

In der Mathematik werden sowohl einzelne Objekte als auch Zusammenfassungen von Objekten zu größeren Einheiten betrachtet. Beispielsweise reden wir über *eine* konkrete natürliche Zahl, wenn wir sagen, dass 5 eine Primzahl ist. Die Behauptung, dass es unendlich viele natürliche Zahlen gibt, ist eine Aussage über *alle* natürlichen Zahlen. Die Zusammenfassung aller natürlicher Zahlen wird als *Menge* $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen bezeichnet und eine einzelne Zahl, zum Beispiel die 5, als *Element* dieser Menge. Eine Menge ist als Einheit zu sehen und kann selbst wieder Element einer (anderen) Menge sein. Dadurch können Mengen großer Komplexität entstehen.

Auf diesen Ideen basiert die *Mengenlehre*, deren Grundlagen wir in Abschn. 2.1 darstellen. Die Mengenlehre ist ein umfassendes Gebiet, innerhalb dessen die meisten heutigen mathematischen Theorien formuliert werden können. Als Schöpfer der Mengenlehre gilt *Georg Cantor*, der im ausgehenden 19. Jahrhundert viele bedeutende Beiträge zu ihrer Entwicklung leistete.

Beziehungen zwischen zwei oder mehr Mengen lassen sich mithilfe von Relationen und Funktionen herstellen. Auf diese für die Mathematik grundlegenden Konzepte werden wir in den nächsten Abschnitten ausführlich eingehen. Relationen und Funktionen sind aber nicht nur aus theoretischer Sicht wichtig, sondern besitzen auch konkrete Anwendungen in der Informatik. Als Beispiel betrachten wir Tab. 2.1, die einen Ausschnitt aus der Kundenkartei einer Firma enthält.

Jede Zeile dieser Tabelle besteht aus vier Einträgen, in denen Informationen über einen einzelnen Kunden gespeichert sind. Zeilen werden wir als Tupel und Tabellen als Relationen bezeichnen. Relationen sind Gegenstand des Abschn. 2.2. Sie bilden die theoretischen Grundlagen für die *relationalen Datenbanken*, die Bestandteil vieler heutiger Informationssysteme sind. Funktionen untersuchen wir in Abschn. 2.3.

Was lässt sich mit einem Computer berechnen? In der theoretischen Informatik wurden verschiedene Antworten auf diese Frage gegeben. Letztendlich erwiesen sich aber alle diese Ansätze als gleichwertig. Einen der Zugänge zu dieser Problematik, die *primitiv-*

Tab. 2.1 Ausschnitt aus der Kundenkartei einer Firma

Kundennr.	Name	Anschrift	Kontostand
...	...	...	...
12045	Friedrich Meyer	Breite Gasse 14, 12045 Klein Büttel	12,88 €
63073	Georg Schulze	Hansestraße 12, 54555 Mengen	234,56 €
...	...	...	...

rekursiven Funktionen, werden wir als Anwendung des Funktionsbegriffs in Abschn. 2.4 näher darstellen.

Als weiteres Beispiel werden wir – wie bereits in Abschn. 1.3 angekündigt – die Grundzüge der *funktionalen Programmierung* besprechen. Sie bildet neben der imperativen, der logischen und der objektorientierten Programmierung das vierte wichtige Programmierparadigma. Ein funktionales Programm kann als eine Funktion gesehen werden, die Eingabedaten auf Ausgabedaten abbildet. Dabei darf es Hilfsfunktionen verwenden. Die wichtigsten Konstrukte funktionaler Programme sind Rekursionen und Funktionen höherer Ordnung, das heißt Funktionen, deren Argumente wiederum Funktionen sind.

2.1 Mengen

Wir beginnen mit der klassischen Definition von *Georg Cantor* aus dem Jahre 1895:

Unter einer „Menge“ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente“ von M genannt werden) zu einem Ganzen.

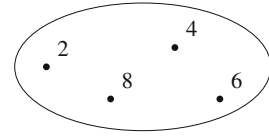
Hierbei handelt es sich nicht um eine Definition im strengen Sinn. Der Begriff „Zusammenfassung“ bedarf natürlich genauso einer Erklärung wie der einer „Menge“.

In der Mathematik wird nicht versucht, eine Definition einer Menge zu finden. Vielmehr werden Axiome angegeben, die implizit den Mengenbegriff festlegen. Jedes Objekt, das die Axiome erfüllt, ist aus dieser Sicht eine Menge. Eine sehr empfehlenswerte Einführung in die axiomatische Mengenlehre ist das Buch [23] von *Heinz-Dieter Ebbinghaus*. Für unsere Zwecke reicht jedoch die cantorsche Mengenbeschreibung vollkommen aus.

Wir werden über Mengen in der Sprache aus Beispiel 1.12 sprechen. Uns steht also außer den Variablen, den logischen Verknüpfungen, den Quantoren und Klammersymbolen nur das Gleichheitssymbol $=$ und das Relationssymbol $\in$ zur Verfügung, um Aussagen (über Mengen) zu treffen. Dem allgemeinen Gebrauch folgend schreiben wir $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$ für die Implikation und die Äquivalenz. Für Variable verwenden wir außer den Buchstaben $x, y, \dots$ auch andere Bezeichnungen wie $m, n, M, N, \dots$

$m \in M$ bedeutet, dass M eine Menge und m ein Element von M ist. Wenn m kein Element der Menge M ist, schreiben wir $m \notin M$.

Abb. 2.1 Venn-Diagramm einer Menge



Zwei Mengen sind *gleich*, wenn sie die gleichen Elemente enthalten, das heißt

$$\forall M \forall N (M = N \Leftrightarrow \forall m (m \in M \Leftrightarrow m \in N)). \quad (2.1)$$

Eine Menge ist also eindeutig durch ihre Elemente bestimmt. Die Aussage 2.1 heißt das *Extensionalitätsprinzip* der Mengenlehre.

Mengen können auf unterschiedliche Weisen festgelegt werden. Eine endliche Menge lässt sich zum Beispiel durch Angabe aller ihrer Elemente definieren. Hierzu verwendet man die *Mengenschreibweise*. Die Aussage

$$M = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$$

bedeutet, dass M eine Menge ist, die genau aus den Elementen $m_1, m_2, \dots, m_n$ besteht. Eine spezielle endliche Menge ist die *leere Menge* $\emptyset$, die keine Elemente enthält. Die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge bezeichnen wir mit $|M|$.

Beispiel 2.1 Für die Menge M aller geraden natürlichen Zahlen, die kleiner als 10 sind, gilt

$$M = \{2, 4, 6, 8\}.$$

Die Menge M enthält vier Elemente, nämlich die Zahlen 2, 4, 6 und 8. Es ist also $2 \in M$, $4 \in M$, $6 \in M$ und $8 \in M$. Die Zahl 1 ist kein Element von M , das heißt $1 \notin M$. Nach dem Extensionalitätsprinzip kommt es nicht darauf an, wie oft und in welcher Reihenfolge die Elemente einer Menge aufgeführt werden. Daher dürfen wir auch

$$M = \{2, 4, 6, 8\} = \{6, 8, 2, 4, 4, 6, 8\} = \{8, 6, 2, 4\}$$

schreiben. Es gilt $|M| = 4$. $\square$

Mengen werden häufig durch sogenannte *Venn-Diagramme* dargestellt. Dies sind Ellipsen oder Kreise, in die ggf. die Elemente eingezeichnet werden. Abb. 2.1 zeigt ein Venn-Diagramm der Menge $M = \{2, 4, 6, 8\}$ aus Beispiel 2.1.

Unendliche Mengen lassen sich nicht durch Auflisten ihrer Elemente definieren. Wenn aus dem Zusammenhang eindeutig hervorgeht, welche Elemente gemeint sind, kann eine Menge mithilfe von Auslassungspunkten angegeben werden. Für die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen schreiben wir zum Beispiel

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

oder für die Menge G der geraden natürlichen Zahlen

$$G = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}.$$

Meistens ist solch ein „Bildungsgesetz“ aber nicht erkennbar. In dem Fall beschreibt man die Menge durch einen prädikatenlogischen Ausdruck $\phi(x)$, der eine Variable x frei enthält. Der Ausdruck $\phi(x)$ wird dazu benutzt, um aus einer gegebenen Menge M diejenigen Elemente x auszusondern, die die Bedingung ϕ erfüllen. Wir erweitern daher die obige Mengenschreibweise und meinen mit

$$\{x \in M \mid \phi(x)\} \quad (2.2)$$

die Menge, die aus den Elementen besteht, die in M enthalten sind und die die Bedingung ϕ erfüllen. Nach dem Extensionalitätsprinzip ist diese Menge eindeutig bestimmt. Diese Vorgehensweise zur Mengenbildung wird *Aussonderungsprinzip* genannt. Wenn die Menge M aus dem Kontext hervorgeht, wird kurz $\{x \mid \phi(x)\}$ geschrieben.

Beispiel 2.2 Es sei $\phi(x)$ der Ausdruck $\exists y. x = 2 \cdot y$. Die Menge G der geraden natürlichen Zahlen kann damit durch

$$G = \{x \in \mathbb{N} \mid \phi(x)\} = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y. x = 2 \cdot y\}$$

und die Menge M aus Beispiel 2.1 durch

$$M = \{x \in G \mid x < 10\}$$

definiert werden. $\square$

Wenn wir das Aussonderungsprinzip auf eine Menge M und ein Prädikat ϕ anwenden, erhalten wir eine Menge, deren Elemente wieder in M liegen. Wir nennen die neue Menge eine Teilmenge von M . Genauer definieren wir wie folgt.

Definition 2.1 N und M seien Mengen. N heißt *Teilmenge* von M , wenn jedes Element von N auch Element von M ist. Wir schreiben dann $N \subseteq M$ oder $M \supseteq N$, das heißt

$$N \subseteq M \Leftrightarrow M \supseteq N \Leftrightarrow \forall n. (n \in N \Rightarrow n \in M).$$

N wird *echte Teilmenge* von M genannt, wenn N Teilmenge von M ist und wenn es ein Element $m \in M$ mit $m \notin N$ gibt. M heißt *Obermenge* bzw. *echte Obermenge* von N . Für echte Teilmengen schreiben wir $N \subsetneq M$ bzw. $M \supsetneq N$. $\square$

Satz 2.1 (*Eigenschaften der Teilmengenbeziehung*) Für alle Mengen M , N und P gelten die folgenden Aussagen:

- (a) $\emptyset \subseteq M$, $M \subseteq M$,
- (b) $M \subseteq N \wedge N \subseteq P \Rightarrow M \subseteq P$,
- (c) $M \subseteq N \wedge N \subseteq M \Leftrightarrow M = N$.

Beweis (a) folgt sofort aus der Definition. Zum Nachweis von (b) müssen wir zeigen, dass jedes Element $m \in M$ auch ein Element von P ist. Dies ergibt sich aus den Voraussetzungen $m \in M \Rightarrow m \in N$ und $m \in N \Rightarrow m \in P$. Die Aussage (c) ist das Extensionalitätsprinzip. $\square$

Beispiel 2.3 M und G seien die Mengen aus den Beispielen 2.1 und 2.2. Dann gilt

$$\emptyset \subseteq M \subseteq G \subseteq \mathbb{N}.$$

Alle Teilmengenbeziehungen sind echt. $\square$

Eine Menge kann selbst Element einer anderen Menge sein. Insbesondere können die Teilmengen einer gegebenen Menge zu einer neuen Menge zusammengefasst werden.

Definition 2.2 Es sei M eine Menge. Die Menge aller Teilmengen von M heißt *Potenzmenge* von M und wird mit

$$\mathcal{P}(M) = \{N \mid N \subseteq M\}. \quad (2.3)$$

bezeichnet. $\square$

Beispiel 2.4 Wir wollen die Potenzmenge der Menge $M = \{1, 2, 3\}$ bestimmen. Die leere Menge $\emptyset$ und M selbst sind nach Satz 2.1 Teilmengen von M . Sie enthalten null bzw. drei Elemente. Darüber hinaus müssen wir noch die ein- und die zweielementigen Teilmengen berücksichtigen. Insgesamt bekommen wir

$$\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

$\mathcal{P}(M)$ enthält also acht Teilmengen, sieben von ihnen sind echte Teilmengen. $\square$

Aus gegebenen Mengen können auf vielfältige Weise neue Mengen gebildet werden. Drei Mengenoperationen lernen wir jetzt kennen.

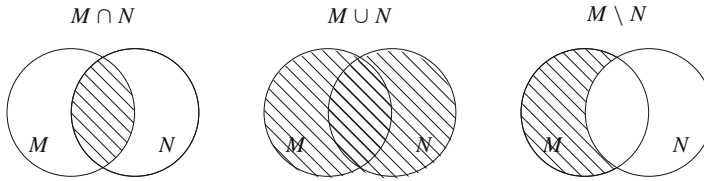


Abb. 2.2 Venn-Diagramme zu Durchschnitt, Vereinigung und Komplement

Definition 2.3 Es seien M und N Mengen. Die *Durchschnittsmenge* $M \cap N$, die *Vereinigungsmenge* $M \cup N$ und die *Differenzmenge* $M \setminus N$ werden definiert durch

$$M \cap N = \{m \mid m \in M \wedge m \in N\},$$

$$M \cup N = \{m \mid m \in M \vee m \in N\},$$

$$M \setminus N = \{m \mid m \in M \wedge m \notin N\}.$$

Falls speziell $N \subseteq M$ ist, wird die Mengendifferenz $M \setminus N$ als *Komplement* von N bezüglich M bezeichnet und als $\bar{N}$ geschrieben. M und N heißen *disjunkt*, wenn ihre Durchschnittsmenge leer ist. $\square$

In Abb. 2.2 werden diese drei Mengenoperationen durch Venn-Diagramme veranschaulicht.

Beispiel 2.5 Es sei G die Menge der geraden und U die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen. M sei die Menge $\{2, 4, 6, 8\}$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

$$G \cup U = \mathbb{N}$$

$$\mathbb{N} \setminus U = G$$

$$M \cup G = G$$

$$M \cup U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13, \dots\}$$

$$G \cap U = \emptyset,$$

$$\mathbb{N} \setminus G = U,$$

$$M \cap G = M,$$

$$M \cap U = \emptyset.$$

G und U sowie M und U sind disjunkte Mengen. $\square$

Die wichtigsten Rechenregeln für die drei Verknüpfungen ergeben sich aus dem folgenden Satz.

Satz 2.2 (Mengenalgebra) Es sei eine Menge M gegeben. Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ bildet mit den Verknüpfungen $\cap$, $\cup$ und $\bar{}$ eine boolesche Algebra. Die neutralen Elemente sind die leere Menge $\emptyset$ und die Menge M .

Beweis Wir müssen die Gültigkeit der Gesetze (vgl. Abschn. 1.1 unter Beispiel 1.5) nachweisen. Beispielhaft zeigen wir das erste Absorptionsgesetz $M \cup (M \cap N) = M$. Es ergibt sich aus

$$m \in M \cup (M \cap N) \Leftrightarrow m \in M \vee (m \in M \wedge m \in N) \Leftrightarrow m \in M.$$

Die erste Äquivalenz folgt aus den Definitionen von $\cup$ und $\cap$, die zweite aus dem Absorptionsgesetz für die Aussagenlogik. Die anderen Gesetze beweist man analog. $\square$

Die boolesche Algebra aus Satz 2.2 wird *Mengenalgebra* genannt.

Durchschnitt und Vereinigung haben wir eben für zwei Mengen definiert. Diese Operationen werden durch

$$\bigcap_{i \in I} M_i = \{m \mid \forall i \in I. m \in M_i\}$$

und

$$\bigcup_{i \in I} M_i = \{m \mid \exists i \in I. m \in M_i\}$$

auf eine beliebige Anzahl von Mengen M_i , $i \in I$, erweitert. Für diese verallgemeinerten Verknüpfungen gelten Rechenregeln analog denen einer booleschen Algebra. Einige dieser Regeln sollen in den Übungen bewiesen werden.

Da bei Mengen die Reihenfolge, in der die Elemente aufgeführt werden, keine Rolle spielt, gilt

$$\{a, b\} = \{b, a\}.$$

Häufig kommt es aber auf die Reihenfolge an. Wenn beispielsweise ein Punkt in der kartesischen Koordinatenebene spezifiziert werden soll, geschieht dies meistens in der Form (x, y) , wobei x die Koordinate der horizontalen und y die Koordinate der vertikalen Achse ist. $(2, 3)$ und $(3, 2)$ sind in dieser Darstellung verschiedene Punkte.

In der folgenden Definition führen wir geordnete Paare (a, b) als spezielle Mengen mit (höchstens) zwei Elementen ein. Da wir bei Mengen nicht auf die Reihenfolge ihrer Elemente zurückgreifen können, müssen wir uns mit einem Trick behelfen, indem wir ein Element als „erste Koordinate“ auszeichnen. Wenn dies zum Beispiel a sein soll, nehmen wir hierzu die Menge $\{a\}$. Das Paar (a, b) ist damit die Menge, die die Elemente $\{a, b\}$ und $\{a\}$ enthält.

Definition 2.4 Ein (geordnetes) Paar (a, b) ist die Menge $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. $\square$

Für Paare (a, b) mit $a \neq b$ ist $(a, b) \neq (b, a)$. Diese Aussage ergibt sich direkt aus dem folgenden Satz.

Satz 2.3 Für geordnete Paare (a, b) und (c, d) gilt

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d.$$

Beweis Es sei $(a, b) = (c, d)$, das heißt $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$. Nach dem Extensionalitätsprinzip tritt einer der beiden folgenden Fälle ein.

1. Fall: $\{a\} = \{c\}$ und $\{a, b\} = \{c, d\}$. Es folgt sofort $a = c$ und damit $\{a, b\} = \{a, d\}$. Dann ist entweder $b = d$ oder $a = d \wedge a = b$, in jedem Fall aber $b = d$.

2. Fall: $\{a\} = \{c, d\}$ und $\{a, b\} = \{c\}$. Hier gilt $a = c = d$ und $a = c = b$ und damit $a = b = c = d$.

Umgekehrt folgt aus $a = c \wedge b = d$ sofort $(a, b) = (c, d)$. $\square$

Als nächste Mengenoperation können wir jetzt das Produkt als die Menge aller geordneten Paare einführen.

Definition 2.5 M und N seien Mengen. Das (*kartesische*) *Produkt* dieser Mengen wird durch

$$M \times N = \{(m, n) \mid m \in M \wedge n \in N\}$$

definiert. $\square$

Beispiel 2.6 Das Produkt $M \times N$ der Mengen $M = \{a, b, c\}$ und $N = \{0, 1\}$ enthält die sechs Paare $(a, 0)$, $(a, 1)$, $(b, 0)$, $(b, 1)$, $(c, 0)$ und $(c, 1)$. $\square$

In den Anwendungen werden in der Regel nicht nur Beziehungen zwischen zwei Mengen hergestellt. Häufig sind drei oder mehr Mengen beteiligt. Wir verallgemeinern daher die Begriffe „Paar“ und „Produkt“ auf eine endliche Anzahl von Komponenten.

Ein *Tripel* (a, b, c) definieren wir als das Paar $((a, b), c)$. Den allgemeinen Fall behandeln wir in der folgenden Definition.

Definition 2.6 Unter einem n -*Tupel* $(a_1, \dots, a_n)$, $n \geq 2$, verstehen wir das Paar

$$((\dots((a_1, a_2), a_3), \dots, a_{n-1}), a_n)$$

und unter dem (*kartesischen*) *Produkt* der Mengen $M_1, \dots, M_n$ die Menge aller n -Tupel $(m_1, \dots, m_n)$ mit $m_i \in M_i$, das heißt

$$M_1 \times \dots \times M_n = \{(m_1, \dots, m_n) \mid m_i \in M_i, i = 1, \dots, n\},$$

wobei wir $n \geq 2$ annehmen. $\square$

Wir haben ein Tripel (a, b, c) als das Paar $((a, b), c)$ eingeführt. Genauso gut hätten wir $(a, (b, c))$ nehmen können. Formal hätte sich hieraus eine andere Definition des kartesischen Produkts ergeben. Durch $f((a, b), c) = (a, (b, c))$ könnten wir dann eine bijektive

Abbildung f (siehe Definition 2.16) zwischen den Mengen der beiden Definitionen $M_1 \times M_2 \times M_3$ herstellen.

Es kommt also auf die genaue Definition eines n -Tupels gar nicht an. Wir benötigen lediglich die Eigenschaft, dass zwei n -Tupel $(l_1, \dots, l_n)$ und $(m_1, \dots, m_n)$, $n \geq 2$, genau dann gleich sind, wenn $l_i = m_i$ für alle $i = 1, \dots, n$ gilt. Diese Aussage wird durch eine einfache Induktion gezeigt, wobei der Induktionsanfang bereits in Satz 2.3 bewiesen wurde.

Im nächsten Beispiel lernen wir eine erste Anwendung kennen, weitere werden in den kommenden Abschnitten folgen. Es ist üblich, für das n -fache Produkt $M \times \dots \times M$ der Menge M die Potenzschreibweise M^n zu verwenden.

Beispiel 2.7 Zur Beschreibung einer Ebene E führt man in der Regel rechtwinklige Koordinatenachsen ein. Jeder Punkt der Ebene ist dann eindeutig durch ein Koordinatenpaar (x, y) mit $x, y \in \mathbb{R}$ bestimmt:

$$E = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Entsprechend werden Punkte im Raum durch das dreifache Produkt $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ charakterisiert. $\square$

Die bisher vorgestellten Operationen gestatten die Konstruktion vieler Mengen. Mengen können jedoch nicht beliebig gebildet werden. Dies wollen wir zum Schluss dieses Abschnitts kurz erläutern.

Satz 2.4 Es gibt keine Menge, die alle Mengen als Element enthält.

Beweis Es sei U die Menge, die alle Mengen als Element enthält. Nach dem Aussonderungsprinzip (vgl. Abschn. 2.1 unter Gl. 2.2) können wir dann die Menge

$$V = \{x \in U \mid x \notin x\}$$

bilden. Da U jede Menge als Element enthält, muss $V \in U$ sein. Wir erhalten den Widerspruch $V \in V \Leftrightarrow V \notin V$. $\square$

Die Menge aller Mengen existiert also nicht. Trotzdem können und dürfen wir über die Gesamtheit der Mengen reden. Zusammenfassungen, die keine Mengen sind, werden als (*echte*) *Klassen* bezeichnet. Ein Beispiel ist, wie wir soeben gesehen haben, die Klasse aller Mengen, die sogenannte *Allklasse*.

Ein grundlegendes Konzept der Mengenlehre ist es, Mengen als Einheiten zu sehen, die wiederum Element einer anderen Menge sein können. Auf diese Weise lassen sich

Mengen von Mengen, Mengen von Mengen von Mengen usw. definieren. So strukturierte Mengen nennt man *Mengensysteme*. Beispielsweise ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ein Mengensystem, da ihre Elemente Mengen, nämlich die Teilmengen von M , sind. Mengensysteme entstehen hierarchisch „von unten nach oben“ durch Zusammenfassungen von Elementen zu Mengen.

Es sei $M_0 = \emptyset$ gegeben. Wenn wir mit M_{n+1} die Menge $M_n \cup \{M_n\}$ bezeichnen, erhalten wir eine unendliche Folge von Mengen $M_0, M_1, M_2, M_3, \dots$, für die

$$M_0 \in M_1 \in M_2 \in M_3 \in \dots \quad (2.4)$$

gilt. Solche aufsteigenden Mengenfolgen entsprechen dem hierarchischen Aufbau und dürfen daher gebildet werden.

Elementbeziehungen der Form $M \in M$ oder $M \in N \in M$ sowie unendliche absteigende Folgen

$$\dots \in M_3 \in M_2 \in M_1 \in M_0 \quad (2.5)$$

widersprechen allerdings der hierarchischen Struktur und sind deshalb verboten. Dieses Verbot wird *Fundierungsprinzip der Mengenlehre* genannt.

2.2 Relationen

Bisher haben wir Mengen als Ansammlungen von Elementen betrachtet, ohne jedoch auf die Elemente und ihre Beziehungen untereinander einzugehen. Dies wollen wir jetzt ändern. 3 und 9 sind natürliche Zahlen, das heißt $3 \in \mathbb{N}$ und $9 \in \mathbb{N}$. Es lässt sich aber mehr über diese beiden Zahlen aussagen. Beispielsweise ist 3 kleiner als 9. Außerdem ist 3 ein Teiler von 9 und 9 das Quadrat von 3. Formal schreiben wir diese Aussagen als $3 < 9$, $3 \mid 9$ und $3^2 = 9$. $<$ und $\mid$ sind sogenannte Relationen auf der Menge der natürlichen Zahlen und $()^2$ ist eine Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, die jede natürliche Zahl n auf $f(n) = n^2$ abbildet. Auf die Begriffe „Relation“ und „Funktion“ sowie auf einige ihrer Anwendungen in der Informatik gehen wir in diesem und dem nächsten Abschnitt ausführlich ein.

Es gilt $3 < 9$, aber nicht $9 < 3$. Wir fassen daher die $<$ -Beziehung als Menge von geordneten Paaren $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ auf, für die beispielsweise $(3, 9) \in R$ und $(9, 3) \notin R$ gilt. Diese Überlegung führt zur folgenden Definition.

Definition 2.7 Es seien Mengen M und N gegeben. Eine Teilmenge $R \subseteq M \times N$ heißt (zweistellige) *Relation von M nach N* . M ist die *Definitions Menge* und N die *Wertemenge* von R . Der *Definitionsbereich* $D(R) \subseteq M$ der Relation R ist die Menge aller $m \in M$, für die ein Paar $(m, n) \in R$ existiert. Entsprechend ist der *Wertebereich* $W(R)$ von R die Menge aller $n \in N$, für die es ein Paar $(m, n) \in R$ gibt. Im Falle $M = N$ ist $R \subseteq M \times M$ eine *Relation auf M* . $\square$

Wir erläutern die eben eingeführten Begriffe jetzt an einem Beispiel.

Mathematik für Informatiker
Grundlagen und Anwendungen
Struckmann, W.; Wätjen, D.
2016, XI, 551 S. 97 Abb.,
ISBN: 978-3-662-49870-5