



Ein allgegenwärtiges Beispiel für Kräfte ist die Schwerkraft: Sie wirkt auf den vom Baum fallenden Apfel genauso wie auf den Fallschirmspringer, der in der Abbildung dargestellt wird. Bei alleiniger Wirkung der Schwerkraft würde er eine immer größere Geschwindigkeit erhalten und hätte beim Aufprall auf den Erdboden kaum eine Überlebenschance. Der Bewegung wirkt jedoch eine zweite Kraft, der Luftwiderstand, entgegen. Ab einer bestimmten Geschwindigkeit heben sich beide Kräfte auf, so dass die Geschwindigkeit nicht weiter ansteigt. Der Fallschirmspringer kann sicher auf der Erde landen.

Kräfte treten also bei ruhenden und bewegten Körpern auf und können verschiedene Ursachen haben. Weitere Kräftearten sind die Dampfkraft, die magnetische Kraft, die elektrische Kraft oder die Federkraft. Um diese verschiedenartigen Kräfte vergleichen zu können, ist eine allgemeingültige Definition der Kraft erforderlich, die auf Newton zurückgeht.

Grundbegriffe

In diesem Kapitel wird zunächst die *Kraft* auf der Grundlage einer „*Erklärung*“ von Newton definiert. Weitere Themen sind *Flächen- und Volumenkräfte*, die *Lastermittlung* durch *Idealisierung von Kräften*, das *Schnittprinzip*, der *Starrkörper*, der *Freiheitsgrad eines Starrkörpers* sowie *verschiedene Lagerarten*.

2.1 Die Newtonsche Kraft

2.1.1 Der Betrag einer Kraft

Im Alltag, im Berufsleben und im Sport haben wir es häufig mit physikalischen Größen zu tun, die man direkt beobachten oder messen kann. Drei bekannte Beispiele sind die Zeit, die Länge und die Masse, deren internationale SI-Einheiten in Anhang A erläutert werden. Mit dem Begriff Kraft verbindet man häufig die Gewichtskraft, die, wie im Physikunterricht in der Schule, mit einem Kraftmesser ermittelt wird. In der Technik treten weitere Kräftearten wie Magnetkraft, elektrische Kraft oder Federkraft auf, so dass eine allgemeingültige Definition erforderlich wird. Diese geht auf Sir Isaac Newton zurück, die er in seinem Buch *Principia* wie folgt einführt, siehe z.B. [18], S. 638:

„Erklärung

EINE ANGEBRACHTE KRAFT IST DAS GEGEN EINEN KÖRPER AUSGEÜBTE BESTREBEN, SEINEN ZUSTAND ZU ÄNDERN, ENTWEDER DEN DER RUHE ODER DER GLEICHFÖRMIGEN BEWEGUNG.“



Sir Isaac Newton
(1642-1727)

(2.1)

Die *Änderung* des Bewegungszustandes bezieht sich sowohl auf die Beschleunigung als auch auf die Verzögerung. In Abb. 2.1 *beschleunigt* eine Antriebskraft den PKW. Bei alleiniger Wirkung dieser Kraft würde die Geschwindigkeit über alle Grenzen ansteigen. Dieses verhindert die entgegengesetzt gerichtete Windkraft, die den PKW somit *verzögert*.



Abb. 2.1. Antriebskraft und Windkraft beim fahrenden PKW

Man kann eine Kraft also nicht direkt beobachten, sondern nur aus deren *Wirkung auf den Bewegungszustand des Körpers* auf ihre Existenz schließen. Auf der Grundlage der „Erklärung“ (2.1) formuliert Newton in der *Principia* sein zweites Axiom, woraus für eine zeitlich konstante Masse folgende Definition abgeleitet wird, siehe z.B. [15, 23, 38]):

Definition Betrag einer Kraft

(2.2)

$$\text{Kraft} = \text{Masse} \times \text{Beschleunigung} \quad \text{oder} \quad F = m \cdot a.$$

Bemerkungen 2.1

1. In der Definition (2.2) ist m die Masse auf welche die Beschleunigung a einwirkt. Das Symbol F (engl. *force*) kennzeichnet die Kraft. Im Folgenden werden wir für die Kraft auch andere nichtfette lateinische Buchstaben wie z.B. G oder H verwenden.
2. Mit den Einheiten kg für die Masse m eines Körpers und m/s^2 für die Beschleunigung a erhält man die Einheit Newton mit dem Zeichen „N“ einer Kraft F , vgl. Anhang A:

$$[F] = 1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}. \quad (2.3)$$

Somit ist das Newton N eine aus den SI-Einheiten s, m und kg abgeleitete Einheit, und es gilt: *1 N ist die Kraft, die der Masse 1 kg die Beschleunigung 1 m/s² erteilt.*

3. Früher benutzte man das *Pond* als Einheit einer Kraft. Das Tausendfache davon, das Kilopond, entsprach dem Normgewicht der Masse 1 Kilogramm, die in Anhang A definiert ist. Diese Festlegung orientiert sich lediglich an dem Gewicht eines Körpers, jedoch nicht wie in der „Erklärung“ (2.1) von Newton an der *Änderung des Bewegungszustandes*“.

► **Beispiel 2.1** Gewichtskräfte von zwei Kugeln

Zwei Kugeln mit den Massen m_1 und m_2 befinden sich im freien Fall. Die Erdbeschleunigung ist g . Wie groß sind die Gewichtskräfte, die auf die Kugeln wirken.

Bekannt: $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, $m_1 = 1 \text{ kg}$, $m_2 = 5 \text{ kg}$.

Vorüberlegungen: Die Beschleunigung in der Nähe der Erdoberfläche ist unabhängig von den Massen und hat den (nahezu) konstanten Wert g . Für beide Massen können die Gewichtskräfte daher mit Gl.(2.2) berechnet werden.

Lösung: Mit den gegebenen Zahlenwerten folgt aus Gl.(2.2) für beide Massen

$$G_1 = m_1 g = 1 \cdot 9,81 \text{ kg m/s}^2 = 9,81 \text{ N} \approx 10 \text{ N}$$

$$G_2 = m_2 g = 5 \cdot 9,81 \text{ kg m/s}^2 = 49,05 \text{ N} \approx 50 \text{ N}.$$

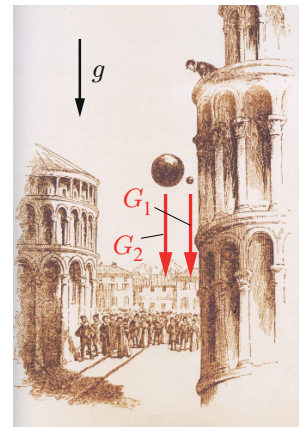


Abb.2.2. Zwei Kugeln im freien Fall

Bemerkung: Im Jahre 1638 hat Galileo Galilei (1564-1642) erkannt, dass alle Körper bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes mit der gleichen Beschleunigung, der *Erdbeschleunigung*, fallen. Damit hat er wesentlich zur Abkehr von der fast 2000 Jahre gültigen Lehre von Aristoteles beigetragen, nach der schwere Massen schneller als leichte Massen fallen. Ob Galilei die Fallversuche vom schiefen Turm von Pisa, wie in Abb. 2.2 dargestellt, tatsächlich durchgeführt hat, ist angesichts der Bedeutung seiner Erkenntnis eher nebensächlich. ◀

2.1.2 Der Kraftvektor

Die Erfahrung zeigt, dass Definition (2.2) zur vollständigen Beschreibung der Wirkung einer Kraft nicht ausreicht. Dies erkennen wir an den verschiedenen Kraftwirkungen auf das Buch in Abb. 2.3, die der Leser mit Hilfe eines Stiftes selbst nachvollziehen möge. Eine senkrecht gerichtete Kraft hat keine Bewegung zur Folge. Greift die Kraft mit gleichem Betrag im gleichen Punkt in Richtung der Diagonalen oder einer Randparallelen an, so ergeben sich jeweils Bewegungen, die sogar unterschiedlich sind. Wie die vierte Darstellung verdeutlicht, hat auch der Angriffspunkt einen Einfluss auf die Bewegung.

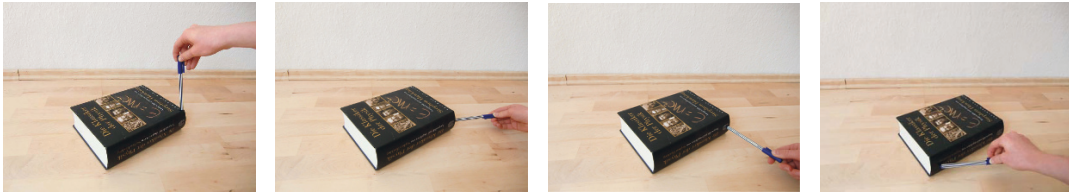


Abb. 2.3. Verschiedene Angriffspunkte und Richtungen einer Kraft an einem Buch

Diese einfachen Experimente erfordern eine Erweiterung von Definition (2.2):

Definition Kraftvektor

Die Einzelkraft ist ein *punktgebundener* Vektor. Ihre Bestimmungsstücke sind (2.4)

1. der Angriffspunkt am Körper
2. die Richtung
3. der Betrag (die Größe).

Bemerkungen 2.2

1. In der graphischen Darstellung in Abb. 2.4 kennzeichnet ein *Pfeil* den Kraftvektor.
2. Der Ort der Kraftwirkung heißt *Angriffspunkt* A der Kraft. Er wird wahlweise durch die Pfeilspitze oder wie in Abb. 2.4 durch den Pfeilanfang des Kraftvektors gekennzeichnet.
3. Die eindeutige Festlegung der *Richtung* des Kraftvektors in der Ebene erfordert zwei Bestimmungsstücke: 1. Den *Richtungswinkel* α , der von einer definierten *Bezugslinie* aus entgegen dem Uhrzeigersinn gemessen wird und 2. den *Richtungssinn*, dargestellt durch die Pfeilspitze. Im Raum sind drei Richtungswinkel notwendig.
4. Die Länge des Pfeiles legt unter Verwendung eines gewählten Maßstabes (z.B. $1\text{ cm} \hat{=} 1\text{ N}$) den in Definition 2.2 eingeführten *Betrag* der Kraft fest.

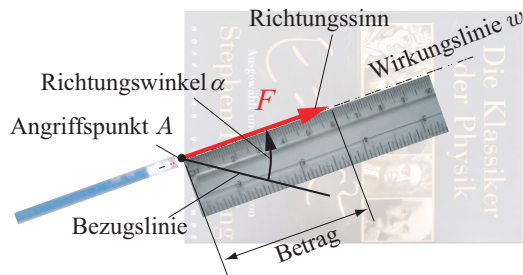


Abb.2.4. Bestimmungsstücke einer Kraft

5. Der Richtungswinkel α und der Angriffspunkt A legen die *Wirkungslinie* w fest.
6. Die mathematische Beschreibung von Kräften geschieht mit den Methoden der Vektorrechnung, deren wichtigste Regeln in Anhang C zusammengefasst sind. Als Symbole für Vektoren dienen fett gedruckte Buchstaben. Damit wird ein Kraftvektor z.B. mit dem Symbol \mathbf{F} gekennzeichnet, für die Gewichtskraft wird häufig das Symbol \mathbf{G} verwendet. In Abb. C.1 sind Vektoren mit verschiedenen Eigenschaften dargestellt.
7. In den vektoriellen Gleichungen sind Vektorsymbole wie z.B. \mathbf{F} oder \mathbf{G} unverzichtbar. In den Abbildungen, in denen die Vektoreigenschaften der Kräfte durch die Darstellung mit einem Pfeil hervorgehen, genügt dagegen die Angabe ihrer Beträge, wie z.B. F oder G . Auch beim textlichen Hinweis auf die Abbildungen ist i.d.R. die Angabe der Beträge ausreichend.

2.1.3 Flächen- und Volumenkräfte

In Abb. 2.5 wird für drei verschiedene Fälle, die der Leser selbst nachvollziehen möge, mit einem Buch und einem weiteren Körper eine Kraft an der Berührungstelle beider Körper übertragen. Dabei wird im Fall a die Berührfläche durch die Größe einer Vasenunterseite festgelegt. In den Fällen b und c definieren die Kontaktbereiche zwischen dem Buch und einem Zeichendreieck bzw. einem Zeichenstift die Berührflächen. Obwohl die Fläche im Fall c im Vergleich zur Oberfläche des Buches sehr klein ist, hat sie einen endlichen Wert.

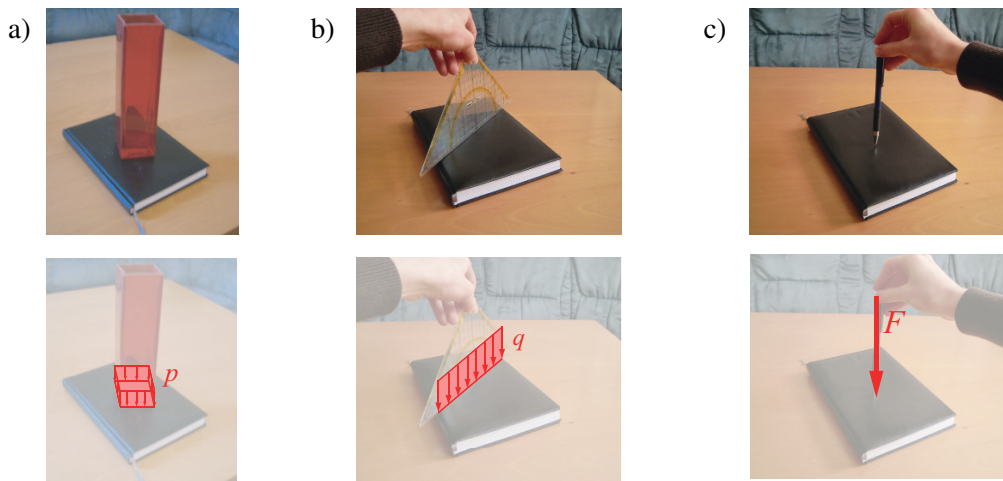


Abb. 2.5. Flächenkräfte und deren Idealisierungen a) Flächenkraft, b) Streckenkraft, c) Einzelkraft. Oben: Reale Systeme, unten: Idealisierte Kräfte

Die bisherigen Darstellungen zur Einzelkraft als Vektor stellen eine Vereinfachung (oder: *Idealisierung*) dar. Zusammenfassend gelten folgende

Regeln zu Kräften in der Natur

1. Einzelkräfte existieren in der Natur nicht. Sie sind eine Idealisierung. (2.5)
2. Es treten zwei Kräftearten auf: *Flächenkräfte* und *Volumenkräfte*.

Flächenkräfte treten in der Berührfläche zweier Körper auf, wie z.B. der Vase und dem Buch in Abb. 2.5.a. Drei technische Beispiele mit Flächenkräften von *Fluiden* sind in Abb. 2.6 dargestellt. Dabei treffen wir jeweils die Annahme, dass die *Kraftrichtungen senkrecht* zur Berührfläche sind. Für den Kolben eines Verbrennungsmotors in Abb. 2.6.a nehmen wir einen *konstanten Luftdruck* mit dem Symbol p an. Der *Wasserdruck* p auf die Stauwand ist *linear veränderlich* bei *konstanter Richtung* entlang der geraden Fläche in Abb. 2.6.b und *nichtlinear veränderlich* bei *veränderlicher Richtung* entlang der gekrümmten Fläche in Abb. 2.6.c. Weitere Beispiele für Flächenkräfte sind die *Schneelast* und die *Windlast* auf einem Gebäude, wobei noch zwischen *Winddruck* und *Windsog* unterschieden wird, siehe z.B. [31]. *Tangential gerichtete Flächenkräfte* treten z.B. an Wandungen infolge von Strömungen auf.

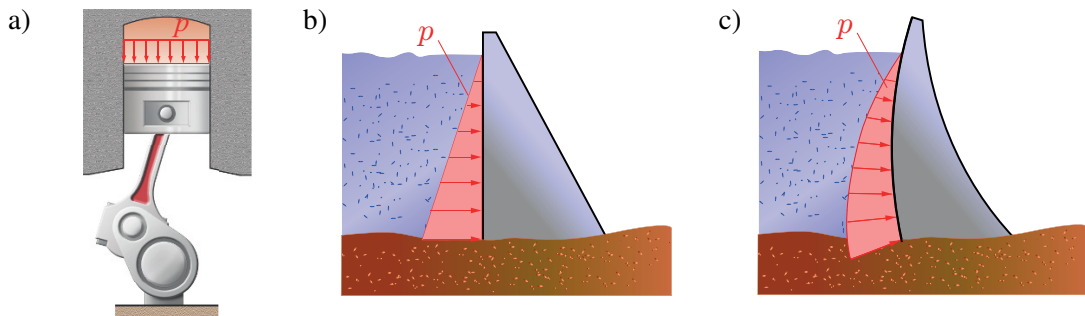


Abb. 2.6. Flächenkräfte: a) Luftdruck auf Kolben eines Verbrennungsmotors, b) und c) Wasserdruck auf Stauwand mit gerader und gekrümmter Fläche

Der Zusammenhang zwischen einer Flächenkraft p und ihrer Einzelkraft F ist im allgemeinen Fall mathematisch kompliziert und wird daher in Kapitel 8 über Schwerpunkte gesondert behandelt. Für den einfachen Fall mit über einer Fläche A konstanter Flächenkraft p , wie in Abb. 2.7 dargestellt, gilt

$$1. \quad p = \frac{F}{A} \quad \Longleftrightarrow \quad 2. \quad F = p \cdot A. \quad (2.6)$$

Aus Gl.(2.6.1) folgt: Die physikalische Größe *Kraft durch Fläche* mit dem Symbol p hat die Einheit $[p] = 1 \text{ N/m}^2$.

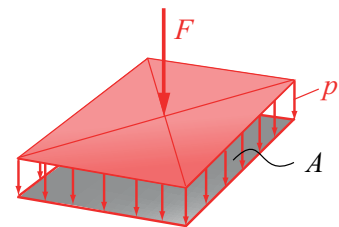


Abb.2.7. Konstante Flächenkraft p und zugehörige Einzelkraft F

Volumenkräfte sind über das Volumen eines Körpers verteilt, wofür die Gewichtskraft ein allgegenwärtiges Beispiel ist. Wie z.B. in Abb. 2.8.a für einen Betonkübel dargestellt, hat jedes noch so kleine Volumenelement dV eine Schwerkraft $dG = \rho dV$ mit der Volumendichte des Materials ρ . Dabei gilt: Die physikalische Größe *Kraft durch Volumen* mit dem Symbol ρ hat die Einheit $[\rho] = 1 \text{ N/m}^3$. Im allgemeinen ist ρ an jedem Ort des Körpers unterschiedlich. Zwei weitere Beispiele für Gewichtskräfte sind in Abb. 2.8.b das Eigengewicht eines Tragflügels mit Turbine und in Abb. 2.8.c. das Eigengewicht eines Balkons mit einer Person. Weitere Beispiele für Volumenkräfte sind die *Magnetkraft* und die *elektrische Kraft*.

2.1.4 Lastermittlung für Ingenieurkonstruktionen

Die auf eine Ingenieurkonstruktion einwirkenden Kräfte bestimmt deren sogenannte *Belastung*. Entsprechend der Einteilung des vorherigen Abschnittes unterscheidet man *Einzel-*,

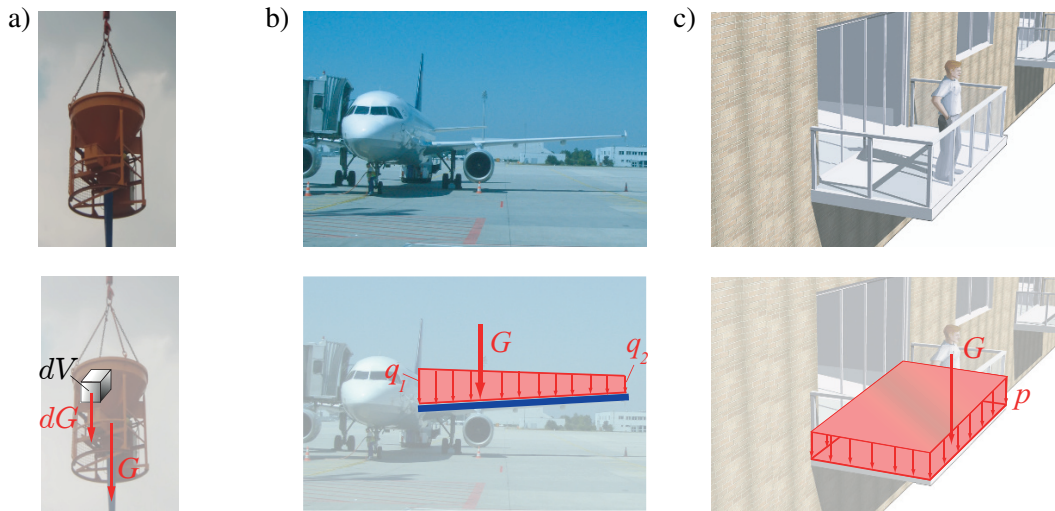


Abb. 2.8. Volumenkräfte und deren Idealisierungen: a) Betonkübel mit Einzelkraft, b) Tragflügel eines Flugzeuges mit Strecken- und Einzelkraft, c) Balkon mit Person mit Flächen- und Einzelkraft, Oben: Reale Systeme, unten: Idealisierte Kräfte

Flächen- und Volumenlasten. Zusätzlich erweist sich die *Streckenlast* als nützliche Rechengröße. Da die *Lastermittlung* dieser Kräftearten im Allgemeinen nicht exakt möglich ist, wird eine *Idealisierung* (oder: Abstraktion) erforderlich. Hierbei handelt es sich um eine Vereinfachung der realen physikalischen Vorgänge auf das Wesentliche nach dem Grundsatz:

möglichst einfach und genügend genau.

Einige Beispiele sollen die Idealisierungen von Kräften veranschaulichen: Für das Buch in Abb. 2.5.a (unten) nehmen wir an, dass sich die Gewichtskraft der Vase gleichmäßig in der Berührzone verteilt und die zugehörige *Flächenlast* p einen *konstanten* Wert annimmt. In Abb. 2.5.b (unten) wird die kurze Seite in der Berührfläche als vernachlässigbar klein angenommen, so dass eine *Streckenlast* (oder: *Linienlast*, *Schneidenlast*) entsteht. Die physikalische Größe *Kraft durch Länge* mit dem Symbol q hat die Einheit $[q] = 1 \text{ N/m}$. Als weitere Vereinfachung können wir häufig einen konstanten Wert für q annehmen. Erst wenn die Berührfläche im Vergleich zur Gesamtfläche des Buches vernachlässigbar klein wird, ist die Annahme einer *Einzellast* genügend genau, vgl. Abb. 2.5.c (unten).

In Abb. 2.8.a (unten) werden die unendlich vielen, kontinuierlich verteilten Differenzialkräfte dG in Abb. 2.8.a (oben) durch eine *Einzellast* G ersetzt. Bei dem Tragflügel in Abb. 2.8.b wird das Eigengewicht über die Tragflügelänge als *Streckenlast* mit unterschiedlichen Randwerten q_1 und q_2 angenommen. Das Gewicht der Turbine wird durch eine zusätzliche Einzellast G berücksichtigt. Bei dem Balkon in Abb. 2.8.c wird das Eigengewicht der Betonplatte als *Flächenlast* mit dem konstanten Wert p angenommen. Das Gewicht der Person wird durch eine zusätzliche Einzellast G berücksichtigt. Außer den Regeln (2.5) sollte sich der Ingenieur folgende Regel einprägen:

Regel zur Lastermittlung: Einzel- und Streckenlasten

(2.7)

sind Idealisierungen, d.h. Vereinfachungen, von realen Belastungen.

► Beispiel 2.2 Streckenlast auf Dachbinder

Die Dachbinder einer Dachkonstruktion werden wie dargestellt durch Dachhaut, Sparrenpfetten, Schnee und Eigengewicht belastet. Der Abstand der Binder beträgt $a = 8$ m. Wie groß ist für jeden Binder die Streckenlast q ?

Bekannt: Eigengewicht (EG) der Dachhaut: $g_{Da} = 0,5 \text{ kN/m}^2$. Das Eigengewicht von Sparrenpfetten und Aussteifungsverband wird vereinfacht mit $g_{Sp} = 0,1 \text{ kN/m}^2$ berücksichtigt. Belastung durch Schnee: $s = 0,7 \text{ kN/m}^2$. Eigengewicht Dachbinder: $g_B = 0,15 \text{ kN/m}$.

Vorüberlegungen: Zunächst wird die Auflast infolge Dachhaut, Sparrenpfetten und Schnee als Flächenlast (in kN/m^2) berechnet. Durch Multiplikation mit dem Abstand a der Binder und Berücksichtigung des Eigengewichtes erhält man für jeden Dachbinder als Auflast die idealisierte, als *konstant* angenommene Streckenlast mit der Einheit kN/m .

Lösung: Wir fassen zunächst die Auflasten als Flächenlast zusammen:

EG Dachhaut	$g_{Da} = 0,5 \text{ kN/m}^2$
EG Sparrenpfetten	$g_{Sp} = 0,1 \text{ kN/m}^2$
Schnee	$s = 0,7 \text{ kN/m}^2$
Summe Auflasten	$g = 1,3 \text{ kN/m}^2$

Die Auflast als Streckenlast beträgt je Binder

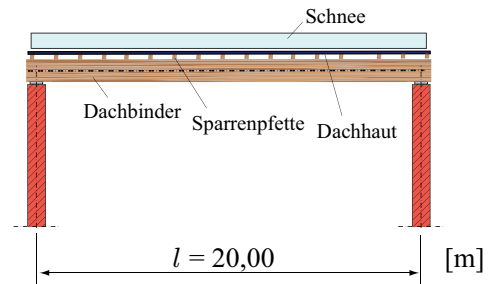
$$q_A = 1,3 \text{ kN/m}^2 \cdot 8,00 \text{ m} = 10,40 \text{ kN/m}.$$

Unter Berücksichtigung des Eigengewichtes g_B beträgt die gesamte Streckenlast je Binder

Summe Auflasten	$q_A = 10,40 \text{ kN/m}$
EG Binder	$g_B = 0,15 \text{ kN/m}$
Belastung Binder	$q = 10,55 \text{ kN/m}$

In Abb.2.9.b ist die Streckenlast q je Dachbinder dargestellt. Es sei nochmals hervorgehoben, dass diese gemäß Regel (2.7) eine Idealisierung der wirklichen Belastung ist. Sie stellt jedoch eine einfache und genügend genaue Annahme dar, um mit den Methoden der Festigkeitslehre die Materialbeanspruchung im Inneren des Dachbinders berechnen zu können [22]. ◀

Gebäudequerschnitt



Dachgrundriss

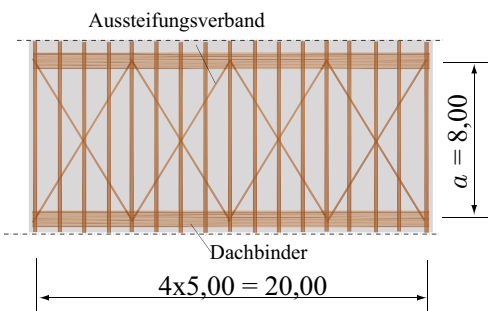


Abb.2.9. Dachbinder mit Belastungen

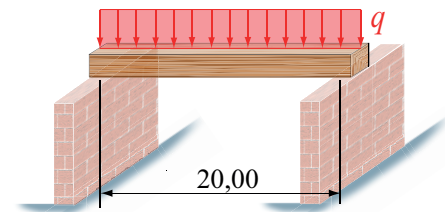


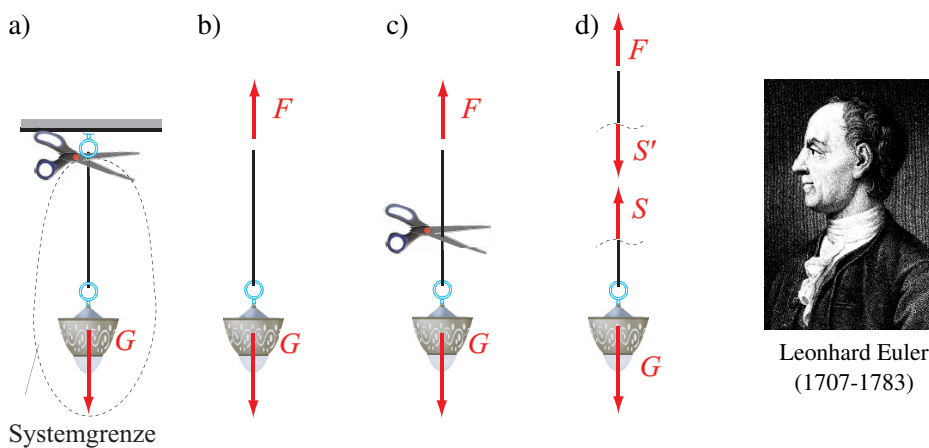
Abb.2.9.b. Idealisierte konstante Streckenlast je Dachbinder

2.1.5 Freischneiden und Freikörperbild

Wir betrachten in Abb. 2.10 und Abb. 2.11 zwei durch Eigengewicht beanspruchte Systeme. Die Gewichtskraft G der Lampe in Abb. 2.10 beansprucht die Ringschraube, welche die kinematische Bindung zur Decke – also die Lagerung – herstellt. Außerdem wird das die Lampe tragende Seil auf seiner gesamten Länge beansprucht. Kommt es zum Versagen eines dieser Teilkörper, fällt die Lampe zum Boden. In Abb. 2.11 entstehen infolge der Gewichtskraft G der Brücke und den Verkehrslasten G_1, G_2, G_3 Kräfte an den Auflagern A und B . Zusätzlich entstehen Kräfte im Inneren der Brücke, wie z.B. Zugkräfte innerhalb der Vertikalen zwischen Ober- und Untergurt, vgl. auch Kapitel 10. Infolge der Wirkung von äußeren Lasten entstehen also immer zwei Kräftearten: 1. *Kräfte an den Auflagern des Systems* und 2. *Kräfte im Inneren des Systems*. Im Folgenden wird der Zugang zu beiden Kräftearten erläutert.

Kräfte an den Auflagern eines Systems: Um die Beanspruchungen an Auflagern einer Berechnung zugänglich zu machen, werden zwei Schritte durchgeführt:

1. **Eintragen einer Systemgrenze:** Das System, dass der Berechnung zu Grunde gelegt werden soll, wird von der Umgebung *abgegrenzt*. Dazu wird, wie in Abb. 2.10 oder in Abb. 2.11, eine geschlossene Linie – *die Systemgrenze* – mit einem Stift in die Zeichnung der realen Struktur eingetragen.
2. **Zeichnen des Freikörperbildes:** Es wird eine Skizze – *das Freikörperbild* (oder: Freischnitt) – mit allen an dem abgegrenzten System angreifenden Kräften erstellt. Diese bestehen aus zwei Anteilen:
 - 1) *Eingeprägte Kräfte:* Hier handelt es sich um *vorgegebene* Kräfte mit physikalischer Ursache, was kurz als *Belastung* bezeichnet wird. Ein allgegenwärtiges Beispiel ist die Gewichtskraft, deren Ursache die Gravitation ist. Sie wird in Abb. 2.10 und in Abb. 2.11 jeweils mit G bezeichnet. Andere Beispiele für eingeprägte Kräfte sind Winddruck, Schneelasten oder Magnetkräfte.
 - 2) *Reaktionskräfte:* Hier handelt es sich um Kräfte, die durch die Einschränkung der Bewegungsmöglichkeiten des Systems verursacht werden. Sie werden durch das so-



Leonhard Euler
(1707-1783)

Abb. 2.10. Freischneiden einer durch Eigengewicht belasteten Lampe: a) Ausgangssystem mit Schnitt an der Systemgrenze, b) Freikörperbild des abgegrenzten Systems, c) innerer Schnitt, d) Freikörperbild der Teilsysteme

genannte *Freischneiden der Auflagerkräfte* sichtbar gemacht: Dazu wird der Körper an seinen Bindungen entlang der Systemgrenze gedanklich geschnitten, und anschließend werden die auf den Körper wirkenden unbekannten *Reaktionskräfte* (oder: *Lagerkräfte*, *Bindungskräfte*) als äußere Kräfte eingetragen. Als Beispiel wird in Abb. 2.10.b das Seil von der Ringschraube gelöst und mit der Kraft F belastet. In Abb. 2.11.b wird die Brücke von den Auflagern gelöst und mit den Kräften A_V , A_H und B_V belastet.

Kräfte im Inneren eines Systems: Der Zugang zur Beanspruchung an einer beliebigen Stelle im Inneren des Systems erfolgt durch *Freischneiden der inneren Kräfte*, was als *Eulersches* (oder: *Euler/Lagrangesches*) *Schnittprinzip* bekannt ist: Dabei wird der Körper an der betreffenden Stelle innerlich gedanklich geschnitten, wie z.B. in Abb. 2.10.c. An *beiden* dadurch freigewordenen Schnittufern werden innere Kräfte eingetragen. Wie in Abb. 2.10.d für die Kräfte S und S' erkennbar, sind im Unterschied zu Reaktionskräften innere Kräfte also *immer paarweise* einzutragen. (Später werden wir sehen, dass sie entgegengesetzt gerichtet gleich groß sind.) Die so entstandene Skizze mit eingetragenen Kräften, Reaktionskräften und inneren Kräften in Abb. 2.10.d bezeichnet man als *Freikörperbild der Teilsysteme*.

Bemerkungen 2.3

1. Die Unterteilung in äußere und innere Kräfte ist relativ, da diese von der Wahl der Systemgrenze abhängen. Führen wir z.B. in Abb. 2.11 eine Systemgrenze 1 zur Berechnung des Brückenaufbaus ein, so sind die durch die Schnitte freigelegten Lagerkräfte A_V , A_H , B_V äußere Kräfte. Mit der Systemgrenze 2 werden dagegen der Brückenaufbau und beide Fundamente als System betrachtet, so dass die durch die Schnitte freigelegten Kräfte A_V , A'_V , A_H , A'_H , B_V , B'_V zwischen den Bauteilen innere Kräfte sind.
2. Durch das Freischneiden an den Lagern oder im Inneren des Systems werden die so entstandenen Teilsysteme verschieblich. Um sie einer Berechnung mit den Gleichgewichtsmethoden der nachfolgenden Kapitel zugänglich zu machen, denkt man sie sich in der gegebenen Lage als „erstarrt“ (*Erstarrungsprinzip*).
3. Innere Kräfte haben große Bedeutung in der Statik, da sie ein Maß für die Materialbeanspruchung sind. Die Berechnung von inneren Kräften wird ausführlich im späteren Kapitel 12 über *Schnittgrößen* behandelt.

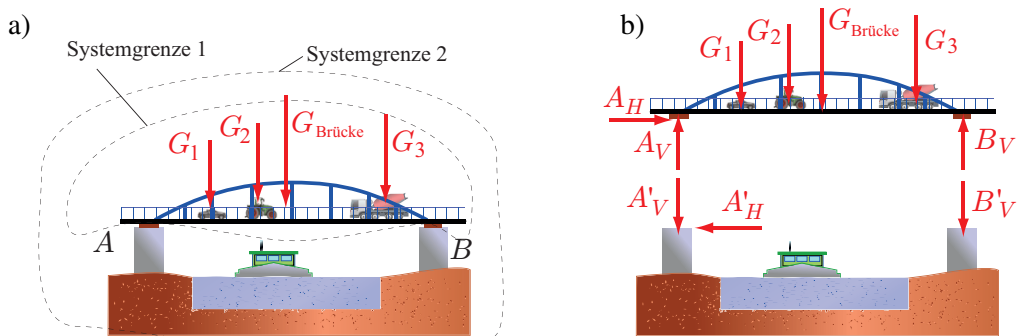


Abb. 2.11. Freischneiden einer mit Gewichtskräften belasteten Brücke: a) Ausgangssystem mit Systemgrenzen 1 und 2, b) Freikörperbild mit Gewichtskräften und Kräften an den Auflagern

2.1.6 Einteilung von Kräften

Je nachdem, welches *Klassifikationsmerkmal* zu Grunde gelegt wird, können wir folgende Einteilungen von Kräften vornehmen, siehe z.B. [33]:

Merkmal Dimension

- a) *Volumenkräfte*, z.B. Gewicht
- b) *Flächenkräfte*, z.B. Wasserdruck auf Staumauer
- c) *Linienkräfte* (oder: Streckenlasten), z.B. Schneidenlast (Idealisierung)
- d) *Einzelkräfte*, z.B. Nageldruck (Idealisierung).

Merkmal Herkunft

- a) *Eingeprägte Kräfte*: Vorgegebene Kräfte mit physikalischer Ursache (*Belastung*), z.B. Gewichts-, Wind- oder Magnetkräfte.
- b) *Reaktionskräfte*: ergeben sich durch Einschränkung der Bewegungsmöglichkeiten, z.B. Auflagerkräfte (in der Statik) oder Führungskräfte (in der Dynamik).

Merkmal System

- a) *Äußere Kräfte*: Belastungen auf das System und Reaktionskräfte an der Systemgrenze
- b) *Innere Kräfte*: Kräfte, die im Inneren eines Systems mit dem Schnittprinzip sichtbar gemacht werden.

Merkmal Berührung zweier Körper

- a) *Nahkräfte*: Treten in der Berührung zweier Körper auf
- b) *Fernkräfte*: Hierbei haben die Körper keinen Kontakt. Beispiele für Fernkräfte sind die Gravitationskraft zwischen zwei Massen oder die Coulombsche Kraft zwischen zwei Ladungen, siehe hierzu Kapitel 3.

Beispiel 1: Die Gewichtskraft einer Brücke ist gleichzeitig eine Volumenkraft, da sie über das Körpervolumen verteilt ist, eine eingeprägte Kraft, da sie eine physikalische Ursache, nämlich die Gravitation hat, eine äußere Kraft, weil sie von außen auf den Körper einwirkt und eine Fernkraft, da sie durch Massenanziehung wirkt.

Beispiel 2: Die Lagerkraft an einem Brückenlager ist gleichzeitig eine Flächenkraft, da sie in der Berührfläche zwischen Brückenaufbau und Lager verteilt ist, eine Reaktionskraft, da sie durch Einschränkung der Bewegungsmöglichkeit entsteht, eine äußere Kraft, weil sie von außen auf den Brückenaufbau einwirkt und eine Nahkraft, da sie in der Berührfläche zwischen Brückenaufbau und Lager wirkt.

Eine Gruppe von Kräften nennt man ein *Kraftsystem* (oder: *Kräftesystem*). Zur Analyse von Kraftsystemen sind folgende Unterscheidungen zweckmäßig:

Merkmal Dimension des Kraftsystems

- a) *Ebenes Kraftsystem*: Alle Kraftvektoren liegen in ein und derselben Ebene. Das ebene Kraftsystem wird ausführlich in Kapitel 4 behandelt.
- b) *Räumliches Kraftsystem*: Alle Kraftvektoren liegen irgendwie im Raum. Hierauf wird ausführlich in Kapitel 6 eingegangen.

Merkmal Wirkungslinien des Kraftsystems

Werden Kräfte entlang ihrer Wirkungslinie verschoben, ohne dass sich dabei die Kräftewirkung auf den oder die Körper verändert, ist folgende Unterscheidung zweckmäßig:

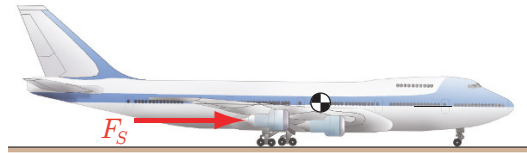
- Zentrales Kraftsystem*: Es existiert ein gemeinsamer Schnittpunkt der Wirkungslinien aller Kräfte, siehe hierzu Kapitel 4.
- Nichtzentrales Kraftsystem*: Es existiert kein gemeinsamer Schnittpunkt der Wirkungslinien aller Kräfte, siehe hierzu Kapitel 5.

2.1.7 Aufgaben zu Abschnitt 2.1

Aufgabe 2.1 (Schwierigkeitsgrad SG = 1, Bearbeitungszeit BZ = 3 min)

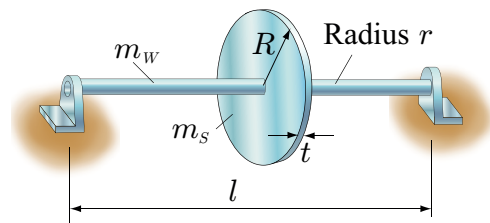
Ein Flugzeug der Masse m erfährt in der Startphase die Beschleunigung a . Wie groß ist die Schubkraft F_S ?

Bekannt: $m = 250 \text{ t}$, $a = 10 \text{ m/s}^2$.



Aufgabe 2.2 (SG = 1, BZ = 10 min)

Eine Welle der Länge l hat eine Rotorachse mit Radius r . Die Dichte des Materials ist ρ_W . Zusätzlich ist eine Scheibe mit dem Radius R und der Dicke t angebracht.

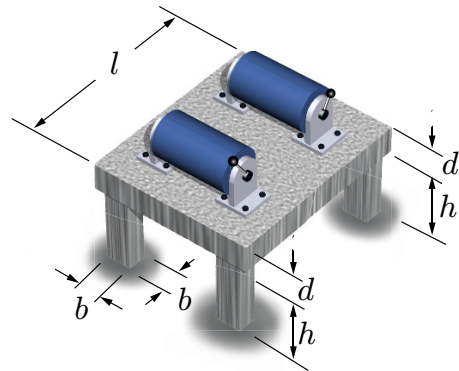


- Erstellen Sie ein Belastungsbild für die Welle, wobei die Belastung der Scheibe als Einzellast F_S und die Belastung der Welle als Streckenlast q_W angenommen werden kann.
- Berechnen Sie F_S und q_W .

Bekannt: Welle (durchgehend): $l = 6,0 \text{ m}$, $r = 5,0 \text{ cm}$, Dichte $\rho_W = 3,0 \text{ kg/cm}^3$, Scheibe: $R = 60,0 \text{ cm}$, $t = 5,0 \text{ cm}$, Dichte $\rho_S = 4,0 \text{ kg/cm}^3$.

Aufgabe 2.3 (SG = 2, BZ = 10 min)

Ein Rahmen besteht aus einer Platte und vier Riegeln mit quadratischen Querschnittsflächen. Auf der Platte sind zwei Motoren mit jeweils der Masse m_M angebracht. Wie groß ist die Flächenlast unter jedem Riegel? Welche Annahmen liegen der Berechnung zu Grunde?

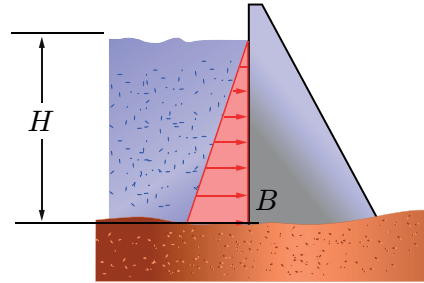


Bekannt: Platte: $l = 5 \text{ m}$, $d = 30 \text{ cm}$, Wichte $\gamma_P = 21 \text{ kN/m}^3$, Riegel: $h = 2,50 \text{ m}$, $b = 0,3 \text{ m}$, Wichte $\gamma_S = 28 \text{ kN/m}^3$, je Motor: $m_M = 500 \text{ kg}$.

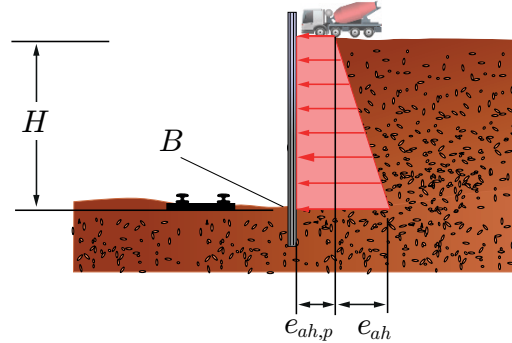
Aufgabe 2.4 (SG = 1, BZ = 3 min)

Für eine durch Wasser belastete Staumauer wird eine geradlinige Zunahme des Wasserdruckes angenommen. Wie groß ist die Flächenlast (Flächenpressung) p auf die Staumauer an der Stelle B ?

Bekannt: $H = 30$ m, Massendichte von Wasser $\rho_W = 1000$ kg/m³.

**Aufgabe 2.5** (SG = 2, BZ = 10 min)

Für eine durch Erdrreich belastete Stützwand einer Baugrube wird für die Lastermittlung eine geradlinige Zunahme des Erddruckes nach $e_{ah} = \gamma \cdot H \cdot K_{ah}$ angenommen. Dabei ist γ die Wichte des feuchten Bodens in kN/m³, und K_{ah} ist ein Erddruckbeiwert zur Berücksichtigung der inneren Reibung des Bodens, s. z.B. [31]. Durch den neben der Stützwand abgestellten LKW entsteht eine zusätzliche Verkehrslast p' , deren Belastung auf die Stützwand vereinfachend mit $e_{ah,p} = p' \cdot K_{ah}$ über die Höhe konstant verteilt, angenommen wird.



Wie groß ist die Flächenlast (Erddruck) $e_{ges} = e_{ah} + e_{ah,p}$ auf die Stützwand an der Stelle B ?

Bekannt: $H = 30$ m, Wichte (nichtbindiger Boden, Sand, locker, rund) $\gamma = 18$ kN/m³, Erddruckbeiwert $K_{ah} = 0,28$, $p' = 143$ kN/m², siehe z.B. [31].

Aufgabe 2.6 (SG = 1, BZ = 15 min)

Die Dachkonstruktion aus Beispiel 2.2 wird zusätzlich durch Wind belastet. Bestimmen Sie die gesamten Streckenlasten für jeden Dachbinder für die Lastfälle

1. Winddruck w_D und
2. Windsog w_S .

Bekannt: Abstand der Binder $a=8$ m, Eigengewicht (EG) Dachhaut: $g_{Da} = 0,5$ kN/m², EG Sparrenpfetten und Aussteifungsverband $g_{Sp} = 0,1$ kN/m², Schneebelastung: $s = 0,7$ kN/m², EG Dachbinder: $g_B = 0,15$ kN/m, Winddruck: $w_D = 0,45$ kN/m², Windsog: $w_S = 0,35$ kN/m². Winddruck und Windsog wirken jeweils senkrecht zur Dachfläche.

Aufgabe 2.7 (SG = 1, BZ = 5 min)

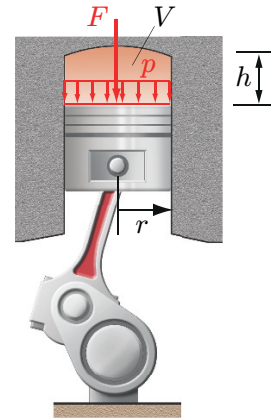
Für den Kolben eines Verbrennungsmotors soll der Druck des Gases p abgeschätzt werden. Dazu wird näherungsweise die *allgemeine Gasgleichung*

$$pV = Tk$$

verwendet [15, 8]. Hierbei sind T die Temperatur, V das Volumen, und k ist eine Konstante. Das Volumen V wird als Zylinder angenähert.

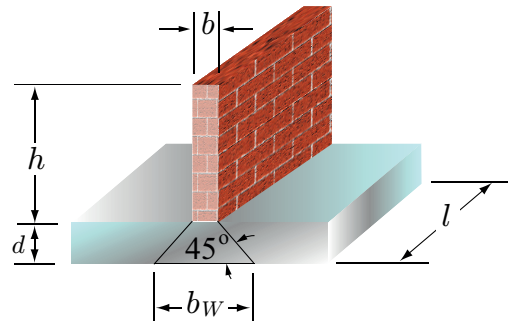
1. Welchen Wert hat p für die gegebenen Zahlenwerte?
2. Wie groß ist dann die Gesamtkraft F ?

Bekannt: $T = 1700\text{ }^{\circ}\text{C}$, $k = 0,5\text{ kg m}^2/(\text{s}^2\text{K})$, $r = h = 3\text{ cm}$.

**Aufgabe 2.8** (SG = 2, BZ = 15 min)

Ein Mauerwerk der Länge l , der Höhe h und der Breite b belastet ein Fundament aus Stahlbeton.

1. Welche Flächenlast entsteht in der Fläche zwischen Mauerwerk und Fundament infolge Eigengewicht?
2. Welche Flächenlast (*Bodenpressung*) entsteht in der Fläche zwischen Fundament und Erdreich, wenn die mitwirkende Breite b_W wie dargestellt unter einem Winkel von 45° angenommen wird?



Bekannt: Mauerwerk: Rohdichte $\rho_M = 2,0\text{ g/cm}^3$ (s. z.B. [31]), $l = 3\text{ m}$, $h = 2\text{ m}$, $b = 0,24\text{ m}$, Stahlbeton: Rohdichte $\rho_B = 1,6\text{ g/cm}^3$, $d = 0,2\text{ m}$.

2.2 Der Starrkörper

Im Allgemeinen sind reale Körper deformierbar. Kommt es z.B. für den PKW in Abb. 2.12.a zum Aufprall auf ein Hindernis, so verändert sich der Abstand zweier beliebiger Punkte in dem Aufprallbereich erheblich. Für die Billiardkugel in Abb. 2.12.b dagegen ist die Abstandsänderung von zwei Punkten A und B beim Aufprall unwesentlich. Sie ist eine gute Näherung für die

Definition Starrkörper

Ein Körper, der sich unter der Wirkung von Kräften nicht verformt, wird *Starrkörper* genannt. In ihm sind die Abstände beliebiger Punkte immer gleich. (2.8)

In der Wirklichkeit gibt es den Starrkörper (oder: *starren Körper*) nicht, so dass Definition (2.8) eine Idealisierung ist. Im Ingenieurwesen sind die Deformationen der Körper im Vergleich zu deren Abmessungen jedoch häufig so klein, dass wir sie mit guter Näherung vernachlässigen können. Man bezeichnet sie daher auch als *Quasi-Starrkörper*. In einigen Fällen, wie z.B. bei der Berechnung einer Rahmenkonstruktion, ist die Deformation zu berücksichtigen, was jedoch nicht Thema dieses Buches ist.

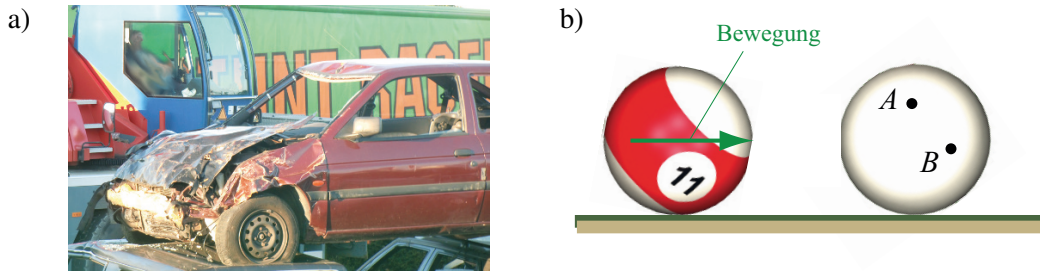


Abb. 2.12. a) PKW als deformierbarer Körper, b) zwei Billiardkugeln als Quasi-Starrkörper

2.3 Die Freiheitsgrade des freien Körpers

Wir bezeichnen einen Körper ohne kinematische Bindungen als *freien Körper*. Er kann eine *Bewegung* (genauer: Starrkörperbewegung) vornehmen, womit die Lageänderung gegenüber anderen Körpern gemeint ist. Wir wählen dazu die Erde als ruhendes Bezugssystem.

Abb. 2.13 zeigt ein Buch als *freien Körper in der Ebene*. Wir können es durch

1. eine horizontale Verschiebung u in die Lage A oder
2. eine vertikale Verschiebung v in die Lage B oder
3. eine Verdrehung φ in die Lage C überführen.

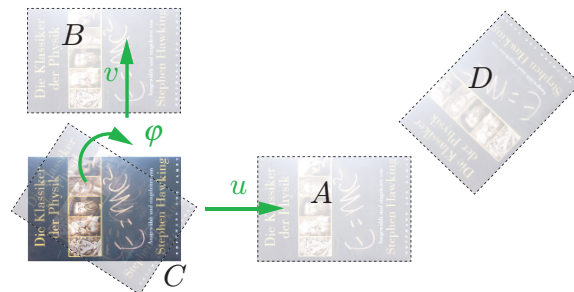


Abb. 2.13. Bewegungen eines Körpers in der Ebene

Durch Vielfaches der Verschiebungen u und v kann die gedrehte Lage C nicht erreicht werden, jedoch kann man durch Vielfaches der Bewegungen u , v und φ die Lage D und jede weitere Lage in der Ebene erreichen. Damit gibt es für einen Körper in der Ebene *drei unabhängige Bewegungen*, um dessen Lage eindeutig festzulegen. Allgemein bezeichnet man die Anzahl der voneinander unabhängigen Koordinaten (z.B. u , v , φ) zur eindeutigen Festlegung der Lage eines Starrkörpers oder Starrkörpersystems als *Freiheitsgrade*. Es gelten folgende

Regeln zu Freiheitsgraden des freien Körpers

1. In der Ebene hat ein freier Körper genau 3 unabhängige Freiheitsgrade: zwei Verschiebungen und eine Verdrehung. (2.9)
2. Im Raum hat ein freier Körper genau 6 unabhängige Freiheitsgrade: drei Verschiebungen und drei Verdrehungen.

2.4 Lager- und Reaktionskräfte

2.4.1 Allgemeines

In vielen Fällen wird die Bewegungsmöglichkeit von Körpern durch Kontakt oder Verbund mit anderen Körpern behindert. Man bezeichnet derartige kinematischen Bindungen [6]

- in der Statik als *Auflager* (Lager, Stütze, ...) und
- in der Dynamik als *Führungen* (Lager, Gleitband, Schiene ...).

Zwei Beispiele für kinematische Bindungen (kurz: Lager) sind in Abb. 2.14 das sogenannte *Loslager* einer Brücke und die Trasse einer Magnetschnellbahn. Die zwei Mauerwerke in Abb. 2.15 sichern z.B. eine Stützung des Dachbinders in vertikaler Richtung. Nach Regel (2.9.1) beträgt die maximale Anzahl der unabhängigen Freiheitsgrade für einen Körper in der Ebene jedoch 3. Um ein Abgleiten des Dachbinders in horizontaler Richtung zu verhindern, ist also eine dritte Halterung notwendig, die z.B. durch einen Anker realisiert wird. Kennzeichnen wir mit r die *Anzahl der kinematischen Bindungen* (oder: Wertigkeiten der Auflager) und mit n_f die *Anzahl der Freiheitsgrade des gebundenen Körpers*, so gilt für einen Körper in der Ebene $n_f = 3 - r$. Damit folgt auch der Zusammenhang $n_f + r = 3$. Für einen Körper im Raum gilt entsprechend $n_f = 6 - r$ bzw. $n_f + r = 6$. Für einen freien Körper in der Ebene gilt $r = 0$ und somit $n_f = 3$ (im Raum $n_f = 6$).

Kinematische Bindungen haben zusätzliche Kraftwirkungen auf den gestützten Körper zur Folge. Man bezeichnet derartige Kräfte

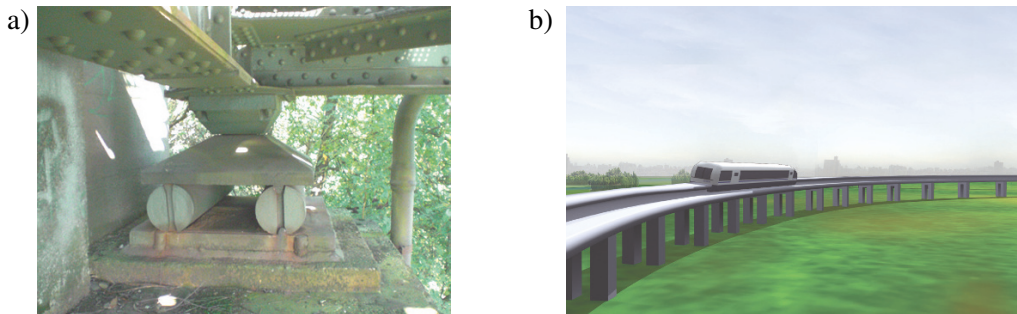


Abb. 2.14. Beispiele für kinematische Bindungen: a) Loslager einer Brücke, b) Trasse einer Magnetschnellbahn

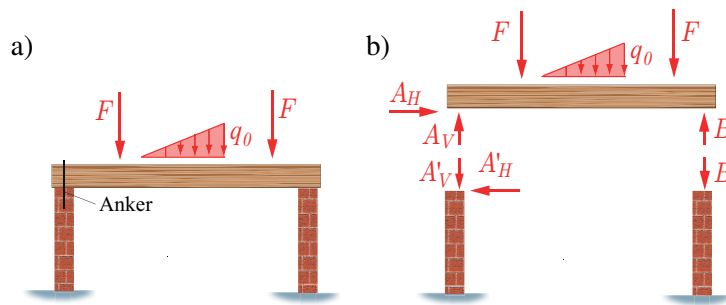


Abb. 2.15. Dachbinder auf Mauerwerk: a) System mit Belastung, b) Lagerreaktionen im Freikörperbild

- in der Statik als *Auflager-* (Lager-, Stütz-, Reaktions-, ...) *kräfte* und
- in der Dynamik als *Führungs-* (Lager-, Gleitband-, Schienen-, Reaktions-, ...) *kräfte*.

Für den Dachbinder auf Mauerwerk in Abb. 2.15 erhält man nach dem Eulerschen Schnittprinzip in Abschnitt 2.1.5 die vertikalen Reaktionskräfte A_V, B_V und eine horizontale Reaktionskraft A_H . Die auf die Mauerwerke entgegengesetzt wirkenden Kräfte werden mit A'_V, B'_V und A'_H bezeichnet. Ein *freier Körper* hat wegen $r = 0$ keine wechselseitige Kraftwirkungen mit der Umgebung. Zusammenfassend gelten folgende

Regeln zu kinematischen Bindungen

1. Für die Summe der Freiheitsgrade n_f und der kinematischen Bindungen r eines gestützten Körpers gilt

$$\begin{aligned} \text{a) in der Ebene: } n_f + r &= 3 \\ \text{b) im Raum: } n_f + r &= 6. \end{aligned} \quad (2.10)$$

2. Ein Lager übt unabhängige Reaktionskräfte (Lagerkräfte) auf den gestützten Körper aus, deren Anzahl gleich der Anzahl r der unabhängigen kinematischen Bindungen (Wertigkeiten der Auflager) ist.

Es sei bemerkt, dass es sogenannte *Ausnahmefälle* zu den Regeln (2.10.1) gibt. Damit sind diese Regeln nicht hinreichend zur Bewertung von gestützten Systemen, worauf wir ausführlich in den nachfolgenden Kapiteln 7, 9 und 11 eingehen werden.

2.4.2 Lagerarten für ebene Systeme

Die drei wichtigsten Lagerungsarten für ein ebenes Tragwerk sind 1. *das verschiebliche Gelenklager* (Loslager), 2. *das feste Gelenklager* (Festlager) und 3. *die feste Einspannung*. Dabei wird stets angenommen, dass die Gelenke der Lager ideal reibungsfrei sind und auch die Verschiebung ohne jede Reibung möglich ist.

Das verschiebliche Gelenklager (Loslager): Bei diesem Lager ist wie in Abb. 2.16 eine Bewegung u des Körpers parallel zur Lagerungsebene und eine Verdrehung φ des Körpers um einen Punkt möglich. Dagegen ist die Bewegung des Körpers senkrecht zur Lagerungsebene behindert, so dass er, ohne Festhaltungen an anderen Orten, den Freiheitsgrad $n_f = 2$ hat. Da wir Reibung in den Lagern stets vernachlässigen, tritt *eine* Reaktionskraft A_V senkrecht zur möglichen Bewegungsrichtung auf, so dass die Anzahl der Lagerreaktionen $r = 1$ beträgt.

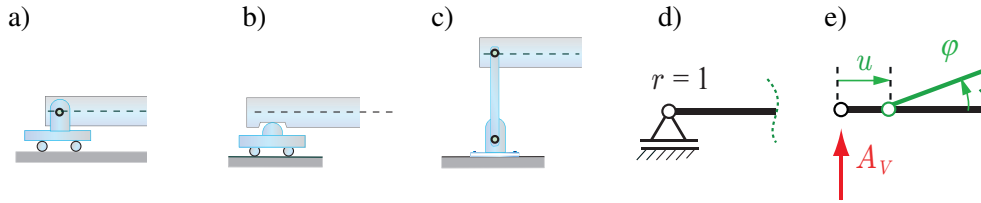


Abb. 2.16. Loslager: a) Rollenlager, b) Rollenkipplager, c) Pendelstütze, d) Symbolskizze und Wertigkeit $r = 1$, e) mögliche Bewegungen u und φ sowie Reaktionskraft A_V

Man spricht daher von einer *einwertigen Lagerung*. Die Ausführung kann verschiedenartig sein. Abb. 2.16.a-c zeigt als Beispiele das Rollenlager, das Rollenkipplager und die Pendelstütze. Bei der *Pendelstütze* wird eine horizontale Bewegung des Tragwerks durch zwei reibungsfreie Gelenke ermöglicht. Abb. 2.16.d zeigt die Symbolskizze, und Abb. 2.17.e zeigt die beiden möglichen Bewegungen, die horizontale Verschiebung u und die Verdrehung φ , sowie die auftretende Reaktionskraft A_V . Der Index V steht für *vertikal* zur Lagerführung.

Das feste Gelenklager (Festlager): Bei diesem Lager ist wie in Abb. 2.17 nur eine Verdrehung φ des Körpers um einen Punkt möglich, so dass der Freiheitsgrad $n_f = 1$ beträgt. Bewegungen des Körpers parallel und senkrecht zur Lagerungsebene sind behindert, so dass eine *zweiwertige Lagerung* mit $r = 2$ vorliegt. Auch hier kann die wirkliche Ausführung verschiedenartig sein. Als Beispiele sind das Kugellager in Abb. 2.17.a, die Doppelstütze in Abb. 2.17.b oder das Kipplager in Abb. 2.17.c dargestellt. In Abb. 2.17.d wird die Lagerform durch eine Symbolskizze veranschaulicht. Abb. 2.17.e zeigt die Verdrehung φ als mögliche Bewegungsform und die auftretenden Reaktionskräfte A_H und A_V . Die Indices V und H stehen dabei für *vertikal* und *horizontal* zur Lagerführung.

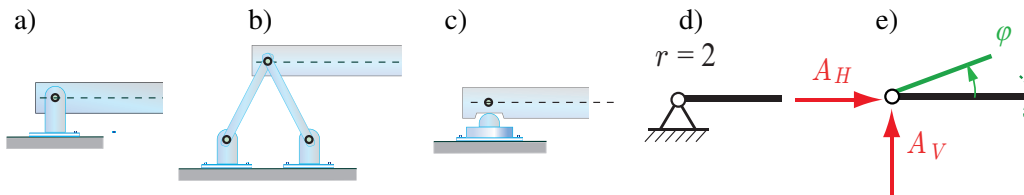


Abb. 2.17. Festlager: a) Kugellager, b) Doppelstützen, c) Kipplager, d) Symbolskizze und Wertigkeit $r = 2$, e) mögliche Bewegung φ und Reaktionskräfte A_H und A_V

Die feste Einspannung: Bei diesem Lager sind wie in Abb. 2.18 beide Verschiebungen und die Verdrehung behindert, so dass eine *dreiwertige Lagerung* vorliegt. Damit gilt $n_f = 0$ für den Freiheitsgrad und $r = 3$ für die Anzahl der Reaktionen. Auch hier sind die Ausführungen verschiedenartig. Bei dem *Kragbalken* in Abb. 2.18.a liegt ein vollständiger Verbund des gelagerten Körpers mit einem anderen Körper vor, während in Abb. 2.18.b die feste Lagerung durch Pendelstützen realisiert wird. Abb. 2.18.c zeigt die zugehörige Symbolskizze. Während in Abb. 2.18.d keine Bewegungen auftreten, sind dort zwei Reaktionskräfte A_H , A_V eingetragen. Zusätzlich entsteht ein sogenanntes *Einspannmoment* (kurz: Moment M_A), welches im späteren Abschnitt 5.3 erklärt wird.

In Tabelle 2.1 sind die Lagerbezeichnungen, Lagersymbole, Freiheitsgrade und Reaktionen für das verschiebbliche Gelenklager (Loslager), das feste Gelenklager (Festlager) und

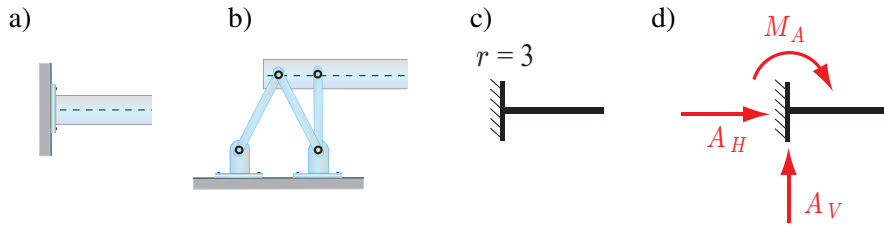


Abb. 2.18. Feste Einspannung: a) Kragbalken, b) Pendelstützen, c) Symbolskizze und Wertigkeit $r = 3$, d) keine Bewegungen, Reaktionskraftgrößen A_H , A_V , M_A

die feste Einspannung zusammengefasst. Zusätzlich sind zwei weitere Lagerungsformen,

Bezeichnung	Symbol	Freiheitsgrade	Lagerreaktionen	n_f	r
verschiebliches Gelenklager, Loslager, Rollenlager				2	1
festes Gelenklager, Festlager				1	2
(feste) Einspannung				0	3
längs verschiebbliche Einspannung (Schiebehülse)				1	2
quer verschiebbliche Einspannung (Parallelführung)				1	2
freies Ende				3	0
				$n_f + r = 3$	

Tabelle 2.1. Lagerbezeichnungen, Lagersymbole, Freiheitsgrade und Lagerreaktionen für ebene Systeme

die *längs verschiebbliche Einspannung* und die *quer verschiebbliche Einspannung* eingetragen. Dabei wird im ersten Fall eine Verschiebung u längs zur Stabachse und im zweiten Fall eine Verschiebung v quer zur Stabachse ermöglicht, so dass beide Lager jeweils den Freiheitsgrad $n_f = 1$ und $r = 2$ Reaktionskraftgrößen haben. Bei dem *freien Ende* sind alle drei Freiheitsgrade möglich, so dass Lagerreaktionen nicht auftreten. Für alle Fälle in Tabelle 2.1 ist wegen $n_f + r = 3$ die Regel (2.10.1) für die kinematischen Bindungen erfüllt.

2.4.3 Lagerarten für räumliche Systeme

Lagerungsarten für räumliche Systeme sind in der Technik sehr vielfältig. Zwei häufig auftretende Beispiele sind das Punktlager und das Kugelgelenk. Auch hier wird angenommen, dass die Gelenke der Lager ideal reibungsfrei sind und die Verschiebungen ohne Reibung erfolgen.

Das Punktlager: Hier ist nur ein Verschiebungsfreiheitsgrad behindert, wie z.B. bei dem Elastomerlager einer Brücke in Abb. 2.19.a. In Abb. 2.19.c ist das die Verschiebung in z -Richtung, so dass zwei Verschiebungen u und v verbleiben. Weiter sind drei Drehfreiheitsgrade $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ um die drei Achsen x, y, z möglich, die in Abb. 2.19.c jeweils mit einem Doppelpfeil gekennzeichnet sind. Damit erhält man $n_f = 5$ für die Anzahl der Freiheitsgrade. Als Reaktionskraft stellt sich wie in Abb. 2.19.d eine Kraft A_z ein, so dass die Anzahl der Lagerreaktionen und damit die Wertigkeit $r = 1$ beträgt.

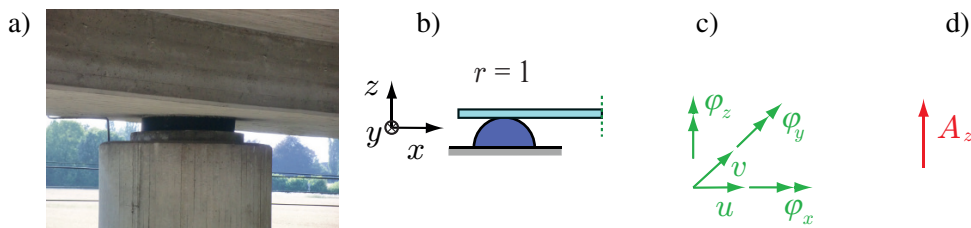
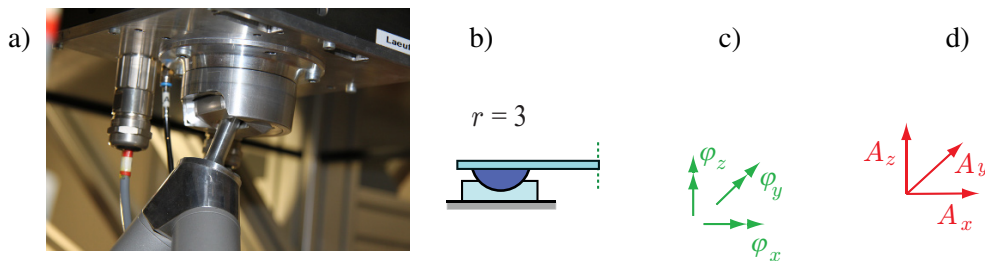


Abb. 2.19. Punktlager: a) Elastomerlager einer Brücke, b) Skizze und Wertigkeit $r = 1$, c) mögliche Bewegungen, d) Reaktionskraft

Das Kugellager: Hier sind drei Verschiebungsfreiheitsgrade behindert, wie z.B. bei dem Lager eines Parallelroboters in Abb. 2.20.a. Damit verbleiben in Abb. 2.20.c alle drei Drehfreiheitsgrade $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$, und die Anzahl der Freiheitsgrade ist $n_f = 3$. Als Reaktionskräfte



Quelle: Institut für Regelungstechnik und Mechatronik, Universität Paderborn

Abb. 2.20. Kugellager: a) Lager Parallelroboter TriPlanar (Trächtler), b) Skizze und Wertigkeit $r = 3$, c) mögliche Bewegungen, d) Reaktionskräfte

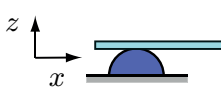
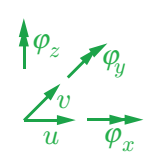

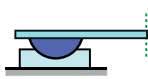
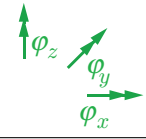

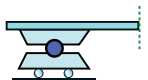
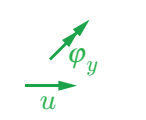
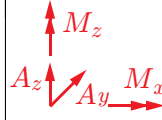
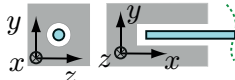

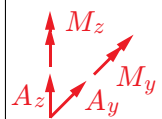


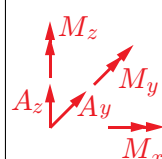
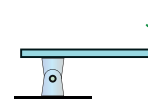

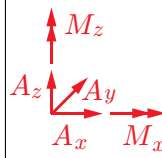
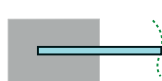
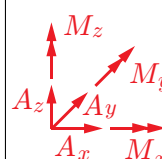
Bezeichnung	Skizze	Freiheitsgrade	Lagerreaktionen	n_f	r
Punktlager				5	1
Kugellager				3	3
Kippgelenk-lager				2	4
längsverschiebliches Achslager				4	2
festes Achslager				1	5
längsverschiebliches Lager				1	5
Einspannung				0	6
				$n_f + r = 6$	

Tabelle 2.2. Lagerbezeichnungen, Lagerskizzen, Freiheitsgrade und Lagerreaktionen für räumliche Systeme

erhält man in Abb. 2.20.d die Kräfte A_x , A_y und A_z , so dass die Anzahl der Lagerreaktionen und damit die Wertigkeit $r = 3$ beträgt.

In Tabelle 2.2 sind die Lagerbezeichnungen, Skizzen, Freiheitsgrade und Reaktionen für die wichtigsten Lager räumlicher Systeme zusammengefasst. Zusätzlich sind die jeweiligen Freiheitsgrade und die Auflagerreaktionen angegeben. Da allgemeingültige Symbole, wie z.B. für ebene Systeme in Tabelle 2.1, nicht verbreitet sind, beschränken wir uns hier und im Folgenden auf die Angaben von Skizzen.

Nach Regel (2.9.2) gibt es für einen Körper im Raum sechs unabhängige Freiheitsgrade: Dieses sind, wie in Tabelle 2.2 dargestellt, drei Verschiebungen u , v und w sowie drei Verdrehungen φ_x , φ_y und φ_z , die jeweils durch einen Doppelpfeil gekennzeichnet sind. Ist eine der drei Verschiebungen durch eine kinematische Bindung behindert, entsteht in deren Richtung eine der Kräfte A_x , A_y oder A_z . Wird eine der drei Verdrehungen behindert, entsteht in deren Drehrichtung eines der Momente M_x , M_y , M_z , die ausführlich im späteren Kapitel 6 behandelt werden.

2.4.4 Zwischenlagerungen

Technische Konstruktionen wie Bauwerke, Werkzeuge und Maschinen werden häufig aus mehreren Körpern zusammengesetzt. Dabei schränken die *kinematischen Bindungen zwischen den Körpern* (kurz: Zwischenlagerungen) ihre relativen Bewegungen zueinander ein.

Gelenk: Ein häufig verwendetes Zwischenlager ist das Momentengelenk (kurz: Gelenk) in Abb. 2.21. Es verhindert relative Verschiebungen an der Zwischenlagerung von zwei Körpern in zwei verschiedenen Koordinatenrichtungen und damit in alle Richtungen in der Ebene. Aufgrund dieser Bindung werden zwei Kräfte G_H und G_V in zwei verschiedenen Koordinatenrichtungen übertragen. Da eine gegenseitige Verdrehung der beiden Teilkörper möglich ist, kann kein Drehmoment übertragen werden (Erklärung dazu im nachfolgenden Abschnitt 5.3). Bezeichnen wir in Ergänzung zur Anzahl der Lagerreaktionen r die Anzahl der Zwischenreaktionen (oder: *Wertigkeiten der Verbindungen*) mit z , so gilt hier $z = 2$.

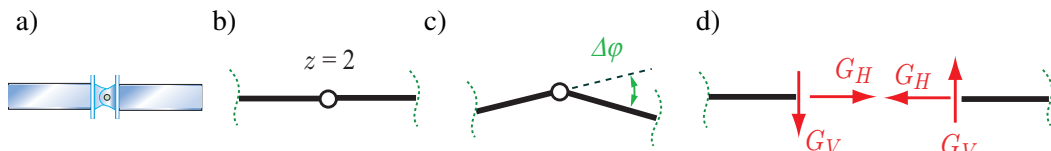


Abb. 2.21. Gelenk: a) Reales System, b) Symbol und Wertigkeit $z = 2$, c) Verdrehung $\Delta\varphi$, d) Reaktionskräfte G_V , G_H

In Tabelle 2.3 sind außer für das Gelenk Lagerbezeichnungen, Lagersymbole, Freiheitsgrade und Zwischenreaktionen für weitere Zwischenlagerungen in der Ebene zusammengefasst: Das *Normalkraftgelenk* verhindert sowohl eine gegenseitige Verdrehung der beiden angeschlossenen Teilkörper als auch eine gegenseitige Querverschiebung. Damit werden eine senkrecht zur Stabachse auftretende G_V und ein Moment M übertragen, so dass die Anzahl der Zwischenreaktionen $z = 2$ ist. Das *Querkraftgelenk (Parallelführung)* verhindert sowohl eine gegenseitige Verdrehung der beiden angeschlossenen Teilkörper als auch eine gegenseitige Transversalverschiebung. Damit wird eine horizontale Kraft G_H und ein Moment M übertragen, so dass hier $z = 2$ gilt. Beim geraden Pendelstab ist die relative Verschiebung in Richtung des Stabes behindert. Dadurch entsteht eine Kraft S in seiner Längsrichtung, und

Bezeichnung	Symbol	Freiheitsgrade	Zwischenreaktionen	n_f	z
(Momenten-) Gelenk				1	2
Normalkraftgelenk				1	2
Querkraftgelenk				1	2
gerader Pendelstab				2	1
vollständige Verbindung				0	3
				$n_f + z = 3$	

Tabelle 2.3. Zwischenlagerungen in der Ebene: Lagerbezeichnungen, Lagersymbole, Freiheitsgrade und Zwischenreaktionen

es gilt $z = 1$. Die *vollständige Verbindung* in Tabelle 2.3 überträgt alle drei Bewegungen u , v und φ , so dass $z = 3$ gilt. Damit entstehen drei Zwischenreaktionen G_H , G_V sowie M .

Wir bemerken noch, dass die Gleichheit der horizontalen und vertikalen Kräfte G_H und G_V sowie des Momentes M an jeweils zwei gegenüberliegenden Schnittufern in Tabelle 2.3 aus dem Wechselwirkungsgesetz („*actio gleich reactio*“) folgt, worauf wir im nachfolgenden Abschnitt 3.2 eingehen werden.

Falls beliebig viele Stäbe an ein Gelenk gebunden sind, bestimmt man die Anzahl z der Zwischenreaktionen (oder: Wertigkeiten der Verbindungen) nach Tabelle 2.4

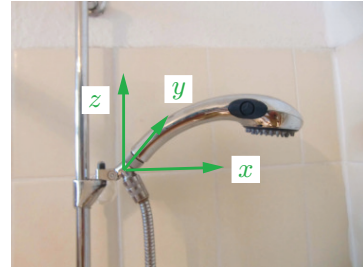
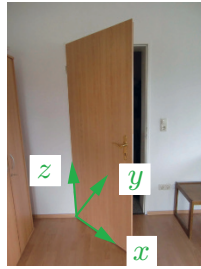
<p>a) Ebene Systeme: $z = 2(n - 1)$</p>	<p>b) Räumliche Systeme: $z = 3(n - 1)$</p>
--	--

Tabelle 2.4. Zwischenreaktionen (Wertigkeiten) für mehrteilige Systeme: a) in der Ebene und b) im Raum

2.4.5 Aufgaben zu Abschnitt 2.4

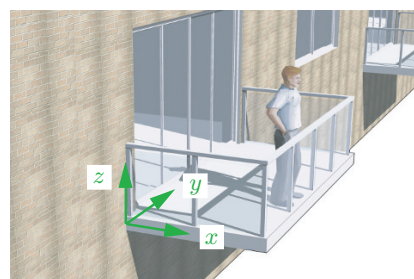
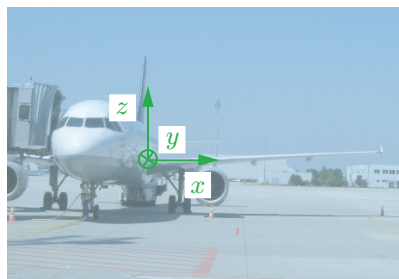
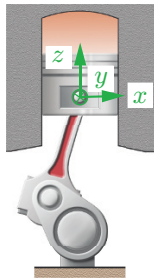
Aufgabe 2.9 (SG = 1, BZ = 10 min)

Geben Sie, bezogen auf das angegebene Koordinatensystem, für die drei Beispiele, 1. CD-Laufwerk, 2. Tür und 3. Handbrause einer Dusche, jeweils die kinematischen Bindungen und die Freiheitsgrade an.



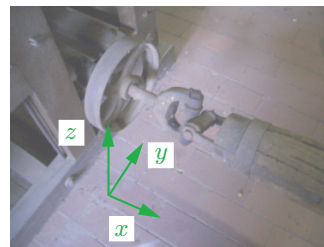
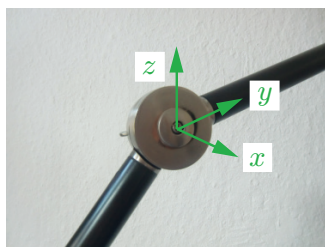
Aufgabe 2.10 (SG = 1, BZ = 10 min)

Geben Sie, bezogen auf das angegebene Koordinatensystem, für die drei Beispiele, 1. Kolben eines Verbrennungsmotors, 2. Tragflügel eines Flugzeuges und 3. Balkon eines Wohnhauses, jeweils die kinematischen Bindungen und die Freiheitsgrade an.



Aufgabe 2.11 (SG = 1, BZ = 5 min)

Geben Sie, bezogen auf das angegebene Koordinatensystem, für die zwei Beispiele, 1. Gelenk einer Stehlampe, 2. Kadangelenk in einer Mühle jeweils die kinematischen Zwischenbindungen und die Freiheitsgrade an.



Lehrbuch der Technischen Mechanik - Band 1:

Starrkörperstatik

Grundlagen und Anwendungen

Mahnken, R.

2016, XIII, 470 S. 387 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-662-52784-9