

Kapitel 2

Zinsrechnung

Für ausgeliehenes Kapital muss in der Regel ein Entgelt für dessen Nutzung, der so genannte Zins, bezahlt werden. Je nach Nutzungsdauer des Kapitals und Entgeltvereinbarung gibt es verschiedene Verzinsungsmodelle: einfache, exponentielle und stetige Verzinsung sowie vorschüssige, nachschüssige und unterjährige Zinsen.

Um die notwendigen Berechnungen durchführen zu können, benötigt man einige Begriffe:

- | | |
|--|----------------------|
| • Der anzulegende Geldbetrag (das Vermögen) heißt Kapital (aus dem Italienischem von capitale = Hauptgut). | Kapital |
| • Als Zins z bezeichnet man den Preis für überlassenes oder geschuldetes Kapital. | Zins |
| • Die Zeitpunkte, zu denen jeweils der Zins fällig ist, heißen Zinstermine. | Zinstermin |
| • Den Zeitraum zwischen zwei Zinsterminen nennt man Zinsperiode. | Zinsperiode |
| • Der Zins für 100 Geldeinheiten heißt Zinsfuß p und $i = p/100$ heißt Zinsrate. | Zinsfuß,
Zinsrate |
| • Der Begriff Zinssatz wird in der Literatur und Praxis uneinheitlich synonym für Zinsfuß und Zinsrate benutzt. Wir werden ihn ausschließlich als Synonym für Zinsrate benutzen. | Zinssatz |
| • Der Zeitabschnitt für die Kapitalbewegung, d.h. die Länge des Anlagezeitraums, heißt Laufzeit n . | Laufzeit |
| • Zinsfuß bzw. Zinssatz werden in der Regel auf eine Laufzeit von einem Jahr bezogen. Man schreibt dafür z.B. 5% p.a. (lat.: per annum; pro Jahr). Der Zusatz p.a. wird jedoch häufig weggelassen. | p.a. |

Barwert K_0 Endwert K_n

- Das Kapital zu Beginn der Kapitalbewegung heißt Anfangskapital oder Barwert K_0 .
- Das Kapital am Ende der Kapitalbewegung nennt man Endkapital oder Endwert bzw. K_n .

**Beispiel 2.1**

Sie kaufen bei ihrer Bank für 1.000 € ein Wertpapier (wie z.B. Bundesschatzbrief Typ A, Sparbrief, Pfandbrief, Unternehmensanleihe, etc.), das mit 5% p.a. verzinst und nach zwei Jahren zurückgezahlt wird. Ihr Anfangskapital ist somit $K_0 = 1.000$ €. Der Zinssatz (synonym: die Zinsrate) $i = 0,05$ bezieht sich — wie meist üblich — auf eine Zinsperiode von einem Jahr. Somit ergibt sich der (jährliche) Zinsfuß zu $p = 5$. Die Laufzeit des Sparbriefs beträgt $n = 2$ Jahre. Es gibt zwei Zinsperioden: $t = 1$ (1.Jahr) und $t = 2$ (2.Jahr). Nach einem Jahr erhält man 50 € Zinsen und nach zwei Jahren nochmals dieselbe Summe. Zu diesem Zeitpunkt wird auch das angelegte Kapital zurückgezahlt, so dass sich ein Endkapital von $K_n = K_2 = 1.100$ € ergibt. $\square$

Zusätze für
Zinsperioden

Wie oben angemerkt, ist es üblich, den Zinssatz für eine Zinsperiode (Basisperiode) von einem Jahr anzugeben (Zusatz: p.a., dieser wird oft weggelassen). Es gibt aber auch kürzere Zinsperioden: halbjährliche (Zusatz: p.H., häufig bei Fremdwährungsanleihen), quartalsweise (Zusatz: p.Q., z.B. Verzinsung auf Girokonten) oder monatliche (Zusatz: p.M., beispielsweise bei Hypothekenkrediten).

2.1 Lineare Verzinsung

Bei der linearen bzw. einfachen Verzinsung betrachtet man Kapitalüberlassungszeiträume, in denen kein Zinstermin liegt. Es fällt also kein Zins an, der wieder angelegt werden könnte. Diese Verzinsungsart findet man z.B. bei Spareinlagen und Stückzinsberechnungen im Wertpapierhandel.

Bei der *linearen Verzinsung* oder *einfachen Zinsrechnung* werden Zinsen folgendermaßen berechnet:

lineare
Verzinsung

- innerhalb einer Zinsperiode (oftmals 1 Jahr) mit Zinstermin am Periodenende,
- ohne Verzinsung des Zinses über einen Zeitabschnitt, der größer als eine Zinsperiode ist.

Beispiel 2.2

Sie legen bei Ihrer Bank oder Sparkasse $K_0 = 10.000 \text{ €}$ (sog. Anfangskapital) in einem Pfandbrief für 5 Jahre mit einem Zinssatz von 3% ($i = 0,03$) an.



Der Zins errechnet sich jährlich zu (da nichts anderes angegeben, ist der Zinssatz p.a.!)

$$10.000 \text{ €} \cdot 0,03 = 300 \text{ €}.$$

Nach einem Jahr beträgt das Kapital daher $K_1 = 10.300 \text{ €}$. Da der angefallene Zins seinerseits nicht verzinst wird, kommen für die restlichen 4 Jahre nochmals $4 \cdot 300 \text{ €} = 1.200 \text{ €}$ hinzu. Damit beläuft sich nach 5 Jahren das angesammelte Kapital (sog. Endkapital) auf $K_5 = 11.500 \text{ €}$. $\square$

Da der Zins z , wie Beispiel 2.2 zeigt, für jedes Jahr jeweils gleich hoch ist und sich zu $z = K_0 \cdot i$ ergibt, gilt offensichtlich:

Bei der linearen bzw. einfachen Verzinsung ergibt sich aus einem Anfangskapital (Barwert) K_0 bei einem Zinssatz von i in n Jahren (Laufzeit) ein Endkapital (Endwert) von

$$K_n = K_0 \cdot (1 + n \cdot i).$$

lineare
Verzinsung

Übung 2.1

Sie benötigen für einen geplanten Autokauf, der in 3 Jahren ansteht, 17.250 € . Die Bank bietet Ihnen eine Anlage mit 5% einfachen Zinsen an. Wieviel Euro müssen Sie heute anlegen (Barwert), um sich das Auto in 3 Jahren kaufen zu können?

**Lösung 2.1**

Wir lösen die Formel für die lineare Verzinsung nach dem Barwert K_0 auf und erhalten mit $n = 3$:



$$K_0 = \frac{K_n}{(1 + ni)} = \frac{17.250 \text{ €}}{(1 + 3 \cdot 0,05)} = 15.000 \text{ €}.$$

Es sind also heute 15.000 € anzulegen. $\square$

Bei der Geldanlage aus Übung 2.1 hat man am Ende des ersten, zweiten und dritten Jahres jeweils ein Endkapital von $K_1 = 15.750 \text{ €}$, $K_2 = 16.500 \text{ €}$ und $K_3 = 17.250 \text{ €}$, da pro Jahr ein Zins von 750 € hinzukommt. Nachfolgende Abb. 2.1 zeigt, dass die Kapitalzuwächse alle auf einer Geraden liegen ($K_t = (K_0 \cdot i) \cdot t + K_0$), was die Namensgebung „lineare Verzinsung“ erklärt.

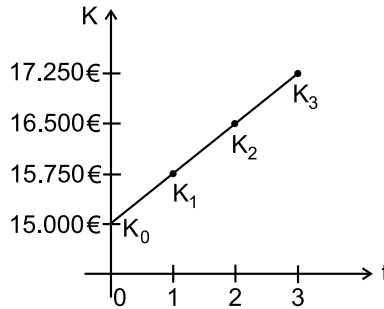


Abb. 2.1. Lineare Verzinsung

In der Praxis findet man eher selten Anwendungen der linearen Verzinsungsformel für Laufzeiten $t > 1$. Benutzt wird die Formel häufig zur Berechnung von Soll- und Habenzinsen auf Girokonten oder von Stückzinsen bei Wertpapieren. Hier ist die Laufzeit t dann der *Bruchteil eines Jahres*, der so genannte *Zinstagequotient*, d.h.

Zinstage-
quotient

$$t = \frac{\text{Zinstage}}{\text{Basistage}}.$$

Zinstage,
Basistage

Unter *Zinstagen* versteht man dabei die Anzahl der Tage zwischen zwei vorgegebenen Daten, und die *Basistage* beziehen sich auf die Länge des zugrunde liegenden Jahreszeitraumes. Dieser kann durchaus vom Kalenderjahr abweichen! Es gibt hier verschiedene Berechnungsmethoden (so genannte *Zinsusancen*) für die Anzahl der Zinstage und der Basistage.

Zinsusance

Die — seit der Umstellung auf Euro — wichtigsten Zinsusancen sind:

„actual/actual“

- „actual/actual“ (taggenaue Zinsmethode):
Es wird die tatsächliche Anzahl der Tage zwischen zwei Daten gezählt (actual = taggenau). Auch das zugrunde liegende Basisjahr wird mit kalendergenauen Werten berücksichtigt (d.h. in der Regel 365 Tage, bei Schalttag im Basiszeitraum jedoch 366 Tage). Üblich ist diese Methode z.B. bei der Stückzinsberechnung für fast alle Bundeswertpapiere und Pfandbriefe.

„actual/360“

- „actual/360“ (internationale Zinsusance):
Es wird die tatsächliche Anzahl der Tage zwischen zwei Daten zugrunde gelegt. Das Jahr wird zu 360 Tagen angenommen. Eingesetzt wird diese Methode z.B. häufig

bei der Stückzinsberechnung von Fremdwährungsanleihen (z.B. USD-Bonds).

- „30,42/365“ (EU-Zinsmethode):
Zugrunde gelegt werden hier für das Jahr 365 Tage, 52 Wochen oder 12 gleichlange Monate. Für letztere wird eine Länge von $365/12 = 30,41\bar{6}$ Tagen angenommen. Für die Anzahl der Tage zwischen zwei Daten gelten Sonderregeln, wenn sich die Differenz nicht auf Vielfache von vollen Monaten zurückführen lässt.

„EU-30,42/365“,
Standardisierte
Zinsusance

Die „EU-30,42/365“-Zinsusance, auch „Standardisierte Berechnungsmethode“ genannt, ist gesetzlich für alle Effektivzinsberechnungen im Zusammenhang mit Krediten vorgeschrieben. Sie gilt in Deutschland seit dem 1.9.2000 nach Preisangabenverordnung (PAngV). Letztere ist eine Umsetzung der EU-Verbraucherkreditrichtlinie 98/7/EG, die zum 1.4.2000 in Kraft getreten ist.

PAngV

Man beachte bei Anwendung einer Zinsusance, dass in der Regel der Zinslauf mit dem Tag der Einzahlung auf das Bankkonto bzw. mit Kauf des Wertpapiers (Tag der Wert- oder Valutastellung, nicht Buchungstag) beginnt. Er endet mit dem Tag *vor* der Zinszahlung.

Ermittlung der
Zinstage
Valuta

Beispiel 2.3

Sie kaufen am 7.1.2012 (Valuta) einen Bundesschatzbrief mit Zinslauf ab 1.1.2012, der sich im 1. Jahr mit 3% verzinst. Die Stückzinsen, die Sie bei einem Nennwert (=Anfangskapital) von 2.000 € der Bank zahlen müssen, ergeben sich dann durch Anwendung der Zählmethode „actual/actual“:



Da 2012 Schaltjahr ist, ergibt sich das Basisjahr (1.1.2012 bis 31.12.2012, beide Tage einschließlich) zu 366 Tagen. Die für die Stückzinsen maßgebenden Zinstage belaufen sich auf 6 (1.1.2012 bis 6.1.2012, beide Tage inklusive), da ab dem Tag der Valutastellung (hier der 7.1.2012) die Zinsen dem Käufer zustehen. Wir erhalten daher einen zu zahlenden Stückzins in Höhe von (es wird kaufmännisch gerundet):

$$K_0 \cdot i \cdot t = 2.000 \text{ €} \cdot 0,03 \cdot \frac{6}{366} = 0,98 \text{ €}. \quad \square$$

Übung 2.2

Beim Kauf von Wertpapieren helfen Ihnen die nachfolgenden Aufgaben bei der Überprüfung Ihrer diesbezüglichen Bankabrechnungen.



- a) Sie kaufen am 15.5.2012 (Valuta) einen Bundesschatzbrief mit Zinslauf ab 1.4.2012 mit 3,5% Zins für das erste Jahr. Wieviele Stückzinsen sind bei einem Nennwert von 15.000 € zu zahlen?
- b) Sie erwerben am 28.3.2012 (Valuta) eine 5% USD-Fremdwährungsanleihe mit Zinslauf ab 12.1.2012. Wieviele Stückzinsen müssen Sie bei einem Nennwert von 14.000 USD zahlen (Methode „actual/360“)?

Lösung 2.2



- a) Wie im Beispiel 2.3 ist die Zinsusance „actual/actual“ anzuwenden. Das Basisjahr weicht nun jedoch vom Kalenderjahr ab: 1.4.2012 bis 31.3.2013 (beide Tage einschließlich). Da dieses keinen Schalttag beinhaltet, ergibt es sich zu 365 Tagen. Stückzinsen sind zu zahlen vom 1.4.2012 bis 14.5.2012 (beide Tage einschließlich). Insgesamt ergeben sich 44 Tage (30 Tage für den April, 14 Tage für den Mai). Damit belaufen sich die Stückzinsen auf

$$K_0 \cdot i \cdot t = 15.000 \text{ €} \cdot 0,035 \cdot \frac{44}{365} = 63,29 \text{ €}.$$

- b) Bei der „actual/360“-Methode liegt der Nenner fix bei 360 Tagen und muss nicht ermittelt werden. Die Zinstage vom 12.1.2012 bis 27.3.2012 (jeweils einschließlich) hingegen sind exakt zu zählen: 20 Tage für den Januar, 29 Tage für den Februar und 27 Tage für den März ergeben insgesamt 76 Tage. Es sind daher an Stückzinsen zu zahlen:

$$K_0 \cdot i \cdot t = 14.000 \text{ USD} \cdot 0,05 \cdot \frac{76}{360} = 147,78 \text{ USD}. \quad \square$$

„30/360“-
Methode

Bei der Verzinsung von Sparbüchern und Girokonten wird meist eine weitere Zählmethode, die „30/360“-Methode benutzt: Hier wird der Monat zu 30 Tagen und das Jahr zu 360 Tagen angenommen. Dann ergibt sich der für d Tage zu bezahlende Zins z auf ein Kapital K , das mit dem Zinsfuß p verzinst wird zu:

$$z = K_0 \cdot i \cdot t = K \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{d}{360}.$$

Durch Umstellung dieser Formel erhält man nachfolgende Formel, die als *Kaufmännische Zinsformel* bezeichnet wird:

Der für d Tage zu bezahlende Zins z auf ein Kapital K , das mit dem Zinsfuß p verzinst wird, ergibt sich zu

$$z = \left(\frac{K \cdot d}{100} \right) / \left(\frac{360}{p} \right).$$

Dabei bezeichnet man $\frac{K \cdot d}{100}$ als Zinszahl und $\frac{360}{p}$ als Zinsteiler.

kaufmännische
Zinsformel

Zinszahl,
Zinsteiler

Die Anwendung dieser Formel ist nun sehr zweckmäßig, wenn mehrere verschiedene Kapitalbeträge unterschiedlich lang mit dem gleichen Zinssatz zu verzinsen sind, was vor allem bei Girokonten häufig der Fall ist. Banken und Sparkassen wenden hierzu die so genannte *Staffelmethode* an: Die Berechnung der Zinszahlen erfolgt bei jeder Änderung des Kontostandes, d.h. bei Einzahlungen sowie Auszahlungen. Die Wertstellung (Valuta) wird bei Einzahlungen mit „Nächster Tag“ und bei Auszahlungen mit „Heute“ vorgenommen. Die dabei errechneten Zinszahlen werden ganzzahlig kaufmännisch gerundet. Zum Zinstermin werden die Zinsen dann berechnet, indem die entstandene Summe der Zinszahlen durch den Zinsteiler dividiert wird.

Verzinsung bei
Girokonten

Staffelmethode

Valuta

Beispiel 2.4

Wir betrachten Kapitalbewegungen eines Girokontos mit einem Habenzinssatz von 2%. Wie häufig üblich, soll der Zins quartalsweise gezahlt werden. Wir nehmen an, dass am Ende des ersten Quartals bereits 1.000 € auf dem Konto stehen und berechnen den Zins für das zweite Quartal aufgrund nachfolgender Kontobewegungen:



Tag	Valuta	Ein/Aus	Tage	Zinszahl
31.3.2012	31.3.2012	1.000 €	35	350
5.5.2012	6.5.2012	500 €		
Saldo		1.500 €	28	420
4.6.2012	4.6.2012	-1.100 €		
Saldo		400 €	27	108
Summe				878

Bei dem vorgegebenen Zinsfuß von $p = 2$ (Zinsteiler: $360/2$) ergeben sich nun die Quartalszinsen (in €) zu

$$z = \frac{878}{180} = 4,88.$$

Man beachte, dass bei einem negativen Kontostand von den Habenzinsen abweichende Sollzinsen zu zahlen sind. Es müssen dann getrennt Soll- und Habenzinszahlen berechnet und am Ende saldiert werden. □



Übung 2.3

Sie wollen die Quartalsabrechnung Ihres Girokontos überprüfen. Die Bank weist bei einem Habenzinssatz von 3% p.a. eine Zinszahl von 1350 aus. Welchen Zinsbetrag muss Ihnen die Bank gutschreiben?



Lösung 2.3

Bei einem Zinsfuß von $p = 3$ erhält man den Zinsteiler $\frac{360}{3} = 120$. Somit ergibt sich der Zins aus $\frac{1350}{120}$ zu 11,25 €. $\square$

2.2 Exponentielle Verzinsung

Jeder Bankkunde weiß, dass bei Bundesschatzbriefen vom Typ B die jährlich anfallenden Zinsen nicht ausbezahlt, sondern dem vorhandenen Kapital hinzugefügt werden. Bei der nächstfolgenden Verzinsung werden diese dann mit verzinst. Diese Zinsen nennt man deshalb Zinseszinsen. Das Prinzip bezeichnet man als exponentielle Verzinsung.

Zinseszinsen,
exponentielle
Verzinsung

Wir wollen das Prinzip der *Zinseszinsen* oder der *exponentiellen Verzinsung* genauer betrachten: Wenn innerhalb des Betrachtungszeitraumes ein oder mehrere Zinstermine existieren, so wird der zu diesen Zinstermen fällige Zins dem Kapital zugeschlagen und in den verbleibenden Zinsperioden mitverzinst. Der Zins soll dabei in allen Zinsperioden — im Gegensatz zum Bundesschatzbrief — konstant bleiben.

Wir bezeichnen das Startkapital mit K_0 und mit K_t das Endkapital im t -ten Jahr sowie mit i den Zinssatz. Unter Anwendung der linearen Verzinsung ergibt sich das Endkapital K_1 zu $K_1 = K_0(1 + i)$. Da im zweiten Jahr nun das Kapital K_1 zu verzinsen ist, kann auf dieses wieder die lineare Verzinsung angewandt werden. Im t -ten Jahr ist dann K_{t-1} linear zu verzinsen. Es gilt also:

$$\begin{aligned} K_2 &= K_1(1 + i) = \underbrace{K_0(1 + i)}_{K_1}(1 + i) = K_0(1 + i)^2, \\ &\vdots \\ K_t &= K_{t-1}(1 + i) = \underbrace{K_0(1 + i)^{t-1}}_{K_{t-1}}(1 + i) = K_0(1 + i)^t. \end{aligned}$$

Man erhält damit folgendes allgemeine Ergebnis:

Aus einem Anfangskapital K_0 entsteht bei exponentieller Verzinsung (Zinseszinsen) mit dem Zinssatz i nach n Jahren ein Endkapital von

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n = K_0 \cdot q^n \quad \text{mit} \quad q := 1 + i.$$

Man bezeichnet dabei q^n als Aufzinsungsfaktor. Der reziproke Wert $v^n = \frac{1}{q^n} = \frac{1}{(1+i)^n}$ heißt Abzinsungsfaktor bzw. Diskontierungsfaktor.

exponentielle
Verzinsung,
Zinseszinsen

Ab- und Auf-
zinsungsfaktor

Die Zinseszinsformel gibt den Zusammenhang zwischen Endkapital K_n und Barwert (=Anfangskapital) K_0 wieder. Berechnet man aus dem Barwert den Endwert, so nennt man diesen Vorgang *Aufzinsung*, der umgekehrte Vorgang wird als *Abzinsung* bezeichnet (siehe auch Abbildung 2.2). Daraus erklärt sich die Namensgebung für die Faktoren q^n und v^n .

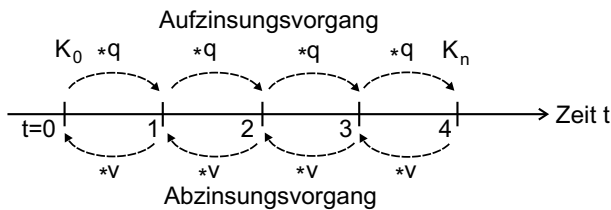


Abb. 2.2. Aufzinsungs- bzw. Abzinsungsvorgang

Beispiel 2.5

Ein Sparkassenbrief mit 1.000€ Nennwert und einer exponentiellen Verzinsung von 4% hat nach 8 Jahren Laufzeit einen Endwert von $1.000\text{€} \cdot 1,04^8 = 1.368,57\text{€}$. $\square$



Durch Auflösung der Zinseszinsformel nach einer der Größen K_0 , q bzw. n erhält man drei weitere Formeln:

Grundaufgaben der Zinseszinsrechnung:

- Unbekannter Barwert: $K_0 = \frac{K_n}{q^n}$.
- Unbekannter Zinssatz: $q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}$, $i = q - 1$.
- Unbekannte Laufzeit: $n = \frac{\ln(K_n/K_0)}{\ln q}$.

Grundaufgaben
der Zinseszins-
rechnung



Übung 2.4

Jemand verspricht Ihnen, aus 1.000 € in 3 Jahren 8.000 € zu machen. Wie hoch ist die exponentielle Verzinsung dieses Angebots?



Lösung 2.4

Bei dieser Aufgabenstellung sind Anfangs- und Endkapital sowie die Laufzeit gegeben. Der unbekannte Zinssatz ergibt sich nach der zweiten Grundaufgabe aus

$$q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} = \sqrt[3]{\frac{8000}{1000}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

zu $i = q - 1 = 1$. Der Zinssatz würde also 100% betragen. $\square$

Stellt man den Kapitalzuwachs aus Übung 2.4 grafisch dar (siehe Abb. 2.3), so erkennt man die exponentielle Zunahme im Gegensatz zum linearen Anstieg bei einfacher Verzinsung. Dies erklärt die Bezeichnung der Zinseszinsberechnung als exponentielle Verzinsung.

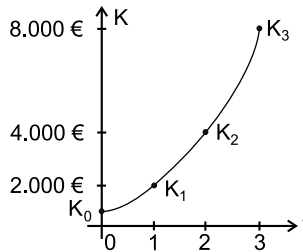


Abb. 2.3. Exponentielle Verzinsung

2.3 Vorschüssige und nachschüssige Zinsen

Zinsverbot

Bereits das „Alte Testament“ kannte ein Zinsverbot. Auch Papst Innozenz III (1215) hatte im Mittelalter verboten, Zinsen auf geliehenes Geld zu verlangen. Dies führte zur Entwicklung der vorschüssigen Verzinsung, bei der die Zinsen bereits im Voraus vom Darlehensbetrag abgezogen werden. Der Kreditnehmer erhält nur den um die Zinsen verringerten Betrag ausbezahlt und zahlt am Ende das volle Darlehen zurück. Da bei dieser Methode keine unmittelbare Zahlung von Zinsen vom Kreditnehmer an den Kreditgeber erfolgt, konnte man auf diese Weise das Zinsverbot umgehen.

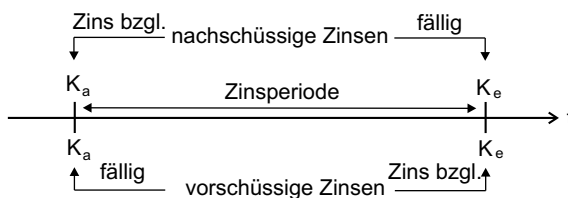
In den vorangegangenen Abschnitten sind wir stets davon ausgegangen, dass die Zinsen am Ende einer Zinsperiode erhoben werden. Die Zinsen können jedoch auch am Anfang einer Zinsperiode fällig werden. Wir definieren daher:

- Zinsen, die am Ende einer Zinsperiode anfallen und bzgl. des Anfangskapitals berechnet werden, heißen nachschüssige bzw. dekursive Zinsen.
- Zinsen, die am Anfang einer Zinsperiode anfallen und bzgl. des Endkapitals berechnet werden, nennt man vorschüssige bzw. antizipative Zinsen.

nachschüssige
bzw. dekursive
Zinsen

vorschüssige
bzw. antizipative
Zinsen

Der grundlegende Unterschied beider Methoden — abgesehen vom Zinstermin — ist folgender (siehe auch Abb. 2.4): Bei *nachschüssigen Zinsen* werden die Zinsen bezogen auf das *Anfangskapital* zum Kapital K_a addiert. Bei den vorschüssigen Zinsen werden hingegen die Zinsen vom Endwert des Kapitals K_e ermittelt und dann von diesem *Endkapital* subtrahiert.



nachschüssige
Zinsen vom
Anfangskapital

vorschüssige
Zinsen vom
Endkapital

Abb. 2.4. Nach- und vorschüssige Verzinsung

Zur Herleitung der entsprechenden Formeln muss jetzt noch unterschieden werden, ob es sich um lineare oder exponentielle Verzinsung handelt. Den pro Periode anfallenden Zins bezeichnen wir dabei mit z und den Zinssatz wieder mit i :

a) Lineare Verzinsung:

Bei einer Laufzeit von einem Jahr ergibt sich bezogen auf das Endkapital K_1 ein Zins von $z = K_1 i$, der vom Endkapital zu subtrahieren ist: $K_0 = K_1 - z = K_1 - (K_1 i) = K_1(1 - i)$. Hat man eine Laufzeit von zwei Jahren, so muss der Zins $z = K_2 i$ (jetzt bezogen auf das Endkapital K_2) für zwei Jahre vom Endkapital subtrahiert werden. Man erhält also $K_0 = K_2 - 2z = K_2 - 2(K_2 i) = K_2(1 - 2i)$. Bei einer Laufzeit von n Jahren fällt ein Zins $z = K_n i$ (bzgl. Endkapital K_n) dann n -mal an und es gilt

vorschüssige
Zinsen bei
linearer
Verzinsung

$$K_0 = K_n - z = K_n - n(K_n i) = K_n(1 - ni).$$

b) Exponentielle Verzinsung:

vorschüssige
Zinsen bei
exponentieller
Verzinsung

Bei einjähriger Laufzeit gilt wie bei der linearen Verzinsung $K_0 = K_1 - z_1 = K_1 - (K_1 i) = K_1(1 - i)$. Bei einer Laufzeit von zwei Jahren ergibt sich bezogen auf das Endkapital K_2 für die zweite Zinsperiode zunächst ein Zins $z_2 = K_2 i$. Damit gilt $K_1 = K_2 - z_2 = K_2 - (K_2 i) = K_2(1 - i)$. Jetzt ist der Zins bzgl. des Endkapitals K_1 der ersten Zinsperiode $z_1 = K_1 i$ von K_1 zu subtrahieren: $K_0 = K_1 - z_1 = K_1 - (K_1 i) = K_1(1 - i)$. Unter Beachtung von $K_1 = K_2(1 - i)$ folgt nun natürlich $K_0 = K_2(1 - i) \cdot (1 - i) = K_2(1 - i)^2$. Wiederholt man diesen Vorgang n -mal, erhält man für eine Laufzeit von n Jahren schließlich

$$K_0 = K_1(1 - i) = K_2(1 - i)^2 = \dots = K_n(1 - i)^n.$$

Wir fassen diese Ergebnisse jetzt zusammen:

vorschüssige
einfache Zinsen

vorschüssige
Zinseszinsen

Beträgt bei vorschüssigen Zinsen die Laufzeit n Jahre, so gilt bei

- linearer Verzinsung: $K_0 = K_n(1 - ni)$,
- exponentieller Verzinsung: $K_0 = K_n(1 - i)^n$.

Im Finanzsektor wird in der Regel die dekursive (= nachschüssige) Verzinsung benutzt. Die antizipative (= vorschüssige) Verzinsung kommt seltener zum Einsatz, ist aber dennoch nicht zu vernachlässigen: So wird beispielsweise bei der Verzinsung von Finanzierungsschätzen des Bundes oder beim Diskontieren von Wechseln linear vorschüssig gerechnet. Außerdem bildet die exponentielle vorschüssige Verzinsung die kalkulatorische Grundlage für die so genannte degressive Abschreibung.



Beispiel 2.6

Wir stellen ein Beispiel aus der Broschüre „Finanzierungsschätze des Bundes“ der Bundesrepublik Deutschland Finanzagentur GmbH vor (Stand: Sept. 2008). Bei Finanzierungsschätzen zahlt der Anleger einen um die Zinsen verminderten Betrag und erhält am Ende der Laufzeit den vollen Nennwert zurück. Ein „Schätzchen“ mit zweijähriger Laufzeit im Nennwert von 500 € kostet bei einem Verkaufszinssatz (so wird der einfache, vorschüssige Zins bezeichnet) von 3,5% dann 465 €. Dieser Verkaufspreis K_0 berechnet sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned} K_0 &= K_2 \cdot (1 - 2i) \\ &= 500 \text{ €} \cdot (1 - 2 \cdot 0,035) = 500 \text{ €} \cdot 0,93 = 465 \text{ €}. \end{aligned} \quad \square$$

Übung 2.5

- a) Ein einjähriger Finanzierungsschatz über nominal 500 € kostet 480,10 €. Wie lautet der Verkaufszinssatz?
- b) Bei der geometrisch degressiven Abschreibung verringert sich der Abschreibungsbetrag jedes Jahr um den gleichen Prozentsatz vom Betrag des Vorjahres. Bestimmen Sie den Restwert eines Wirtschaftsgutes im Wert von 10.000 € nach 3 Jahren, wenn der Abschreibungssatz 20% beträgt.

**Lösung 2.5**

- a) Mit $K_0 = 480,10 \text{ €}$, $K_1 = 500 \text{ €}$ folgt aus $K_1(1 - i) = K_0$



$$i = \frac{K_1 - K_0}{K_1} = \frac{500 \text{ €} - 480,10 \text{ €}}{500 \text{ €}} = 3,98\%.$$

- b) Hier müssen wir mit $i = 0,2$ und $K_3 = 10.000 \text{ €}$ die Formel für die vorschüssigen Zinseszinsen anwenden und erhalten den Restwert K_0 zu:

$$K_0 = K_3 \cdot (1 - i)^3 = 10.000 \text{ €} \cdot (1 - 0,2)^3 = 5.120 \text{ €}. \quad \square$$

Abschließend wird bei exponentieller Verzinsung untersucht, welcher nachschüssige Zinssatz i_d zum gleichen Endkapital wie ein vorgegebener vorschüssiger Zinssatz i_a führt. Man nennt dann i_d den zu i_a konformen nachschüssigen Zinssatz. Es sind lediglich die beiden Formeln $K_n = K_0(1 + i_d)^n$ und $K_n = \frac{K_0}{(1 - i_a)^n}$ gleichzusetzen. Man erhält aus $(1 + i_d)^n = \frac{1}{(1 - i_a)^n}$:

Bei exponentieller Verzinsung ergibt sich der zum vorschüssigen Zinssatz i_a konforme nachschüssige Zinssatz i_d zu

$$i_d = \frac{i_a}{1 - i_a}.$$

konforme
nachschüssige
exponentielle
Zinsen

Es zeigt sich, dass der konforme nachschüssige Zins stets höher ist als der zugehörige vorschüssige Zins.

Beispiel 2.7

Der zum vorschüssigen Zins $i_a = 0,2$ aus Übung 2.5b konforme nachschüssige Zins ergibt sich zu



$$i_d = \frac{i_a}{1 - i_a} = \frac{0,2}{1 - 0,2} = 0,25.$$

Anders ausgedrückt: Aus einem Kapital von 5.120 € wird bei 25% nachschüssigen Zinsen nach drei Jahren ein Endkapital von $5.120 € \cdot 1,25^3 = 10.000 €$. $\square$

Übung 2.6



- Ermitteln Sie bei einfacher Verzinsung den zum vorschüssigen Zinssatz i_a konformen nachschüssigen Zinssatz i_d .
- Welchen konformen nachschüssigen Zinssatz hat der einjähriger Finanzierungsschatz aus Übung 2.5a?

Lösung 2.6



- Aus den beiden Formeln $K_n = K_0(1 + ni_d)$ und $K_n = \frac{K_0}{1 - ni_a}$ erhält man durch Gleichsetzen $1 + ni_d = \frac{1}{1 - ni_a}$ und daraus $ni_d = \frac{1}{1 - ni_a} - 1 = \frac{ni_a}{1 - ni_a}$. Es ergibt sich also

$$i_d = \frac{i_a}{1 - ni_a}.$$

- Mit $i_a = 0,0398$ und $n = 1$ ergibt sich

$$i_d = \frac{i_a}{1 - ni_a} = \frac{0,0398}{1 - 0,0398} \approx 0,0415.$$

Der Wert von 4,15% wird von der Finanzagentur des Bundes im Verkaufsprospekt als Rendite pro Jahr ausgewiesen. $\square$

Konformitäts-
prinzip

Übung 2.6 hat uns das so genannte *Konformitätsprinzip* nochmals verdeutlicht: Unterschiedliche Zinsmodelle mit ihren Zinssätzen sind vom wirtschaftlichen Ergebnis her äquivalent, wenn sie zum gleichen Jahresszinssatz konform sind. Die abschließende Übung hilft Ihnen zu überprüfen, ob Sie dieses Prinzip verstanden haben:



Übung 2.7

Die Finanzagentur gibt für den Finanzierungsschatz aus Beispiel 2.6 eine Rendite von 3,70% aus. Wie wir später noch sehen werden, bezieht sich die Rendite immer auf nachschüssige Zinseszinsen (so genannter Effektivzins). Überprüfen Sie die Angabe der Finanzagentur!



Lösung 2.7

Es handelt sich hier um einen *einfachen*, vorschüssigen Zins von $i_a = 3,5\%$ (Verkaufszinssatz). Zu diesem muss nun der konforme nachschüssige *exponentielle* Zins i_Z berechnet werden. Daher sind die Formeln $K_2 = K_0(1 + i_Z)^2$ und $K_2 = \frac{K_0}{1 - 2i_a}$ gleichzusetzen. Es ergibt sich $(1 + i_Z)^2 = \frac{1}{1 - 2i_a}$ und

$$i_Z = \sqrt{\frac{1}{1 - 2i_a}} - 1 = \sqrt{\frac{1}{1 - 2 \cdot 0,035}} - 1 \approx 0,037.$$

Man hätte — wie wir später sehen werden — auch die Gleichung $500 \text{ €} = 465 \text{ €} (1 + i_Z)^2$ nach i_Z auflösen können. $\square$

Aufgrund des Konformitätsprinzips lassen sich alle Zinsmethoden in äquivalente Zinseszinsen überführen. Im nachfolgenden Abschnitt werden wir daher nur noch exponentielle Verzinsung betrachten.

2.4 Unterjährige und stetige Verzinsung

Bei vielen Kapitalanlagemöglichkeiten (beispielsweise Festgeldanlagen und variabel verzinslichen Anleihen) findet die Verzinsung nicht jährlich, sondern in kürzeren gleichlangen Zinsperioden (z.B. halbjährlich, quartalsweise, monatlich, etc.) statt.

Wir definieren daher:

Gibt es pro Jahr $m > 1$ gleichlange Zinsperioden, so spricht man von unterjähriger Verzinsung. Bei angegebenen Jahreszinssatz i wird dann pro Zinsperiode der so genannte Periodenzinssatz i_p angewandt:

$$i_p = \frac{i}{m}.$$

unterjährige
Verzinsung

Perioden-
zinssatz

Bei m Zinsperioden bzw. Zinsterminen pro Jahr ist pro Zinszahlung also der Zinssatz i_p zu verwenden. Insgesamt ergeben sich nach n Jahren dann $m \cdot n$ Zinszahlungen. Wir erhalten daher in Verallgemeinerung der Formel für jährliche Zinseszinsen:

Aus einem Anfangskapital von K_0 wird bei unterjähriger Verzinsung mit m gleichlangen Zinsperioden nach n Jahren bei einem Jahreszinssatz (p.a.) i ein Endkapital von

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn}.$$

Endkapital bei
 m Zinsperioden



Beispiel 2.8

Sie legen bei Ihrer Bank 10.000 € Festgeld für 3% p.a. an. Dieses wird monatlich verzinst. Dann besitzen Sie nach zwei Jahren ein Endkapital von ($K_0 = 10.000 \text{ €}$, $i = 0,03$, $m = 12$ und $n = 2$):

$$K_2 = K_0 \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12 \cdot 2} = 10.000 \text{ €} (1 + 0,0025)^{24} = 10.617,57 \text{ €}.$$

□

Um Zinsangebote vergleichbar zu machen, benutzt man in der Regel Jahreszinssätze. Wir definieren daher:

effektiver
Zinssatz

Der jährliche Zinssatz i_{eff} , für den sich bei einmaliger Verzinsung nach einem Jahr der gleiche Endwert wie bei unterjähriger Verzinsung ergibt, heißt effektiver Zinssatz bzw. der zum unterjährigen Zinssatz i_p konforme Jahreszinssatz.

Vergleich der Formeln für jährliche Zinseszinsen und unterjährige Verzinsung liefert:

Formel für
effektiven
Zinssatz

Bei einem unterjährigem Zinssatz von i_p ergibt sich der effektive Zinssatz zu

$$i_{\text{eff}} = (1 + i_p)^p - 1.$$



Beispiel 2.9

Wir setzen das Beispiel 2.8 fort und wollen wissen, welchen Zinssatz wir bei jährlicher Verzinsung für die Festgeldanlage bekommen müßten, um nach 2 Jahren das gleiche Endkapital zu erhalten. Dazu müssen wir nur den Effektivzins berechnen:

$$i_{\text{eff}} = (1 + 0,03/12)^{12} - 1 \approx 3,041596\%.$$

□



Übung 2.8

Erstellen Sie eine Tabelle mit allgemeinen Aufzinsungsfaktoren und Faktoren speziell für den Zinssatz 4% p.a. für die Zinsperioden $m = 1, 2, 4, 12, 360$.



Lösung 2.8

Für den einjährigen Bereich ergeben sich die Aufzinsungsfaktoren zu $(1 + \frac{i}{m})^m$. Die Tabelle hat daher folgendes Aussehen:

Zinsperioden	Aufzinsungsfaktor allgemein	Bsp.: Zinsfaktor bei $i = 0,04$
jährlich	$(1 + i)$	$1,04 = 1,04000$
halbjährig	$(1 + \frac{i}{2})^2$	$(1,02)^2 = 1,04040$
vierteljährig	$(1 + \frac{i}{4})^4$	$(1,01)^4 \approx 1,04060$
monatlich	$(1 + \frac{i}{12})^{12}$	$(1,00\overline{3})^{12} \approx 1,04074$
täglich	$(1 + \frac{i}{360})^{360}$	$(1,000\overline{1})^{360} \approx 1,04081$

Man sieht, dass der Zinsfaktor mit zunehmender Periodenanzahl gegen einen Grenzwert konvergiert. □

Wie Übung 2.8 zeigt, ergibt sich für den Aufzinsungsfaktor bei immer kürzeren Zinsperioden der aus der Analysis bekannte Grenzwert

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m = e^i.$$

Da sich bei einer Laufzeit von n Jahren das Endkapital durch Multiplikation des Startkapitals mit der n -ten Potenz des obigen Faktors ergibt, erhalten wir (beachte $(e^i)^n = e^{in}$):

Bei stetiger Verzinsung mit dem Zinssatz i_s hat man ausgehend von einem Anfangskapital von K_0 nach n Jahren ein Endkapital von

$$K_n = K_0 e^{i_s n}.$$

stetige
Verzinsung

Für den zu i_s konformen Zinssatz i bei exponentieller Verzinsung gelten die Zusammenhänge

$$i = e^{i_s} - 1 \quad \text{und} \quad i_s = \ln(1 + i).$$

konformer
Zinseszins

Den stetigen Zinssatz i_s bezeichnet man auch als Zinsintensität.

Zinsintensität

Man kann daher jeden diskreten Zinsvorgang unter Benutzung des konformen Zinssatzes auch als stetigen Vorgang modellieren und umgekehrt. Solche Ansätze findet man beispielsweise in einem Spezialgebiet der Finanzmathematik, der Optionspreistheorie. Häufiger benutzt man die Formel der stetigen Verzinsung

sung zur Modellierung natürlicher Wachstums- und Zerfallsprozesse (z.B. radioaktiver Zerfall).

2.5 Gemischte Verzinsung

Oft wird nicht genau zu Beginn einer Zinsperiode auf ein Konto einbezahlt (oder davon abgeboben), sondern innerhalb der Zinsperiode. Banken greifen in diesem Fall auf „gemischte Verzinsung“ zurück: Sie verzinsen linear für den Anfangszeitraum (oder Endzeitraum) und mit Zinseszins während der Zinsperiode.

Angenommen, ein Anfangskapital wird nicht für genau n Jahre festgelegt. Der Anlagetag falle auf einen beliebigen Tag des Jahres vor Beginn der n Jahre, so dass das Kapital zunächst für einen Anfangszeitraum von t_1 Tagen festliegt. Nach Ablauf der n Jahre werde das Kapital nicht sofort ausbezahlt, sondern erst nach einem Endzeitraum von t_2 Tagen (s. Abb. 2.5).

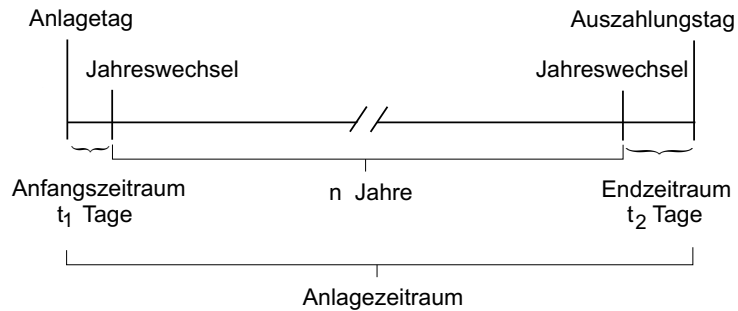


Abb. 2.5. Anlagezeitraum bei gemischter Verzinsung

In diesem Fall ist die so genannte gemischte Verzinsung üblich:

- Während der unterjährigen Zeitintervalle (Anfangszeitraum von t_1 Tagen, Endzeitraum von t_2 Tagen) wird das Kapital mit einfachen Zinsen verzinst.
- Über die n Jahre wird die Zinseszinsformel angewandt.

Unter Benutzung der bekannten Formeln für einfache Verzinsung und für exponentielle Verzinsung erhalten wir:

$$K = K_0 \cdot \underbrace{\left(1 + i \frac{t_1}{360}\right)}_{\text{lineare Verzinsung für den Anfangszeitraum}} \cdot \underbrace{(1 + i)^n}_{\text{Zinseszins für } n \text{ Jahre}} \cdot \underbrace{\left(1 + i \frac{t_2}{360}\right)}_{\text{lineare Verzinsung für den Endzeitraum}}$$

Wir notieren:

Bei der so genannten gemischten Verzinsung wird ein Anfangskapital K_0 zu einem Zinssatz i über einen Anfangszeitraum von t_1 Tagen und einen Endzeitraum von t_2 Tagen einfach verzinst, über einen Zeitraum von n Jahren exponentiell. Wir legen die 30/360 Zinsusance zugrunde. Es ergibt sich ein Endkapital von

gemischte
Verzinsung

$$K = K_0 \cdot \left(1 + i \frac{t_1}{360}\right) \cdot (1 + i)^n \cdot \left(1 + i \frac{t_2}{360}\right).$$

Die Berechnung einfacher Zinsen in den unterjährigen Anteilen am Anlagezeitraum begünstigt dabei sogar (geringfügig) den Anleger. Das liegt daran, dass bei linearer Verzinsung über einen Zeitraum kleiner als ein Jahr stets ein höherer Wert erzielt wird als bei exponentieller Verzinsung, danach ist es selbstverständlich umgekehrt (s. Abb. 2.6).

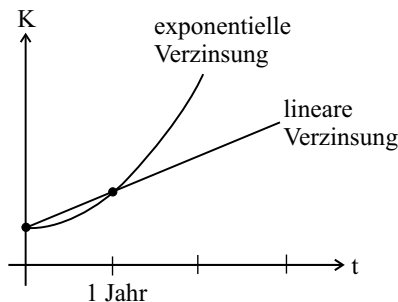


Abb. 2.6. Vergleich lineare und exponentielle Verzinsung

Beispiel 2.10

Sie legen am 1.10.2011 bei Ihrer Bank 10.000 € auf einem Sparbuch für 1,5% an. Am 1.3.2016 wird das Sparbuch aufgelöst. Dann berechnet sich der Auszahlungsbetrag wie folgt: Der Anfangszeitraum im Jahr 2011 beträgt $t_1 = 90$ Tage (3 Monate).



Danach liegt das Kapital für $n = 4$ Jahre fest (von 2012 bis 2015). Im Jahr 2016 müssen schließlich noch $t_2 = 60$ Tage (2 Monate) Zinsen bezahlt werden.

$$K = 10.000 \text{ €} \cdot \left(1 + 0,015 \frac{90}{360}\right) \cdot (1 + 0,015)^4 \cdot \left(1 + 0,015 \frac{60}{360}\right)$$

Sie erhalten somit 10.680,07 € ausbezahlt. $\square$



Übung 2.9

Ein Geldbetrag wurde vom 1.7.2006 bis zum 1.4.2013 zu 5% festgelegt. Ausbezahlt werden 4.172,30 €. Wie hoch war der festgelegte Betrag?



Lösung 2.9

Mit der Formel für gemischte Verzinsung erhält man:

$$4.172,30 \text{ €} = K_0 \cdot \left(1 + 0,05 \frac{180}{360}\right) \cdot (1 + 0,05)^6 \cdot \left(1 + 0,05 \frac{90}{360}\right).$$

Durch Auflösen nach K_0 ergibt sich ein Anfangskapital von $K_0 = 3.000 \text{ €}$. $\square$

2.6 Zusammenfassung: Zinsrechnung

Wichtige Begriffe aus der Zinsrechnung:

Kapital K , Zins z , Zinstermin, Zinsperiode, Zinsfuß p , Zinsrate i , Zinssatz, Zinsfaktor q , Laufzeit n , Zins p.a., Anfangskapital (Barwert) K_0 , Endkapital (Endwert) K_n

Beispiel:

Anfangskapital $K_0 = 1.000 \text{ €}$

Zinsfuß $p = 5$

Zinsrate $i = 0,05 = 5 \%$

Zinsfaktor $q = 1 + i = 1,05$

Laufzeit $n = 2 \text{ Jahre}$

Zins pro Jahr $z = K_0 \cdot i = 50$ bei linearer Verzinsung

Endkapital $K_2 = 1.100 \text{ €}$ bei linearer Verzinsung

Lineare Verzinsung (auch: einfache Verzinsung):

Formel: $K_n = K_0 \cdot (1 + n \cdot i)$

Beispiel: Bundesschatzbrief Typ A, Sparbrief, Pfandbrief,
wenn Laufzeit $< 1 \text{ Jahr}$

Zinstagequotient: $t = \frac{\text{Zinstage}}{\text{Basistage}}$, dann $K_t = K_0 \cdot (1 + t \cdot i)$

Zinsusancen:

(verschiedene Berechnungsmethoden für Zinstage und Basistage)

- „actual/actual“
- „actual/360“ (internationale Zinsusance)
- Standardisierte Zinsusance (365 Tage, 12 gleichlange Monate)
- „30/360“-Methode

hier kaufmännische Zinsformel $z = \left(\frac{Kd}{100} \right) / \left(\frac{360}{p} \right)$ (d : Anzahl der Zinstage)
zur Verzinsung bei Girokonten

(Beachte: Zählung der Tage beginnt mit Valutastellung und endet mit Tag vor Zinszahlung)

Exponentielle Verzinsung (auch: Zinseszinsen):

Formel: $K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n = K_0 \cdot q^n$

dabei: Aufzinsungsfaktor q^n

analog: Abzinsungs- oder Diskontierungsfaktor $v^n = \frac{1}{q^n}$

Beispiel: ist übliche Verzinsung

Vorschüssige und nachschüssige Verzinsung:

- vorschüssige bzw. antizipative Zinsen fallen am Anfang einer Zinsperiode an
- nachschüssige bzw. dekursive Zinsen fallen am Ende einer Zinsperiode an (ist üblich)

vorschüssige Zinsen:

bei linearer Verzinsung: $K_0 = K_n \cdot (1 - n \cdot i)$

bei exponentieller Verzinsung: $K_0 = K_n \cdot (1 - i)^n$

Konforme Verzinsung:

vorschüssiger (antizipativer) Zinssatz i_a entspricht einem nachschüssigen (dekursiven) Zinssatz i_d (und umgekehrt)

bei linearer Verzinsung: $i_d = \frac{i_a}{1 - n \cdot i_a}$

bei exponentieller Verzinsung: $i_d = \frac{i_a}{1 - i_a}$

Unterjährige Verzinsung:

pro Jahr: $m > 1$ Zinsperioden

Periodenzinssatz: $i_p = \frac{i}{m}$

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n}$$

entspricht effektivem Zinssatz i_{eff} mit

$$\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m = 1 + i_{eff} \quad \text{bzw.} \quad i_{eff} = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1$$

Stetige Verzinsung:

Sonderfall der unterjährigen Verzinsung mit Zinseszinsen, Zinssatz i_s
Anzahl der Zinsperioden m gegen Unendlich

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i_s}{m}\right)^m = e^{i_s},$$

also

$$K_n = K_0 \cdot e^{i_s \cdot n}$$

Gemischte Verzinsung:

Anfangskapital K_0 , Zinssatz i , „30/360“-Zinsusance

Verzinsungszeitraum:

- Anfangszeitraum von t_1 Tagen, Endzeitraum von t_2 Tagen, dabei lineare Verzinsung
- Zeitraum von n Jahren, dabei exponentielle Verzinsung

$$K = K_0 \cdot \left(1 + i \frac{t_1}{360}\right) \cdot (1 + i)^n \cdot \left(1 + i \frac{t_2}{360}\right)$$

2.7 Summary: Calculation of interest

Definitions:

Kapital	capital
Anfangskapital	initial capital, beginning amount
Barwert	present value
Endkapital	final capital, ending amount
Endwert	future value
Zins	interest
Zinsrate	rate of interest in percentage
Zinsfuß	interest rate
Anzahl der Zinsperioden, Laufzeit	number of interest periods

Definitions:

Einfache Verzinsung	simple interest
Exponentielle Verzinsung	compound interest
Abzinsung	discounting
Aufzinsung	compounding
Zinsusancen	day count conventions, day count bases
Schaltjahr	leap-year
Stückzinsen	accrued interest
Vorschüssige Verzinsung	interest in advance
Nachschüssige Verzinsung	interest in arrears

Definitions:

Unterjährige Verzinsung	non-annual interest
Periodenzinssatz	non-annual interest rate, periodic rate
Effektiver Zinssatz	effective annual interest rate, effective per annum interest rate, effective interest rate p.a.
Stetige Verzinsung	continuous interest
Gemischte Verzinsung	mixed interest

Simple interest:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + n \cdot i)$$

Compound interest:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n = K_0 \cdot q^n$$

Discounting, compounding:

discount interest factors are multipliers that translate the future value of an investment into its equivalent present value

$$K_0 = \frac{K_n}{1 + n \cdot i} \text{ (simple interest)} \quad \text{or} \quad K_0 = \frac{K_n}{(1 + i)^n} \text{ (compound interest)}$$

Interest in advance, interest in arrears:

- interest is calculated at the beginning of the interest period, i.e. in advance
- interest is calculated at the end of the interest period, i.e. in arrears, most common

Non-annual interest (for periods of less than a year):

$m > 1$: number of periods within a year, frequency

non-annual interest rate, periodic rate: $i_p = \frac{i}{m}$

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n}$$

examples: semi-annual interest $m = 2$

quarterly interest $m = 4$

monthly interest $m = 12$

daily interest $m = 365$

effective annual interest rate i_{eff} with

$$\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m = 1 + i_{eff} \quad \text{or} \quad i_{eff} = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1$$

Continuous interest:

special case of non-annual compound interest, interest rate i_s

number of interest periods m to infinity: $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i_s}{m}\right)^m = e^{i_s}$

therefore

$$K_n = K_0 \cdot e^{i_s \cdot n}$$

Mixed interest:

initial capital K_0 , interest rate in percentage i , „30/360“-day count-convention

- t_1 days at the beginning, t_2 days at the end, simple interest
- n years, compound interest

$$K = K_0 \cdot \left(1 + i \frac{t_1}{360}\right) \cdot (1 + i)^n \cdot \left(1 + i \frac{t_2}{360}\right)$$

2.8 Übungsaufgaben

Einfache und exponentielle Verzinsung

- 1.) Berechnen Sie für ein Anfangskapital von 10.000 € bei einem Zinssatz von 5,5% das Endkapital nach 2, 5, 10 oder 100 Jahren bei a) einfacher Verzinsung, b) exponentieller Verzinsung.
- 2.) Berechnen Sie für ein Anfangskapital bei einem Zinssatz von 5,5%, wann es sich verdoppelt hat unter a) einfacher Verzinsung, b) exponentieller Verzinsung.

Zinsusancen

- 1.) Ein Betrag von 1.000 € wird zu 5% p.a. vom 1.1.2016 bis zum 5.3.2016 verzinst. (Beachte: 2016 ist ein Schaltjahr!) Berechnen Sie den Zins unter Berücksichtigung der Zinsusance a) „actual/actual“, b) „actual/360“, c) „30/360“.
- 2.) Sie kaufen am 7.12.2014 (Valuta) einen Bundesschatzbrief mit Zinslauf ab 1.11.2014 und 0,5% Zins für das erste Jahr. Wie viele Stückzinsen sind bei einem Nennwert von 5.000 € zu zahlen (Zinsusance: „actual/actual“)?

Exponentielle Verzinsung

- 1.) Wie lange dauert es (Zinseszinsrechnung), bis sich ein Anfangskapital verdoppelt a) bei 1%, b) bei 2%, c) bei 5%, d) bei 10% Verzinsung?
- 2.) Wieviel Kapital müssen Sie heute anlegen, um in 5 Jahren bei 2,5% exponentieller Verzinsung 10.000 € zur Verfügung zu haben?
- 3.) Sie legen heute 5.000 € zu 3% p.a. an. Wie viele Jahre müssen Sie warten, bis Sie 7.000 € besitzen?
- 4.) Sie möchten Ihr Geld so anlegen, dass in 10 Jahren aus 10.000 € schließlich 15.000 € geworden sind. Welchen jährlichen Zinssatz muss Ihnen die Bank bieten?
- 5.) Eine Bank lockt mit dem Angebot: *Wir verdoppeln Ihr Kapital in 20 Jahren.*
a) Welche Verzinsung bietet die Bank? b) Nach wie vielen Jahren hat sich Ihr Kapital verdreifacht?

Vorschüssige und nachschüssige Verzinsung

- 1.) Wie viel bezahlen Sie für einen zweijährigen Finanzierungsschatz bei einem Nennwert von 1.000 € und einem Verkaufszinssatz (d.h. einfacher vorschüssiger Zins) von 3% ?
- 2.) Beim Diskontieren von Wechseln wird die einfache vorschüssige Verzinsung benutzt. Sie reichen bei Ihrer Bank einen Wechsel in Höhe von 3.000 € genau 20 Tage vor Fälligkeit ein. Welchen Betrag erhalten Sie bei einem Zins von 5% p.a. (Zinsusance „actual/360“)?

- 3.) Wir vergleichen vorschüssige und nachschüssige Verzinsung:
- Bei einer Geldanlage (Zinsperiode von 3 Jahren, Endkapital von 10.000 €, exponentielle Verzinsung mit 3,5%) ist das Anfangskapital bei vorschüssiger Verzinsung zu berechnen.
 - Nun soll das Anfangskapital aus Teil a) für 3 Jahre mit 3,5% p.a. (nachschüssig) verzinst werden. Wie groß wäre in diesem Fall das Endkapital?
 - Offenbar erhält man in b) einen kleineren Betrag als 10.000 €. Wie hoch müßte das Anfangskapital aus a) verzinst werden (so genannter konformer Zinssatz), um nach 3 Jahren ein Endkapital von 10.000 € zu erhalten?
- 4.) Sie haben einen neuen Rechner im Wert von 5.000 € für Ihre kleine Firma angeschafft. Den Wertverlust des Rechners schreiben Sie geometrisch degressiv ab (d.h. vorschüssige exponentielle Verzinsung). Welchen Wert hat Ihr Rechner nach 3 Jahren, wenn Sie jährlich 25% abschreiben?

Unterjährige und stetige Verzinsung

- Ein Betrag von 1.000 € wird zu 4% p.a. für 1 Jahr angelegt. Berechnen Sie den Endbetrag bei a) jährlicher, b) halbjährlicher, c) quartalsmäßiger, d) monatlicher und bei e) täglicher Verzinsung.
- Gegeben sei ein Zinssatz von 5% p.a. Berechnen Sie den effektiven Jahreszins bei halbjähriger, quartalsmäßiger, monatlicher und bei stetiger Verzinsung.
- Gegeben sei ein Startkapital von 200 €. a) Welches Endkapital hat man bei stetiger Verzinsung mit 3% nach 2 Jahren? b) Wie hoch müßte der Zins bei exponentieller Verzinsung sein, um den gleichen Zinsbetrag zu bekommen wie bei stetiger Verzinsung mit 3%?
- Ein Betrag von 10.000 € wird zu einem Zinssatz von 5% p.a. für 6 Monate festgelegt. Berechnen Sie das Endkapital bei a) einfacher Verzinsung, b) Zinseszinsrechnung bei monatlicher Verzinsung, c) Zinseszinsrechnung bei jährlicher Verzinsung.

Gemischte Verzinsung

- Ein Betrag von 2.000 € wird für 2 Jahre und 3 Monate zu 5% p.a. angelegt. Wie hoch ist der Endbetrag bei gemischter Verzinsung?
- Ein Betrag von 10.000 € wird vom 24.12.2013 bis zum 5.2.2019 zu 6% p.a. angelegt. Wie hoch ist der Endbetrag bei gemischter Verzinsung („30/360“-Zinsusage)?
- Ein Betrag von 10.000 € wird zu 6% p.a. für 4 Jahre und 3 Monate angelegt. Berechnen Sie das Endkapital bei a) gemischter Verzinsung, b) monatlicher Verzinsung.

2.9 Lösungen

Einfache und exponentielle Verzinsung

- 1.) Bei einem Anfangskapital von 10.000 € und einem Zinssatz von 5,5% ergibt sich nach 2, 5, 10 oder 100 Jahren folgendes Endkapital

a) bei einfacher Verzinsung:

$$\begin{aligned} K_2 &= 10.000 \text{ €} \cdot (1 + 2 \cdot 0,055) = 11.100,00 \text{ €}, \\ K_5 &= 10.000 \text{ €} \cdot (1 + 5 \cdot 0,055) = 12.750,00 \text{ €}, \\ K_{10} &= 10.000 \text{ €} \cdot (1 + 10 \cdot 0,055) = 15.500,00 \text{ €}, \\ K_{100} &= 10.000 \text{ €} \cdot (1 + 100 \cdot 0,055) = 65.000,00 \text{ €}, \end{aligned}$$

b) bei exponentieller Verzinsung:

$$\begin{aligned} K_2 &= 10.000 \text{ €} \cdot (1 + 0,055)^2 = 11.130,25 \text{ €}, \\ K_5 &= 10.000 \text{ €} \cdot (1 + 0,055)^5 = 13.069,60 \text{ €}, \\ K_{10} &= 10.000 \text{ €} \cdot (1 + 0,055)^{10} = 17.081,44 \text{ €}, \\ K_{100} &= 10.000 \text{ €} \cdot (1 + 0,055)^{100} = 2.114.686,36 \text{ €}. \end{aligned}$$

- 2.) Ein Anfangskapital hat sich bei einem Zinssatz von 5,5% verdoppelt

a) bei einfacher Verzinsung nach mehr als 18 Jahren:

$$\begin{aligned} K_n &= 2 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1 + n \cdot 0,055) \\ 2 &= 1 + n \cdot 0,055 \\ 1 &= n \cdot 0,055 \\ n &= \frac{1}{0,055} \approx 18,18 \end{aligned}$$

b) bei exponentieller Verzinsung nach weniger als 13 Jahren:

$$\begin{aligned} K_n &= 2 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1 + 0,055)^n \\ 2 &= (1 + 0,055)^n = 1,055^n \\ \ln 2 &= n \cdot \ln 1,055 \\ n &= \frac{\ln 2}{\ln 1,055} \approx 12,95 \end{aligned}$$

Zinsusancen

- 1.) Der Zins berechnet sich je nach Zinsusance zu

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & 1.000 \text{ €} \cdot 0,05 \cdot (31 + 29 + 5)/366 = 8,88 \text{ €}, \\ \text{b)} \quad & 1.000 \text{ €} \cdot 0,05 \cdot (31 + 29 + 5)/360 = 9,03 \text{ €}, \\ \text{c)} \quad & 1.000 \text{ €} \cdot 0,05 \cdot (30 + 30 + 5)/360 = 9,03 \text{ €}. \end{aligned}$$

- 2.) Die Stückzinsen berechnen sich zu

$$K_0 \cdot i \cdot t = 5.000 \text{ €} \cdot 0,005 \cdot \frac{30 + 6}{365} = 2,47 \text{ €}.$$

Man beachte, dass ab dem Tag der Valutastellung die Zinsen dem Käufer zustehen (siehe Beispiel 2.3, Seite 7).

Exponentielle Verzinsung

- 1.) Die Verdoppelung eines Anfangskapitals (Zinseszinsrechnung) bei einem Zinssatz von i berechnet sich zu

$$\begin{aligned} K_n &= 2 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1+i)^n \\ 2 &= (1+i)^n \\ n &= \frac{\ln 2}{\ln(1+i)} \end{aligned}$$

- a) Bei einem Zinssatz von $i = 0,01$: $n \approx 69,66$ Jahre.
- b) Bei einem Zinssatz von $i = 0,02$: $n \approx 35,00$ Jahre.
- c) Bei einem Zinssatz von $i = 0,05$: $n \approx 14,21$ Jahre.
- d) Bei einem Zinssatz von $i = 0,10$: $n \approx 7,27$ Jahre.

- 2.) Wegen $10.000 \text{ €} = K_0 \cdot 1,025^5$ gilt

$$K_0 = \frac{10.000 \text{ €}}{1,025^5} = 8.838,54 \text{ €}.$$

- 3.) Wegen $7.000 \text{ €} = 5.000 \text{ €} \cdot 1,03^n$ ist

$$n = \frac{\ln(7.000 \text{ €} / 5.000 \text{ €})}{\ln(1,03)} \approx 11,38.$$

- 4.) Wegen $15.000 \text{ €} = 10.000 \text{ €} \cdot (1+i)^{10}$ ist

$$i = \sqrt[10]{\frac{15.000 \text{ €}}{10.000 \text{ €}}} - 1 \approx 0,0413797.$$

Der gesuchte Zinssatz beträgt also $i=4,14\%$.

- 5.) a) Wegen $2 \cdot K_0 = K_{20} = K_0 \cdot (1+i)^{20}$ müsste Ihnen die Bank einen Zinssatz von $i = \sqrt[20]{2} - 1 \approx 0,035264$ bieten.
- b) Wegen $K_n = 3 \cdot K_0 = K_0 \cdot 1,035264^n$ ist $n = \frac{\ln 3}{\ln 1,035264} \approx 31,7$. Also dauert es fast 32 Jahre bis sich das Anfangskapital verdreifacht hat.

Vorschüssige und nachschüssige Verzinsung

- 1.) Bei zweijähriger Laufzeit und einfachem vorschüssigen Zins ergibt sich:

$$K_0 = K_2 \cdot (1 - 2 \cdot i) = 1.000 \text{ €} \cdot (1 - 2 \cdot 0,03) = 940 \text{ €}.$$

- 2.) Bei einfacher vorschüssiger Verzinsung berechnet sich der Barwert zu

$$\begin{aligned} K_0 &= K_n \cdot (1 - n \cdot i) \\ &= 3.000 \text{ €} \cdot \left(1 - \frac{20}{360} \cdot 0,05\right) \\ &= 2.991,67 \text{ €}. \end{aligned}$$

- 3.) a) $K_0 = K_3 \cdot (1 - i)^3 = 10.000 \text{ €} \cdot (1 - 0,035)^3 = 8.986,32 \text{ €}$
 b) $K_3 = K_0 \cdot (1 + i)^3 = 8.986,32 \text{ €} \cdot (1 + 0,035)^3 = 9.963,29 \text{ €}$
 c) Wegen $10.000 \text{ €} = 8.986,32 \text{ €} \cdot (1 + i_{konf})^3$ ist

$$i_{konf} = \sqrt[3]{\frac{10.000 \text{ €}}{8.986,32 \text{ €}}} - 1 \approx 0,03627.$$

Man kann hier auch die Formel $i_d = \frac{i_a}{1 - i_a} = \frac{0,035}{1 - 0,035} \approx 0,03627$ verwenden.

- 4.) Ihr Rechner hat nach 3 Jahren noch einen Wert von

$$5.000 \text{ €} \cdot (1 - 0,25)^3 = 2.109,38 \text{ €}.$$

Unterjährige und stetige Verzinsung

- 1.) Bei a) jährlicher, b) halbjährlicher, c) quartalsmäßiger, d) monatlicher und bei e) täglicher Verzinsung ergibt sich folgender Endbetrag:

$$\begin{aligned} \text{a) } 1.000 \text{ €} \cdot 1,04 &= 1.040,00 \text{ €,} \\ \text{b) } 1.000 \text{ €} \cdot (1 + 0,04 \cdot \frac{1}{2})^2 &= 1.040,40 \text{ €,} \\ \text{c) } 1.000 \text{ €} \cdot (1 + 0,04 \cdot \frac{1}{4})^4 &= 1.040,60 \text{ €,} \\ \text{d) } 1.000 \text{ €} \cdot (1 + 0,04 \cdot \frac{1}{12})^{12} &= 1.040,74 \text{ €,} \\ \text{e) } 1.000 \text{ €} \cdot (1 + 0,04 \cdot \frac{1}{365})^{365} &= 1.040,81 \text{ €.} \end{aligned}$$

- 2.) Wegen

$$i_{eff} = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1$$

folgt bei halbjähriger Verzinsung mit $m = 2$:

$$i_{eff} = \left(1 + \frac{0,05}{2}\right)^2 - 1 \approx 0,050625,$$

bei quartalsmäßiger Verzinsung mit $m = 4$:

$$i_{eff} = \left(1 + \frac{0,05}{4}\right)^4 - 1 \approx 0,0509453,$$

bei monatlicher Verzinsung mit $m = 12$:

$$i_{eff} = \left(1 + \frac{0,05}{12}\right)^{12} - 1 \approx 0,0511619$$

und bei stetiger Verzinsung:

$$i_{eff} = e^{0,05} - 1 \approx 0,0512711.$$

- 3.) a) Wegen $K_n = K_0 \cdot e^{i_s \cdot n}$ ist $K_2 = 200 \text{ €} \cdot e^{0,03 \cdot 2} = 212,37 \text{ €}$.
 b) Wegen $i = e^{i_s} - 1$ ist $i = e^{0,03} - 1 \approx 0,03045$.
- 4.) Das gesuchte Endkapital berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \text{a) } K &= 10.000 \text{ €} \cdot \left(1 + \frac{6}{12} \cdot 0,05\right) = 10.250,00 \text{ €}, \\ \text{b) } K &= 10.000 \text{ €} \cdot \left(1 + \frac{0,05}{12}\right)^{12 \cdot \frac{1}{2}} = 10.252,62 \text{ €}, \\ \text{c) } K &= 10.000 \text{ €} \cdot (1 + 0,05)^{1/2} = 10.246,95 \text{ €}. \end{aligned}$$

Gemischte Verzinsung

- 1.) Bei der gemischten Verzinsung ergibt sich für den Endbetrag

$$2.000 \text{ €} \cdot 1,05^2 \cdot \left(1 + 0,05 \cdot \frac{3}{12}\right) = 2.232,56 \text{ €}.$$

- 2.) Bei der gemischten Verzinsung erhält man den Endbetrag

$$10.000 \text{ €} \cdot \left(1 + 0,06 \cdot \frac{8}{360}\right) \cdot 1,06^5 \cdot \left(1 + 0,06 \cdot \frac{35}{360}\right) = 13.478,27 \text{ €}.$$

- 3.) Für das Endkapital ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{a) bei gemischter Verzinsung:} \\ 10.000 \text{ €} \cdot 1,06^4 \cdot \left(1 + 0,06 \cdot \frac{3}{12}\right) &= 12.814,14 \text{ €}, \\ \text{b) bei monatlicher Verzinsung:} \\ 10.000 \text{ €} \cdot \left(1 + 0,06 \cdot \frac{1}{12}\right)^{4 \cdot 12 + 3} &= 12.896,42 \text{ €}. \end{aligned}$$

2.10 Klausur

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Sie legen ein Kapital zu 4,5% p.a. an. Wann hat es sich verdreifacht

- a) bei linearer Verzinsung?
 b) bei exponentieller Verzinsung?

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Für den Zeitraum von n Jahren bis zur Verdoppelung eines Kapitals bei exponentieller Verzinsung mit dem Zinsfuß p gibt es die Näherungsformel

$$n \approx \frac{70}{p}.$$

Leiten Sie diese Näherungsformel her! (Hinweis: $\ln(1+x) \approx x$ für kleine x)

Aufgabe 3: (3 Punkte)

Was ist günstiger für den Anleger? (Begründung!)

- a) exponentielle Verzinsung,
- b) lineare Verzinsung,
- c) kommt darauf an.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Sie legen 1.000 € bei einer Verzinsung von 2,25% p.a. an. Anlagezeitraum ist vom 30.1.2014 (Valutastellung) bis zum 8.3.2014. Das Endkapital K berechnet sich dann nach der Formel

$$K = 1.000 \text{ €} \cdot (1 + t \cdot 0,0225).$$

Der Faktor t hängt dabei von der verwendeten Zinsusance ab.

Geben Sie die Faktoren t als Bruch (Zähler durch Nenner) an bei den folgenden Zinsusancen: „30/360“, „actual/360“, „actual/365“, „actual/actual“. (Zur Erinnerung: Der Januar 2014 hat 31 Tage, der Februar 28 Tage. Der Verzinsungszeitraum endet mit dem Tag vor der Zinszahlung.)

Aufgabe 5: (3 Punkte)

Ein Sparer hat zwei Angebote

- a) jährliche Verzinsung mit 6% p.a.,
- b) quartalsmäßige Verzinsung mit 5,9% p.a.

Rechnen Sie im Fall b) den effektiven Jahreszins aus.

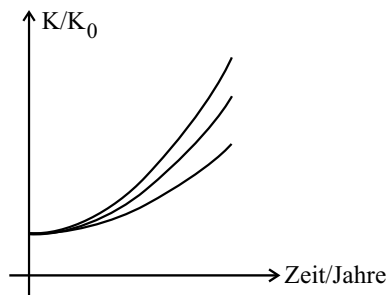
Was ist also günstiger für den Sparer?

Aufgabe 6: (3 Punkte)

Das folgende Diagramm veranschaulicht drei verschiedene Vermögensentwicklungen beim gleichen Zinssatz. Es handelt sich um

- a) jährliche Verzinsung,
- b) stetige Verzinsung,
- c) halbjährige Verzinsung.

Ordnen Sie dem Diagramm die Verzinsungsarten a), b) und c) zu.



Aufgabe 7: (4 Punkte)

Auf welchen Betrag wächst ein Kapital von 4.000 € bei vorschüssigen jährlichen Zinseszinsen von 3,5% in 2 Jahren an?

Welchem konformen nachschüssigen Zinssatz entspricht dies?

Aufgabe 8: (3 Punkte)

Sie legen 4.000 € Mitte des Jahres bei kalenderjährlicher Verzinsung von 3% p.a. an. (Kalenderjährlich bedeutet, dass der Zins immer am Jahresende gezahlt wird.)

Wie hoch ist das Endkapital nach 7 Jahren? (Gemischte Verzinsung!)

Aufgabe 9: 4 Punkte

Ein Kapital von 15.000 € wird 3 Jahre lang mit 4,5%, danach 1 Jahr lang mit 5%, anschließend 2 Jahre lang mit 6% verzinst.

Wie hoch ist das Endkapital nach 6 Jahren?

Zu welchem durchschnittlichen Zinssatz ist das Kapital angelegt?

2.11 Lösungen zur Klausur

Aufgabe 1: (4 Punkte)

a) Bei linearer Verzinsung hat sich das Kapital verdreifacht nach 44,44 Jahren.

$$3 = 1 + n \cdot 0,045 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{3 - 1}{0,045} \approx 44,44$$

b) Bei exponentieller Verzinsung hat sich das Kapital verdreifacht nach 24,96 Jahren.

$$3 = 1,045^n \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\ln 3}{\ln 1,045} \approx 24,96$$

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Für die Verdoppelung eines Kapitals ergibt sich:

$$2 = (1 + p/100)^n \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\ln 2}{\ln(1 + p/100)} \approx \frac{0,693}{p/100} \approx \frac{70}{p}$$

Aufgabe 3: (3 Punkte)

Es kommt darauf an: Für Laufzeiten kleiner 1 Jahr ist lineare Verzinsung günstiger, für Laufzeiten größer 1 Jahr ist exponentielle Verzinsung günstiger.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Zinsusance „30/360“: $t = \frac{2+30+7}{360} = \frac{39}{360}$

Zinsusance „actual/360“: $t = \frac{2+28+7}{360} = \frac{37}{360}$

Zinsusance „actual/365“: $t = \frac{2+28+7}{365} = \frac{37}{365}$

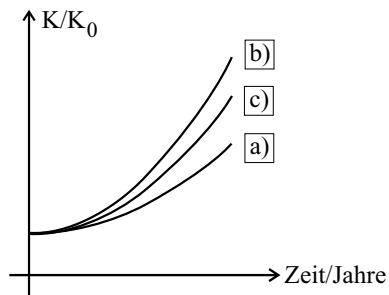
Zinsusance „actual/actual“: $t = \frac{2+28+7}{365} = \frac{37}{365}$

Aufgabe 5: (3 Punkte)

Der effektive Jahreszins im Fall b) beträgt 6,03%.

$$i_{eff} = \left(1 + \frac{i}{p}\right)^p - 1 = \left(1 + \frac{0,059}{4}\right)^4 - 1 \approx 6,03\%$$

Günstiger für den Sparer ist somit Alternative b).

Aufgabe 6: (3 Punkte)

Aufgabe 7: (4 Punkte)

Das Endkapital beträgt 4.295,42 €.

$$K_2 = \frac{K_0}{(1 - i_a)^n} = \frac{4000 \text{ €}}{(1 - 0,035)^2} \approx 4.295,42 \text{ €}$$

Der äquivalente konforme nachschüssige Zinssatz beträgt ca. 3,63%.

$$i_d = \frac{i_a}{1 - i_a} = \frac{0,035}{1 - 0,035} \approx 3,62694\%$$

Aufgabe 8: (3 Punkte)

Das Endkapital beträgt 4.920,57 €.

$$4000 \text{ €} \cdot \left(1 + \frac{0,03}{2}\right) \cdot 1,03^6 \cdot \left(1 + \frac{0,03}{2}\right) = 4000 \text{ €} \cdot 1,015^2 \cdot 1,03^6 \approx 4920,57 \text{ €}$$

Aufgabe 9: (4 Punkte)

Das Endkapital beträgt 20.194,88 €.

$$15.000 \text{ €} \cdot 1,045^3 \cdot 1,05 \cdot 1,06^2 \approx 20.194,88 \text{ €}$$

Der durchschnittliche Zinssatz beträgt ca. 5,08%.

$$i = \sqrt[6]{\frac{K_6}{K_0}} - 1 = \sqrt[6]{\frac{20.194,88 \text{ €}}{15.000 \text{ €}}} - 1 \approx 0,0508119$$

bzw. mit dem geometrischen Mittel berechnet

$$i = \sqrt[6]{1,045^3 \cdot 1,05 \cdot 1,06^2} - 1 \approx 5,08119\%$$

Finanzmathematik kompakt

für Studierende und Praktiker

Schwenkert, R.; Stry, Y.

2016, XII, 188 S. 30 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-662-49691-6