

2. Übersicht über Größenordnungen, Wechselwirkungen und die Sondierung dynamischer Strukturen

Die typische Energieverteilung in Abhängigkeit von der Größenordnung der Bewegungssysteme wird vorläufig untergliedert nach Makro-, Mikro- und Mesoskala.

Nach Definition von Zufallsvariablen, Erwartungswert und Axiomen der Mittelbildung werden Nichtlinearität, das Phänomen der Turbulenz und das damit zusammenhängende Schließungsproblem vorgestellt und eine Gleichung der Turbulenzenergie hergeleitet.

Zur Sondierung spezieller Strukturen wird auf die Skalenanalyse mit gewissen Eigenschaften eines Tiefpassfilters hingewiesen.

2.1 Skalenübersicht

Über die molekulare Skala haben wir oben den Mantel der Axiomatik geworfen. Strahlungsprozesse lassen wir außer Betracht. Dennoch sind es gleich oberhalb der molekularen Skala Aerosole, die bei der Tropfenbildung ($10^{-7} - 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$) innerhalb von Wolken mit aufsteigender Luft eine Rolle spielen. Aber auch bei trockener Dynamik finden sich an Blättern oder Kanten ausgelöste Wellen im cm-Bereich. Aufsteigende und zusammenfließende Thermikblasen und thermische Turbulenz haben typische Skalen von einigen bis hundert Metern. Kumulus-Konvektion und Schwerewellen (z. B. als Leewellen) beginnen im km-Bereich. Die unser Wetter bestimmenden Zyklonen oder Zyklonenwellen liegen bei 10^3 km . Die planetaren Wellen schließlich als größte noch auf unseren Planeten passende Phänomene bilden den oberen Skalenabschluss. Man vergleiche dazu z. B. das Skalendiagramm Abb. 21 in Fortaks 'Meteorologie' (1971), Fig. 2 bei Van Mieghem (1973) oder auch die später folgende Abb. 4.1.1. Diese Abmessungen unterscheiden sich um bis zu 14 Zehnerpotenzen. Wenn wir die typischerweise in den verschiedenen Skalen vertretene Energie in Abhängigkeit von der Skala auftragen, erhalten wir im Prinzip die Verteilung in Abb. 2.1.1 mit dem absoluten Maximum in der 'Makroskala' und einem relativen Maximum in bzw. oberhalb der 'Mikroskala'. In der 'Mesoskala' dazwischen finden sich nur zeitweise und teilweise regional begrenzt energiereiche Systeme wie Tornados, 'Super-Gewitterzellen' und tropische Zyklonen.

2.2 Zur Nichtlinearität

Da entsprechend Kap. 1 die dynamischen Gleichungen typisch nichtlinear sind, wechselwirken alle Skalen miteinander. Und wie wir z. B. in diesem Abschnitt weiter unten sehen werden, hat auch die Wechselwirkung der kleinsten Skalen miteinander einen Effekt im Bereich der größten.

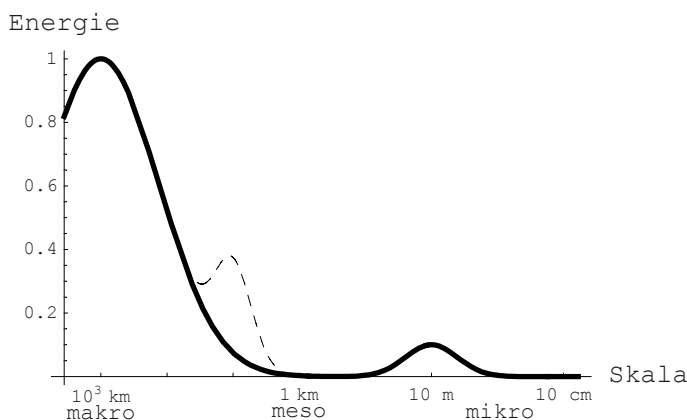


Abbildung 2.1.1: Typische Verteilung der Energie in Abhängigkeit von der Skala

Hinsichtlich des Phänomens der *Turbulenz* stehen wir damit vor einem ähnlichen Problem wie bei den molekularen Prozessen im 1. Kapitel. Im Rahmen von Prognosen der Zyklonenentwicklung ('Synoptik', Makroskala) werden subsynoptische Strukturen wesentlich, die routinemäßig gar nicht mehr ausgemessen werden (können). Mit dem Ziel einer geeigneten Behandlung wird üblicherweise für eine wie in (1.1.1) gegebene Eigenschaft

$$f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$$

ihr aufgelöster oder messbarer Anteil $\bar{f}$ vom nicht aufgelösten f' mit $f = \bar{f} + f'$ unterschieden und das baryzentrische Mittel (vgl. auch Fortak, 1967)

$$\hat{f}(t, x, y, z) := \frac{\bar{\rho} \bar{f}}{\bar{\rho}} \quad (2.2.1)$$

definiert, denn es hat keinen Sinn, z. B. einen Wind, der durch keine oder fast keine Masse gestützt ist, messen zu wollen. Wir setzen dann $f'' := f - \hat{f}$. Mathematisch gesehen ist $\bar{f}$ ein Lebesgue-Integral über eine zusätzliche zufällige Komponente oder in Worten der Wahrscheinlichkeitsrechnung ein Erwartungswert der über dem Ereignisraum definierten Zufallsvariablen

$$f(t, x, y, z) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

Die ursprünglich durch (1.1.1) definierte Eigenschaft erscheint jetzt als Funktion

$$f : \mathbb{R}^4 \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2.2.2)$$

wobei die Beziehung zwischen dem Ereignisraum Ω und der nicht auflösbaren Komponente f' durch den Ergodensatz (z. B. Fisz, 1976, Kap. 7) geregelt wird. Unter gewissen statistisch zu fassenden Bedingungen entfällt wiederum eine Dimension.

Aller diesbezüglichen impliziten Schwierigkeit aus dem Wege gehend, beziehen wir uns im Folgenden bei der Mittelbildung $f \mapsto \bar{f}$ auf die Axiome

$$\begin{aligned}\overline{\lambda f + \mu g} &= \lambda \bar{f} + \mu \bar{g}, \\ \overline{f g} &= \bar{f} \bar{g}, \\ \overline{\left(\frac{1}{f}\right)} &= \frac{1}{\bar{f}}, \\ \overline{Df} &= D\bar{f}\end{aligned}\tag{2.2.3}$$

für alle Funktionen oder Eigenschaften wie (2) oder (1.1.1), alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und alle linearen Differentialoperatoren D .

Unter diesen Vorgaben erhalten wir z. B. für die Divergenz des realisierbaren (d. h. auflösbaren) konvektiven Impulsflusses

$$\overline{\nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v}} = \nabla \cdot \overline{\rho (\hat{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'') (\hat{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'')} = \nabla \cdot \bar{\rho} \hat{\mathbf{v}} \hat{\mathbf{v}} + \nabla \cdot \overline{\rho \mathbf{v}'' \mathbf{v}''}, \tag{2.2.4}$$

wegen $\overline{\rho \hat{\mathbf{v}} \mathbf{v}''} = \hat{\mathbf{v}} \overline{\rho \mathbf{v}''} = \hat{\mathbf{v}} \bar{\rho} (\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}) = 0$. Dabei entspricht der turbulente Term $\nabla \cdot \overline{\rho \mathbf{v}'' \mathbf{v}''}$ der Divergenz des Diffusionsimpulsflusses für das Gemisch Luft in (1.2.2). Er besteht aus den nicht messbaren Faktoren $\mathbf{v}''$. Sein Effekt aber ist durch Messungen realisierbar.

Das vollständige Gleichungssystem für die auflösbaren Variablen $\bar{\rho}$, $\hat{\mathbf{v}}$, $\bar{p}$ und $\hat{T}$ im Falle trockener Dynamik lautet demnach und nach (1.1.9), (1.1.10), (1.1.14), (1.1.22)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{\rho} \hat{\mathbf{v}} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \hat{\mathbf{v}}) + \nabla \cdot (\bar{\rho} \hat{\mathbf{v}} \hat{\mathbf{v}}) + \nabla \cdot (\overline{\rho \mathbf{v}'' \mathbf{v}''}) + \nabla \bar{p} - \nabla \cdot \bar{\mathbf{F}} + \bar{\rho} \nabla \phi_A &= \mathbf{0}, \\ c_v \left(\frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} \hat{T} + \nabla \cdot \bar{\rho} \hat{\mathbf{v}} \hat{T} + \nabla \cdot \overline{\rho \mathbf{v}'' T''} \right) \\ &= - \nabla \cdot \bar{\mathbf{w}} + \bar{\rho} \hat{\delta} - \bar{p} \nabla \cdot \hat{\mathbf{v}} - \bar{p} \nabla \cdot \mathbf{v}'', \\ \bar{p} &= R \bar{\rho} \hat{T}.\end{aligned}\tag{2.2.5}$$

Wie prinzipiell bei Nichtlinearität stellt sich hier das *Schließungsproblem*. Schon im 1. Kapitel waren auf molekulare Prozesse zurückgehende $\mathbf{F}$ und $\mathbf{w}$ zu bestimmen. Demnach seien hier $\bar{\mathbf{F}}$, $\bar{\mathbf{w}}$ und $\hat{\delta}$ bekannt. Zusätzlich aber erscheinen die drei turbulenten Terme $\nabla \cdot \overline{\rho \mathbf{v}'' \mathbf{v}''}$, $\nabla \cdot \overline{\rho \mathbf{v}'' T''}$ und $\bar{p} \nabla \cdot \mathbf{v}''$, bestehend aus nicht auflösbaren Anteilen und auch im Rahmen einer Prognose zu bestimmen.

Eine rigorose Lösung dieser Aufgabe besteht in der Herleitung prognostischer Gleichungen für diese turbulenten Terme, der 'stochastischen' Gleichungen. Idee und Problematik werden folgend anhand eines Anteils von (5b), d. i. hier im Falle einer

eindimensionalen homogenen Modellatmosphäre, kontrolliert durch die Burgersgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (2.2.6)$$

dargestellt. Diese Gleichung gesetzt in Flussform und aufgespalten entsprechend $u = \bar{u} + u'$ lautet

$$\frac{\partial (\bar{u} + u')}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}^2 + 2 \bar{u} u' + u'^2) = 0; \quad (2.2.7)$$

ihr realisierbares Mittel ist entsprechend (3)

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}^2 + \overline{u'^2}) = 0 \quad (2.2.8)$$

und deren Differenz (7)-(8)

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (2 \bar{u} u' + u'^2 - \overline{u'^2}) = 0, \quad (2.2.9)$$

die subskalige 'Störgleichung'. Die Manipulation $(2.2.9) 2 \bar{u}'$ liefert nach etwas Rechnung die gewünschte Prognosegleichung für den Turbulenzterm in (8), nämlich

$$\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} + 2 \overline{u'^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{2}{3} \frac{\partial \overline{u'^3}}{\partial x} = 0. \quad (2.2.10)$$

Dummerweise tritt in ihr im letzten Term ein drittes Moment des nicht messbaren u' auf. $(2.2.9) 3 \overline{u'^2}$ liefert eine Prognosegleichung für dieses,

$$\frac{\partial \overline{u'^3}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \overline{u'^3}}{\partial x} + 3 \overline{u'^3} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{3}{4} \frac{\partial \overline{u'^4}}{\partial x} - \frac{3}{4} \frac{\partial (\overline{u'^2})^2}{\partial x} = 0 \quad (2.2.11)$$

mit nun einem 4. Moment. Allgemein hat die mittels $(2.2.9) k (\overline{u'^k})^{k-1}$ gelieferte Prognosegleichung für das k -te Moment auf der rechten Seite ein unbestimmtes $(k+1)$ -tes Moment.

Auch wenn man der Hoffnung sein mag, dass die Folge (8), (10), (11), ... konvergiere, d. h. dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \overline{u'^k} = 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial x} \overline{u'^k} = 0 \quad (2.2.12)$$

sei, so ist doch angesichts des vollen Gleichungssystems (5) und der sich daraus ergebenden Kaskade weiterer Gleichungen für die auch gemischten höheren Momente der Aufwand i. A. untragbar.

Die Suche im Rahmen von Turbulenztheorien geht nach einer Darstellung

$$\overline{u'^k} = p(\bar{u}, \overline{u'^2}, \dots, \overline{u'^{k-1}}), \quad (2.2.13)$$

und das für möglichst kleine $k > 1$. Wir sprechen dann von einer 'Parametrisierung' (im meteorologischen Sinne): Der Effekt von subskaligen Größen auf großskalige (durch Messungen auflösbare) Variable wird durch großskalige Variable dargestellt. Eine typische Parametrisierung bei $k = 2$ ist

$$\overline{u'^2} = -\kappa \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \quad (2.2.14)$$

wobei Vorstellungen von einer 'Mischungsweglänge' (Prandtl, 1925) analog zur freien Weglänge der Moleküle (siehe **F**) verwendet werden. Man beachte dazu auch Van Mieghem (1973) und Abschnitt 4.10.

Zur weiteren Veranschaulichung der Wechselwirkungen kommen wir auf Abb. 2.1.1 zurück, fourierentwickeln die Variable u der Burgersgleichung (6) und definieren auf elementare Weise die Approximation einer Mittelbildung durch

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(t) e^{inx} \mapsto \bar{u} = \sum_{n=-N}^N u_n(t) e^{inx}. \quad (2.2.15)$$

Wir sprechen auch von einem Tiefpassfilter. Offenbar sind die Komponenten zu $-n$ und zu n konjugiert komplex, $(u_n)^* = u_{-n}$, denn dann und nur dann ist u reellwertig. Das 2. und 3. Axiom (3bc) ist nicht erfüllt. Z. B. kann

$$\overline{f' \bar{g}} = f_{-N-1} g_1 e^{-iNx} + \dots \neq 0$$

gelten, und für

$$\bar{f} := a \sin x = \frac{a}{2i} (e^{ix} - e^{-ix})$$

folgt

$$\frac{1}{\bar{f}} = -\frac{i}{a} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (e^{i(2k+1)x} - e^{-i(2k+1)x}) \right) \neq \overline{\left(\frac{1}{f} \right)}.$$

Aber immerhin gilt $\overline{(\bar{g})} = g$ als Teil des 2. Axioms (3b). In der hier zugrunde liegenden Differentialgleichung (6) treten Divisionen gar nicht auf, und tatsächlich können sie bei einer spektralen Behandlung der Differentialgleichungen i. A. vermieden werden.

Um einen Einblick in den skalenabhängigen Informationsfluss zu erhalten, betrachten wir nun zwei reelle Komponenten des gemäß (15) fourierentwickelten u zu zwei verschiedenen Wellenzahlen m, n , o. B. d. A.

$$u = \dots + a \cos mx + \dots$$

und

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \dots + b \cos nx + \dots,$$

und erhalten aufgrund dieser Komponenten für die nichtlineare Operation in (6)

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} &= (\dots + a \cos mx + \dots) (\dots + b \cos nx + \dots) \\ &= \dots + \frac{ab}{2} \{ \cos(m+n)x + \cos(m-n)x \} + \dots \end{aligned}$$

Die Grenze N der Auflösung sei im Bereich der Mesoskala.

Es sei in einem ersten Fall

$$m, n > N \quad \text{und} \quad |m - n| < N,$$

dann müssten wir durch Wechselwirkung in der nicht aufgelösten Mikroskala ($> N$) eigentlich einen Beitrag

$$\left(\frac{ab}{2} \right)_I \cos (m - n) x$$

für die große Skala der Wellenzahl $|m - n|$ realisieren. Diesen gilt es also *im Rahmen einer Parametrisierung* darzustellen.

Andererseits gibt es neben diesem Fluss skalenaufwärts (d. h. zur großen Skala, kleinen Wellenzahl hin) die Komponente

$$\left(\frac{ab}{2} \right)_I \cos (m + n) x$$

für einen Fluss skalenabwärts.

In einem zweiten Fall von Wechselwirkungen der Komponenten

$$m, n \leq N \quad \text{mit} \quad m + n > N$$

bleibt der Fluss

$$\left(\frac{ab}{2} \right)_{II} \cos (m - n) x$$

im großskaligen Bereich, jedoch

$$\left(\frac{ab}{2} \right)_{II} \cos (m + n) x$$

wird *fallen gelassen!*

Bei einem wie in Abb. 2.1.1 angedeutet *roten* Energiespektrum, d. h. bei für zunehmende Skala zunehmender Amplitude, ist die individuelle Amplitude des Verlustes durch Abhacken größer als die des zu realisierenden Gewinns aus kleinskaligen Wechselwirkungen,

$$\left(\frac{ab}{2} \right)_{II} > \left(\frac{ab}{2} \right)_I.$$

Jedoch sei betont, dass Wechselwirkungen auch der kleinsten, wenn nur benachbarten Skalen einen direkten Einfluss auf die aufgelöste Skala haben, während Wechselwirkungen in der großen Skala nur die benachbarte kleinere betreffen. Zusammengefasst: Die *Amplituden* des Ausfalls sind größer, aber der *Bereich* des Einfalls ist größer.

Im hier gegebenen Fall des Problems (6) haben wir einen gewissen Anhaltspunkt für die Parametrisierung des Flusses skalenauf durch den Verlust skalenab, da wegen

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^{2\pi} \frac{u^2}{2} dx \right) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \frac{u^2}{2} dx = - \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \frac{u^3}{3} dx = 0$$

die Gesamtenergie zeitlich erhalten bleiben sollte.

Die Situation in natura ist nicht derart balanciert. Die allgemeine atmosphärische Zirkulation erfährt einen permanenten Antrieb durch die Sonne in Form eines Wärmeüberschusses in den Tropen und dessen Verteilung in die polaren Defizitgebiete. D. h., es existiert eine Energiequelle in der großen (globalen) Skala. Abbremsung der rotierenden Erde im Bereich der Winde aus Osten und Antrieb durch

Westwinde sind ein stabilisierendes Element. Die Reibung definiert auf dem Wege über Reibungswärme und Ausstrahlung eine Senke im Bereich der Mikroskala. Das Resultat ist die annähernde Balance des globalen Energiemittels der Atmosphäre und der skalenmäßigen Verteilungsstruktur. Aus- und Einstrahlung sind die Randbedingungen, die das garantieren.

Angesichts dieser Situation ist es das Bestreben, innerhalb eines Zirkulationsmodells den Tiefpassfilter (15) so zu modifizieren bzw. Quellen und Senken so einzurichten, dass die Energieverteilung insbesondere an der Schnittstelle N realistisch bleibt. Umgekehrt betrachtet ist es sinnvoll, die Schnittstelle so (in einen *Trägheitsbereich* oder *inertial subrange*, z. B. Van Mieghem, 1973) zu legen, dass sie nicht dynamisch aktive Ereignisse durchtrennt.

Wegen ihrer Bedeutung in der Meteorologie, gerade im Zusammenhang mit Parametrisierungen, notieren wir noch die (10) entsprechende aus (1.1.10), (5) usw. abgeleitete Turbulenzenergiegleichung. Genau gesagt liefert

$$\overline{\mathbf{v} \cdot (1.1.10) + (1.1.10) \mathbf{v}} - \overline{\mathbf{v} \cdot (1.1.9) \mathbf{v}} = \{ \hat{\mathbf{v}} \cdot (2.2.5b) + (2.2.5b) \hat{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{v}} \cdot (2.2.5a) \hat{\mathbf{v}} \}$$

eine Prognosegleichung für den turbulenten Impulsfluss $\overline{\rho \mathbf{v}'' \mathbf{v}''}$. Die Spur (die Summe der Hauptdiagonalelemente) dieser Tensorgleichung ist gerade die Gleichung für die turbulente kinetische Energie k :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \operatorname{sp} (\mathbf{v}'' \mathbf{v}'') &= \frac{1}{2} \mathbf{v}'' \bullet \mathbf{v}'' = : k, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho} \hat{k}) &+ \nabla \bullet \overline{\rho} \hat{\mathbf{v}} \hat{k} + \nabla \bullet \overline{\rho \mathbf{v}'' k} - \nabla \bullet (\overline{\mathbf{F} \bullet \mathbf{v}''}) \\ &+ \nabla \hat{\mathbf{v}} \bullet \bullet \overline{\rho \mathbf{v}'' \mathbf{v}''} + \overline{\mathbf{v}'' \bullet \nabla \overline{p}} + \overline{\nabla \mathbf{v}'' \bullet \bullet \mathbf{F}} = 0. \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

Einfacher erhält man diese Gleichung auch aus $\overline{(1.1.12)} - (5b) \hat{\mathbf{v}}$. Neben der lokalen zeitlichen Änderung der turbulenten Energie finden wir in der in (16) gegebenen Reihenfolge die Divergenzen ihres konvektiven, turbulenten und molekularen Transports, Produktionsterme des Scherantriebs und turbulenter Strömung gegen den Druck und schließlich die Dissipation.

2.3 Skalenanalyse

Ein kraftvolles Mittel zur Auffindung der geeigneten Gleichungen für ein dynamisches Problem in einem bestimmten Skalenbereich läuft unter dem Namen 'Skalenanalyse'. Der Einfluss kleinerer Skalen kann auf objektive, wenn auch nicht gerade optimale Weise bewertet und realisiert werden. Bei der Lösung jedes Problems, etwa im Rahmen der Synoptik oder bei der Entwicklung einer Wolke usw., wird diese Skalenanalyse als das Mittel verstanden, die Aufmerksamkeit und die rechnerische Kapazität auf das Wesentliche zu konzentrieren. Um ein Beispiel zu geben, betrachten wir den Bereich synoptischer Meteorologie, d. h. die Zyklonenskala, betrachten die die Bewegung beschreibende Vektorgleichung (1.1.10) bezüglich *lokaler* horizontal bzw. vertikal ausgerichteter Koordinaten x, y, z und definieren als typische Maße

$$L \sim 10^6 \text{ m}, \quad H \sim 10^4 \text{ m}, \quad T \sim 10^5 \text{ s} \approx 1 \text{ d},$$

$$U_0 := \frac{L}{T} \sim 10 \text{ ms}^{-1}, \quad W_0 := \frac{H}{T} \sim 0.1 \text{ ms}^{-1}$$

für Länge, Höhe, Zeitspanne, horizontale und vertikale Geschwindigkeitskomponente, weiter

$$g \sim 10 \text{ m s}^{-2}, \quad \mu \sim 10^{-5} \text{ Pa s}, \quad \rho \sim 1 \text{ kg m}^{-3}$$

für Erdbeschleunigung, dynamische Viskosität und Dichte der Luft. Danach spalten wir die Variablen

$$\mathbf{v}_{\text{hor}} := U_0 \mathbf{v}_{\text{hor}}^*, \quad \mathbf{g} = -g \mathbf{e}_r, \quad W := \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r = W_0 W^*,$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{F}) \cdot \mathbf{e}_r$$

$$= \mu (\nabla \cdot \{ \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^t \}) \cdot \mathbf{e}_r = \mu \left(\Delta W + \frac{\partial}{\partial Z} \nabla \cdot \mathbf{v} \right) =$$

$$\mu \left\{ \frac{W_0}{L^2} \Delta_{\text{hor}}^* W^* + \frac{W_0}{H^2} \frac{\partial^2 W^*}{\partial Z^{*2}} + \right.$$

$$\left. \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial Z^*} \left(\frac{U_0}{L} \nabla_{\text{hor}}^* \cdot \mathbf{v}_{\text{hor}}^* + \frac{W_0}{H} \frac{\partial W^*}{\partial Z^*} \right) \right\},$$

$$\rho = Q \rho^*, \quad p = P p^*$$

auf in Produkte von *Maßen* und dimensionslosen *Strukturfunktionen* der Größenordnung 1. Der Operator $\Delta := \nabla^2$ steht für den Laplace-Operator und $\mathbf{e}_r$ für den vertikalen Einheitsvektor. Die vertikale Komponente der Impulsgleichung (1.1.10) $\cdot \mathbf{e}_r$ lautet dann

$$\frac{Q W_0}{T} \frac{\partial \rho^* W^*}{\partial t^*} + Q \left(\frac{U_0 W_0}{L} \nabla_{\text{hor}}^* \cdot \rho^* \mathbf{v}_{\text{hor}}^* W^* + \frac{W_0^2}{H} \frac{\partial}{\partial Z^*} \rho^* W^{*2} \right)$$

$$- \mu \left\{ \frac{W_0}{L^2} \Delta_{\text{hor}}^* W^* + \frac{W_0}{H^2} \frac{\partial^2 W^*}{\partial Z^{*2}} + \right.$$

$$\left. \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial Z^*} \left(\frac{U_0}{L} \nabla_{\text{hor}}^* \cdot \mathbf{v}_{\text{hor}}^* + \frac{W_0}{H} \frac{\partial W^*}{\partial Z^*} \right) \right\} + \frac{P}{H} \frac{\partial p^*}{\partial Z^*} + g Q \rho^* = 0,$$

wobei die durch Q dividierten Maße der Reihe nach die Größenordnungen

$10^{-6}, 10^{-6}, 10^{-6}, 10^{-18}, 10^{-14}, 10^{-14}, 10^{-14}, P 10^{-4}$ und 10 , alle in ms^{-2} ,

haben. Da die Summe der Terme im Rahmen einer *Gleichung* verschwindet, muss der dominante Term der Erdanziehung durch den Druckgradienten ausbalanciert werden, also

$$P \sim 10^5 \text{ Pa} = 10^3 \text{ mb}$$

sein. Dementsprechend lautet die skalenanalytisierte vertikale Komponente der Impulsgleichung in sehr guter Approximation

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial Z} + g = 0. \quad (2.3.1)$$

Wir sehen, dass die so gehandhabte Skalenanalyse eine Art Tiefpassfilter ist, denn

$$\left| \frac{\partial}{\partial Z^*} e^{i n Z^*} \right|, \quad (2.3.2)$$

die Ableitung einer Funktion der Größenordnung 1 nach einer entsprechend skalierten Koordinate, wird durch 1 statt n abgeschätzt, d. h. kleine Skalen werden diskriminiert. Diese 'Art' Tiefpassfilter ist nicht so sauber wie (2.2.15). Insbesondere wirkt sie nur auf Terme, die differenziert werden. Wir werden fortgeschrittene Varianten der Skalenanalyse kennen lernen. Bei (1) sprechen wir von der hydrostatischen Approximation, denn offenbar ist sie auch das Resultat der Bewegungsgleichung unter der Annahme von Windstille.

Dynamische Meteorologie

Eine spektrale Werkstatt

Schmidt, F.

2016, X, 328 S. 150 Abb., 106 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-662-50528-1