kann. Je größer die Federkonstante k , desto schneller schwingt es und je größer die Masse m , desto langsamer (träger) schwingt der harmonische Oszillator. Die Geschwindigkeit und Beschleunigung der Masse folgt aus den entsprechenden Ableitungen der Auslenkung $x(t)$ (Gl. 2.2) nach der Zeit:

$$v(t) = -\omega x_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (\text{Geschwindigkeit}), \quad (2.6)$$

$$a(t) = -\omega^2 x_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{Beschleunigung}). \quad (2.7)$$

Damit gilt $a(t) = -\omega^2 x(t)$, d.h. der Betrag der Beschleunigung und damit der Kraft $F = m a$ ist immer proportional zur Auslenkung. Dies ist genau die Bedingung für eine harmonische Schwingung.

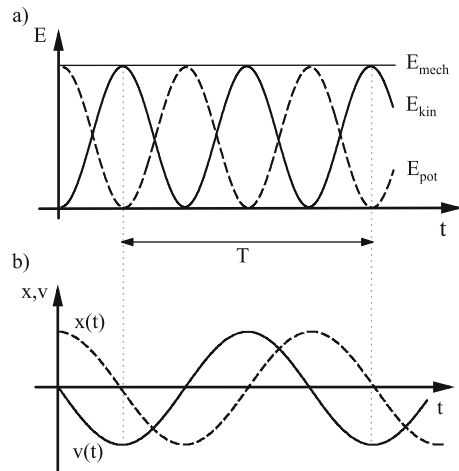
Energie

In dem ungedämpften harmonischen Oszillator wird abwechselnd die in der Feder gespeicherte potenzielle Energie verlustfrei in kinetische Energie der Masse und zurück umgewandelt (Abb. 2.3a, b).

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} k x_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi), \quad (2.8)$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m x_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi). \quad (2.9)$$

Abb. 2.3 a) Potenzielle und kinetische Energie wandeln sich periodisch um. b) Ort x und Geschwindigkeit v



Für die mechanische Gesamtenergie folgt mit $\omega^2 = k/m$ und $\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma = 1$

$$E_{\text{mech}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} k x_0^2 \quad (\text{Energieerhaltung}). \quad (2.10)$$

Dieser Ausdruck ist unabhängig von der Zeit, d. h. es gilt die Erhaltung der mechanischen Energie. Beachten Sie, dass die Energie immer positiv bleibt (Abb. 2.3a).

Gedämpfte Schwingung

Reale Schwingungssysteme sind gedämpft, d. h. durch Reibung wird dem System Energie entzogen, und die Amplitude wird mit der Zeit kleiner, bis die Schwingung zum Stillstand kommt (Abb. 2.4). Die Reibungskraft ist der Bewegungsrichtung entgegengesetzt und meist proportional zur Geschwindigkeit $v = dx/dt$ und zum Reibungskoeffizienten b :

$$F_R = -b v \quad (\text{Reibungskraft}). \quad (2.11)$$

Die Schwingungsgleichung Gl. 2.1 muss um diesen Term erweitert werden.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0 \quad (\text{Schwingungsgleichung, gedämpft}). \quad (2.12)$$

Aufgrund der Dämpfung hat die Lösung dieser DGL nun folgende geänderte Form:

$$x(t) = x_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t) \quad (\text{Schwingungsfunktion, gedämpft}). \quad (2.13)$$

Die Auslenkung variiert weiterhin cosinusförmig, mit der Eigenfrequenz.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \delta^2} \quad (\text{Eigenfrequenz, gedämpft}), \quad (2.14)$$

$$\delta = \frac{b}{2m}, \quad [\delta] = \frac{1}{s} \quad (\text{Dämpfungskonstante}). \quad (2.15)$$

Abb. 2.4 Die Amplitude einer gedämpften Schwingung klingt exponentiell ab

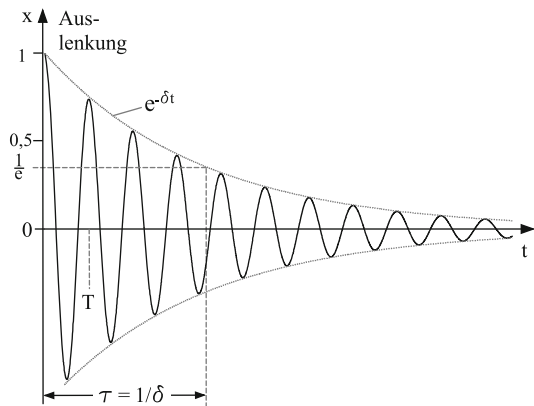
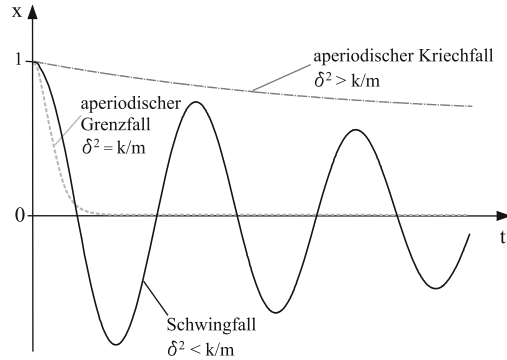


Abb. 2.5 Drei wichtige Dämpfungsfälle



Die Amplitude $x_0 e^{-\delta t}$ nimmt exponentiell mit der Zeit ab (Abb. 2.4). Ein wichtiger Wert ist die **Zeitkonstante** $\tau = 1/\delta$. Nach dieser Zeit ist die Amplitude auf den Bruchteil $1/e \approx 0,37$ gesunken (Abb. 2.4). Die Dämpfung δ führt außerdem zu einer Senkung der Eigenfrequenz (Gl. 2.14). Man unterscheidet folgende Fälle:

- (a) $\delta^2 < \frac{k}{m}$ Schwingfall,
- (b) $\delta^2 > \frac{k}{m}$ aperiodischer Kriechfall,
- (c) $\delta^2 = \frac{k}{m}$ aperiodischer Grenzfall.

Ist δ zu groß, und wird der Radikant der Wurzel in Gl. 2.14 negativ, so kommt es erst gar nicht zu einer Schwingung und die Lösung der DGL 2.12 ist eine Funktion, die nach der Auslenkung des Systems sehr langsam in die Gleichgewichtslage zurück führt, ohne darüber hinaus zu schwingen (aperiodisch), sofern sie nicht mit einer Anfangsgeschwindigkeit startet (Abb. 2.5).

Für den aperiodischen Grenzfall (c) folgt $\omega = 0$ und nach der Auslenkung kehrt das System exponentiell in die Gleichgewichtslage zurück, ohne über diese hinaus zu schwingen (Abb. 2.5). Die Zeit der Rückkehr ist sehr kurz. Dieser Fall wird z. B. bei der Konstruktion von Stoßdämpfern ausgenutzt, denn das Auto soll nicht schwingen, sondern schnell in die Gleichgewichtslage zurückkehren.

Erzwungene Schwingung

Sollen die Dämpfungsverluste in einem harmonischen Oszillator kompensiert werden, so muss von außen eine periodisch veränderliche Kraft $F_a \cos \omega_a t$ angreifen. Die DGL der erzwungenen Schwingung lautet nun

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_a}{m} \cos \omega_a t \quad (\text{DGL, erzwungene Schwingung}). \quad (2.16)$$

Nach einer gewissen Einschwingzeit, die hier nicht diskutiert wird, bewegt sich der harmonische Oszillator mit der von der äußeren Kraft vorgegebenen Frequenz ω_a und nicht mit seiner Eigenfrequenz ω (Gl. 2.14):

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_a t - \varphi) \quad (\text{Funktion der erzwungenen Schwingung}). \quad (2.17)$$

Die Auslenkung $x(t)$ ist gegen die äußere Kraft um φ phasenverschoben, d. h. $x(t)$ hinkt der äußeren Kraft um φ nach. Die Amplitude x_0 hängt von der Amplitude F_a der anregenden Kraft ab, von der Dämpfung δ und, viel empfindlicher, von der relativen Lage der Anregungsfrequenz ω_a zur Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

$$x_0 = \frac{F_a/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_a^2)^2 + (2\delta \omega_a)^2}} \quad (\text{Amplitude, erzwungene Schwingung}). \quad (2.18)$$

Fallen äußere Frequenz ω_a und Eigenfrequenz ω_0 zusammen, so wird der Nenner in Gl. 2.18 minimal und die Amplitude maximal (Abb. 2.6a). Für ein ungedämpftes System mit $\delta = 0$ wird der Nenner sogar Null und wir erhalten die so genannte **Resonanzkatastrophe** mit $x_0 = \infty$, d. h. das System wird zerstört. Die Phasenverschiebung φ hängt ebenfalls von δ und von der relativen Lage der Anregungsfrequenz ω_a zur Eigenfrequenz ω_0 ab (Abb. 2.6b).

$$\tan \varphi = \frac{2\delta \omega_a}{\omega_0^2 - \omega_a^2} \quad (\text{Phasenverschiebung}). \quad (2.19)$$

Zum Verständnis der Vorgänge, betrachten wir 3 Frequenzbereiche:

- (a) $\omega_a \ll \omega_0$ Dies ist der linke Frequenzbereich in Abb. 2.6a, b. Näherungsweise folgt damit aus Gln. 2.18, 2.17 $x(t) = F_0 \cos(\omega_a t)/k$. Die schwingende Masse kann der langsamen Bewegung der äußeren Kraft immer folgen. Beide sind also in Phase und $\varphi = 0$. Die Amplitude ist F_0/k .
- (b) $\omega_a \gg \omega_0$ Dies ist der rechte Frequenzbereich. Hier dominiert die träge Masse das System, es gilt näherungsweise $x(t) = -F_0 \cos(\omega_a t)/m\omega_a^2$. Die Phasenverschiebung beträgt $\varphi = -\pi$, d. h. Auslenkung und Anregungskraft sind gegenphasig, denn die träge Masse kann der schnellen Anregung nicht mehr folgen.
- (c) $\omega_a \approx \omega_0$ Resonanzfall. Hier sind Auslenkung und Kraft um $\varphi = -\pi/2$ phasenverschoben. Damit sind aber die Geschwindigkeit $v(t) = dx/dt$ der schwingenden Masse und die äußere Kraft in Phase, so dass netto Leistung durch die äußere Anregung auf das System übertragen wird: $P = F_a v = F_0 \omega x_0 \cos^2 \omega_0 t$. Würde diese Leistung nicht durch die Reibung verbraucht, so müsste die Amplitude auf $x_0 \rightarrow \infty$ anwachsen (Resonanzkatastrophe). In den Fällen (a) und (b) wird vom System netto keine Leistung aufgenommen, denn im Mittel wird genau so viel wieder abgegeben, wie aufgenommen wurde (siehe Prüfungsteil). Den genauen Wert der Resonanzfrequenz $\omega_{\text{Res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$ erhält man aus der Ableitung der Resonanzkurve (Gl. 2.18). Er liegt etwas unterhalb der Eigenfrequenz.

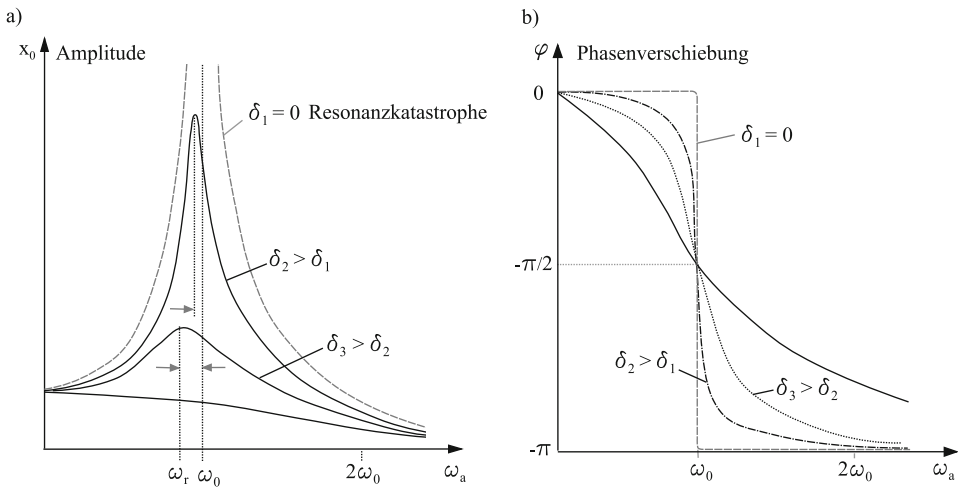


Abb. 2.6 Erzwungene Schwingung für verschiedene Dämpfungen: a) Die Amplitude ist maximal im Resonanzfall, b) Phasenverschiebung zwischen Oszillator und anregender Kraft

II Prüfungsfragen

Grundverständnis

F2.1.1 Was ist eine Schwingung? Nennen Sie einige schwingende Systeme.

F2.1.2 Skizzieren Sie für eine harmonische Schwingung die Funktionen $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$. Geben Sie die Formeln an und kennzeichnen Sie Frequenz, Periodendauer und Phasenverschiebung.

F2.1.3 Wie hängt die Frequenz einer harmonischen Schwingung von der Amplitude ab?

F2.1.4 Was zeichnet die harmonische Schwingung aus?

F2.1.5 Skizzieren Sie eine freie, gedämpfte Schwingung, geben Sie die Schwingungsfunktion $x(t)$ an und diskutieren Sie die relevanten Größen.

F2.1.6 Wie lautet die Eigenfrequenz des ungedämpften (gedämpften) Federpendels?

F2.1.7 Diskutieren Sie die Grenzfälle der Dämpfung und ihre technische Bedeutung.

F2.1.8 Nennen Sie die Eigenfrequenz des mathematischen Pendels.

F2.1.9 Welche Frequenz hat die erzwungene Schwingung?

F2.1.10 Was ist Resonanz? Skizzieren Sie die Amplitude und die Phasenverschiebung als Funktion der Erregerfrequenz für eine erzwungene Schwingung im Resonanzbereich. Wo liegt die Resonanzfrequenz und wie erhält man sie?

F2.1.11 Nennen Sie Fälle, wo Resonanz erwünscht bzw. unerwünscht ist.

Messtechnik

F2.1.12 Wie kann die Erdbeschleunigung gemessen werden?

F2.1.13 Nennen Sie Geräte zur Frequenzmessung.

F2.1.14 Wie kann man die Dämpfung einer Schwingung messen?

Vertiefungsfragen

F2.1.15 Leiten Sie die Differentialgleichung der gedämpften, erzwungenen Schwingung ab.

F2.1.16 Wie hängt die Energie einer gedämpften freien Schwingung von der Zeit ab?

F2.1.17 Was ist der Gütefaktor und was ist das logarithmische Dekrement?

F2.1.18 Was ist ein physikalisches Pendel?

F2.1.19 Beschreiben Sie die Drehschwingung.

F2.1.20 Was ist harmonisch am harmonischen Oszillator?

III Antworten

A2.1.1 Eine Schwingung ist ein zeitlich periodischer Vorgang, der nach der Periodendauer T wieder die gleiche Schwingungsphase erreicht hat. Typische Schwingungssysteme sind in Abb. 2.7 gezeigt.

A2.1.2 Siehe Gln. 2.2, 2.6, 2.7 und Abb. 2.8. Die Periodendauer kann direkt abgelesen werden, woraus die Frequenz $f = 1/T$ ermittelt wird. Die Geschwindigkeit eilt dem Ort $x(t)$ um die Phasenverschiebung $\pi/2$ voraus, ebenso eilt die Beschleunigung der Geschwindigkeit um $\pi/2$ voraus. Dies erkennt man auch aus dem Vergleich zwischen $x(t)$ und $v(t)$, denn aus $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$ folgt $v(t) = -x_0 \omega \sin(\omega t) = x_0 \omega \cos(\omega t + \pi/2)$.

Abb. 2.7 Diverse Ausführungen des Pendels (zu Antworten A2.1.1, A2.1.18, A2.1.19)

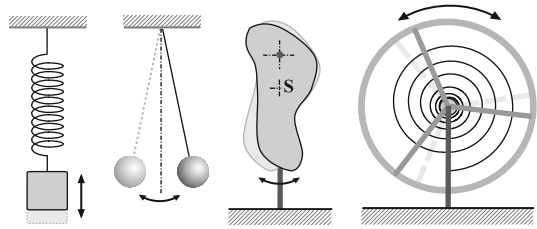
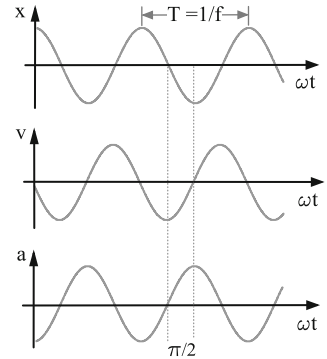


Abb. 2.8 Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung einer harmonischen Schwingung



A2.1.3 Die Frequenz einer harmonischen Schwingung hängt nicht von der Amplitude ab, denn nach Gl. 2.5, 2.14 geht sie nicht in die Frequenz ein. Der Ton (Frequenz) einer Klaviersaite hängt also nicht davon ab, ob die Saite stark oder sanft angeschlagen wird.

A2.1.4 Kennzeichen des harmonischen Oszillators ist eine Rückstellkraft, die proportional zur Auslenkung ist (Gl. 2.7). Die harmonische Schwingung lässt sich einfach durch eine Sinus- bzw. Cosinusfunktion darstellen (Gl. 2.2). Dies entspricht der Projektion einer Kreisbewegung (Abb. 2.2).

A2.1.5 Die freie, gedämpfte Schwingung $x(t) = x_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t)$ ist in Abb. 2.4 dargestellt. Die Amplitude $x_0 e^{-\delta t}$ nimmt exponentiell mit der Zeit ab und ist nach der Zeitkonstanten $t = \tau = 1/\delta$ auf den Anteil $1/e$ des Startwertes abgeklungen.

A2.1.6 Kann der harmonische Oszillator frei schwingen, so tut er das mit seiner Eigenfrequenz. Im Fall eines Feder-Masse-Systems ist das $\omega = \sqrt{k/m}$ bzw. $\omega = \sqrt{k/m - \delta^2}$, falls er gedämpft ist. Im Wesentlichen wird ω durch das Verhältnis der rücktreibenden Kraft zur trägen Masse des Oszillators bestimmt. Die Dämpfung (δ) reduziert die Eigenfrequenz.

A2.1.7 Im Normalfall liegt geringe Dämpfung $\delta^2 < k/m$ vor und das System kommt erst nach vielen Schwingungen zur Ruhe (Abb. 2.5). Für sehr starke Dämpfung $\delta^2 > k/m$

(aperiodischer Kriechfall) benötigt das ausgelenkte System sehr lange, um in die Ruhelage zurückzukehren, was meist unerwünscht ist. Für gezielte Schwingungsdämpfung (Stoßdämpfer) oder Zeigerinstrumente ist eine schnelle Rückkehr in die Gleichgewichtslage ohne Schwingung ($\delta^2 = k/m$, aperiodischer Grenzfall) erwünscht.

A2.1.8 Das ideale, **mathematische Pendel** besteht aus einem Massepunkt (Kugel), der an einem idealen masselosen Seil aufgehängt wird (Abb. 2.7). Für nicht zu große Amplitude lautet seine Eigenfrequenz $\omega = \sqrt{g/L}$, bzw. $\omega = \sqrt{g/L - \delta^2}$ für das z. B. durch Luftreibung gedämpfte Pendel. Durch die Seillänge L kann die Frequenz eingestellt werden, was z. B. bei der Pendeluhr ausgenutzt wird. Zudem eignet sich das Pendel zur Bestimmung der Gravitationsbeschleunigung g .

A2.1.9 Anders als bei der freien Schwingung bewegt das System sich nicht mit seiner Eigenfrequenz, sondern mit der Frequenz ω_a der von außen angreifenden Kraft $F_a \cos \omega_a t$, nachdem eine gewisse Einschwingzeit vergangen ist.

A2.1.10 Resonanz tritt bei erzwungenen Schwingungen auf, wenn die Erregerfrequenz ω_a etwa so groß wie die Eigenfrequenz ω_0 des Oszillators wird. Als Folge steigt die Amplitude $x_0(\omega_a)$ der Schwingung (Gl. 2.18) stark an (Abb. 2.6a). Die Resonanzkatastrophe tritt für ungedämpfte Systeme ($\delta = 0$) auf. Mit steigender Dämpfung sinkt die Amplitude und die Resonanzfrequenz verschiebt sich leicht zu kleineren Werten. Für die exakte Bestimmung der Resonanzfrequenz muss die Kurve $x_0(\omega_a)$ nach ω_a abgeleitet und Null gesetzt werden. Beachten Sie, dass $x_0(\omega_a) > 0$, auch für kleine Erregerfrequenzen. Der Oszillator folgt für $\omega_a \ll \omega_0$ immer der langsamen Bewegung des Erregers. Für sehr großes ω_a kann der Oszillator dem schnellen Erreger nicht mehr folgen, d. h. im Grenzfall $\omega_a \gg \omega_0$ geht die Amplitude gegen Null. Dies zeigt sich auch in der Phasenverschiebung zwischen Oszillator und der äußeren anregenden Kraft (Abb. 2.6b). Bei der Resonanzfrequenz läuft die Kurve durch $\varphi = -\pi/2$, unabhängig von der Dämpfung. Nur hier nimmt der Oszillator netto Energie von dem Erreger auf, was zum Anstieg der Amplitude führt. In den anderen Fällen ($\omega_a < \omega_0$, $\omega_a > \omega_0$) fließt im zeitlichen Mittel gleich viel Energie in das System wie wieder zurück in den Erreger (siehe auch Theorie zur erzwungenen Schwingung).

A2.1.11 Resonanz ist erwünscht, wenn dadurch Schwingungen verstärkt werden sollen, ebenso wenn es darum geht stehende Wellen (Abschn. 2.2) zu erzeugen. In der Musik wird die Resonanz des Gitarrenkörpers genutzt, in der Optik die des Laserresonators (Abschn. 7.4) und beim Radio die Resonanz des Schwingkreises (Abschn. 4.7). Unerwünscht ist Resonanz z. B. bei Motoren, d. h. die ganze Maschine darf nicht bei einer bestimmten Motordrehzahl (Eigenfrequenz) zu Schwingungen angeregt werden (Waschmaschinen im Schleudergang). Ebenso dürfen Bauwerke (Brücken) nicht durch Wind zu Eigenschwingungen angeregt werden.

Prüfungstrainer Experimentalphysik
Physik verstehen und lernen für die mündliche Prüfung
im Bachelor (Haupt- und Nebenfach)
Mertins, H.-C.; Gilbert, M.
2016, XIII, 446 S. 269 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-662-49689-3