

---

## 1. Entstehungs- und Überlieferungsgeschichte der Leibniz'schen Abhandlung über die arithmetische Quadratur der Kegelschnitte

Leibnizens vorliegende, umfangreiche Schrift zur arithmetischen Quadratur der Kegelschnitte, also der Integration mittels unendlicher Reihen rationaler Zahlen, ist aus zahlreichen Vorstudien und Entwürfen hervorgegangen – einige sind in (Knobloch 1989) genannt – die dank Uwe Mayer und Siegmund Probst seit 2012 gedruckt vorliegen: Der gesamte, von ihnen bearbeitete Band LSB VII, 6 ist der arithmetischen Kreisquadratur gewidmet. Es ist die längste mathematische Schrift, die Leibniz je verfasst hat. Sie ist für Grundlagenfragen der Mathematik von höchstem Interesse: Leibniz nimmt darin zu Fragen mathematischer Beweistechnik, zur Existenz und Bedeutung mathematischer Objekte wie *unendlich klein*, *unendlich groß*, allgemein zum Umgang mit dem Unendlichen ausführlich Stellung, insbesondere dem Gedanken, Kurven als Polygone mit unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten aufzufassen.

Sie nimmt Ergebnisse auf, die Leibniz teilweise schon zu Beginn seines Paris-Aufenthaltes erzielte. Die Summierung der reziproken figurierten Zahlen und das harmonische Dreieck (Sätze 39, 40) treten bereits in der Ende 1672 verfassten *Accessio ad arithmeticae infinitorum* auf (LSB III, 1, N. 2), die zur Veröffentlichung durch Jean Gallois im Journal des sçavans bestimmt war. Leibniz sandte die Abhandlung jedoch nicht ab (LSB III, 1, S. 2, 6–9). Den Transmutationssatz (Satz 7) fand er im Mai 1673 (LSB III, 1, 115). Die Kreisreihe fand er im Herbst 1673 (LSB VII, 6, N. 1). Den Segmentsatz an der Zykloide (Satz 13) sowie die alternierende Reihe für den Kreisumfang (Satz 32 für den Kreisquadranten) teilte er Huygens in Form beweisloser Ergebnisse im Sommer 1674 mit (LSB III, 1, N. 29) und später weiteren Pariser Bekannten wie Edme Mariotte im Oktober 1674 (LSB III, 1, N. 38; LSB VII, 1, N. 137), Ende 1675 Tschirnhaus (LSB III, 5, N. 165) und Jacques Ozanam (LPG I, 400).

Die Entwürfe und verschiedenen Fassungen der Abhandlung zeigen, wie der Stoff im Laufe der Zeit immer mehr answoll, eine Tatsache, die Leibniz selbst anspricht (Scholium zu Satz 25). Die hier edierte Endfassung – Leibnizens überarbeitetes Handexemplar ohne Schlussredaktion – stammt vom Juni bis September 1676 (LSB VII, 6, 520). Leibniz hoffte,

vor allem mit Hilfe dieser Schrift Mitglied der Académie Royale des Sciences zu werden, wie er Huygens mehrfach 1679 schrieb (Leibniz-Huygens 8./18. 9. 1679, LSB III, 2, 850; Leibniz-Huygens Ende November/Anfang Dezember 1679, LSB III, 2, 898).

Da Leibniz Paris im Oktober 1676 verlassen musste, plante er, die Schrift mit Hilfe seines Freundes Soudry dort drucken zu lassen (Leibniz-Pierre Daniel Huet 1./11. 8. 1680, LSB II, 1, 482). Dazu kam es jedoch nicht. Als Soudry 1678 starb, gelangte die zurückgelassene Version der Schrift in die Hände des Hofmeisters des Grafen Phil. Christoph Königsmark, Friedrich Adolf Hansen, der sie an den Hannoverschen Residenten in Paris, Christophe Brosseau, weitergab (Brosseau-Leibniz 22. 1. 1680, LSB I, 3, 343; Brosseau-Leibniz 29. 1. 1680, LSB I, 3, 344). Brosseau übergab sie dem nach Hannover reisenden Kaufmann Isaac Arontz. Das Paket mit dem Manuskript ging jedoch verloren, wie Leibniz an Brosseau am 22. August (?) 1683 schreibt (LSB I, 3, 579).

Wir wissen deshalb nicht, wie diese Version genau lautete. Denn darin können nicht eindeutig umsetzbare Bemerkungen wie in der hier edierten Version nicht gestanden haben: *Hoc non est opus. Haec reddenda clariora* (Ausführungen zu Satz 43). Leibnizens Überlegungen im Jahre 1680, die Abhandlung beim Amsterdamer Verleger Daniel Elsevier drucken zu lassen, führten zu keinem Ergebnis (LSB I, 3, 415). Zwar forderte ihn Huygens am 18. 11. 1690 auf, die Schrift zu veröffentlichen (LSB III, 4, 657). Aber Leibniz unternahm nichts in dieser Hinsicht.

Inzwischen hatte er das Interesse an einer Veröffentlichung verloren. Als ihm Johann Bernoulli am 16./26. 8. 1698 schrieb, Leibniz würde eine für die Öffentlichkeit nützliche und willkommene Aufgabe erledigen, wenn er den Traktat herausgäbe (LSB III, 7, 872), antwortete er ihm bereits am 22.8., warum er dies nicht mehr vorhabe (LSB III, 7, 886): „Meine Abhandlung über die arithmetische Quadratur hätte damals Beifall finden können, als sie geschrieben wurde. Jetzt würde sie mehr Anfängern in unseren Methoden gefallen als dir.“

Nach Leibnizens Tod blieb die Abhandlung in der Hannoverschen Leibniz-Bibliothek liegen, bis Lucie Scholtz 1934 im Rahmen ihrer Dissertation einen kurzen Teildruck herausgab. 1993 erschien die erste vollständige Edition, 2004 die erste (französische) Übersetzung, 2007 die erste deutsche Übersetzung online (s. Abschnitt 6), die nunmehr dank dem Interesse von Jürgen Jost zusammen mit der verbesserten Edition von 1993 in der von ihm herausgegebenen Reihe *Klassische Texte der Wissenschaft* erscheinen kann.

---

## 2. Die Arithmetik des Unendlichen

Leibnizens Abhandlung über die Infinitesimalgeometrie stützt sich grundlegend auf zwei Arten *fiktiver Quantitäten* (*quantitates fictitiae*), wie er sie nennt (Scholium nach Satz 7; LSB VII, 6, 537), auf *unendliche* (*infinitae*) und auf *unendlich kleine* (*infinite parvae*). Während er Dutzende von mathematischen Begriffen ausdrücklich definiert – diese sind im Glossar dieser Ausgabe aufgeführt – geschieht dies ausgerechnet im Falle der fiktiven

Quantitäten nicht. Dem Text ist jedoch unmissverständlich zu entnehmen, dass er die folgenden Nominaldefinitionen verwendet:

*unendlich* bedeutet *größer als jede gegebene Quantität*, *unendlich klein* bedeutet *kleiner als jede gegebene Quantität*. Es ist eine wenn-dann Beziehung: Jemand gibt eine Größe vor. Diese kann übertroffen bzw. unterboten werden. Damit ist klar gestellt, dass es weder um aktual Unendlich noch um Null geht, eine Einsicht, die Leibniz erst gewinnen musste, über die er aber in der vorliegenden Abhandlung verfügt. Es sind per definitionem variable Quantitäten (Knobloch 2008, 180). Wäre Leibniz bei der Definition stehen geblieben, dass es Größen sind, die größer bzw. kleiner als jede *angebbare* Quantität sind, hätte er zwangsläufig aktual Unendlich bzw. Null erhalten, wie es Leonhard Euler tatsächlich für unendlich klein gelehrt hat. Dennoch verwendet Leibniz gelegentlich diese Sprechweise auch später, ein Punkt, auf den weiter unten zurückzukommen ist.

Leibniz hat mit diesen fiktiven Quantitäten gerechnet, ohne die zugrunde liegenden Regeln zu beweisen oder allgemein zu formulieren. Es handelt sich um die folgenden zwölf Regeln (Knobloch 1990, 45f.; Knobloch 2002, 67f.):

1. endlich + unendlich = unendlich
- 2.1. endlich  $\pm$  unendlich klein = endlich
- 2.2.  $x, y$  endlich,  $x = y + \text{unendlich klein} \Rightarrow x - y \approx 0$  (nicht zuordenbare Differenz)
3.  $\text{unendlich}_1 - \text{unendlich}_2 = \text{unendlich}_3$ , falls  $\text{unendlich}_1 > \text{unendlich}_2$   
(bzw.  $\text{unendlich}_1 : \text{unendlich}_2 \neq 1$ )
4.  $\text{unendlich} \pm \text{unendlich klein} = \text{unendlich}$
5.  $\text{endlich} \times \text{unendlich klein} = \text{unendlich klein}$
6. 
$$\text{unendlich} \times \text{unendlich klein} = \begin{cases} \text{unendlich} \\ \text{unendlich klein} \\ \text{endlich} \end{cases} \quad (\text{Beweis nötig})$$
- 7.1.  $\text{unendlich} \times \text{unendlich} = \text{unendlich}$
- 7.2.  $x^n \text{ unendlich} \Rightarrow x \text{ unendlich}$
8. 
$$\text{unendlich} : \text{unendlich} = \begin{cases} \text{endlich} \\ \text{unendlich} \end{cases} \quad (\text{Beweis nötig})$$
9.  $x \text{ unendlich klein}, y > 0, y < x \Rightarrow y \text{ unendlich klein}$
10.  $\text{endlich} : \text{unendlich klein} = \text{unendlich} : \text{endlich} = \text{unendlich}$   
Korollar:  $\text{endlich} : \text{unendlich klein} = x : \text{endlich} \Rightarrow x \text{ unendlich}$
11.  $\text{unendlich klein} : \text{endlich} = \text{endlich} : \text{unendlich} = \text{unendlich klein}$   
Korollar:  $\text{endlich} : \text{unendlich} = x : \text{endlich} \Rightarrow x \text{ unendlich klein}$
12.  $x : y = (x + \text{unendlich klein}_1) : (y + \text{unendlich klein}_2)$

Die Regeln 10 und 11 sind besonders wichtig, da sie einen Weg aufzeigen, wie von einer Quantität  $x$  nachgewiesen werden kann, dass sie unendlich bzw. unendlich klein ist. Man muss sie als dritte Proportionale in eine Proportion einbinden.

Für Leibniz war die Mathematik die Wissenschaft von den Größen, den Quantitäten. Nicht-Größen, wie es Indivisiblen per definitionem gemäß Aristoteles, *Metaphysik* V, 13 sind, da Größen Teilbarkeit voraussetzen, haben darin keinen Platz. Daher betont er in der gestrichenen Variante des Scholiums nach Satz 11, die wegen ihrer Bedeutung in die vorliegende Ausgabe aufgenommen wurde, den großen Unterschied zwischen der Indivisible (im strengen Sinn des Wortes) und dem unendlich Kleinen (LSB VII, 6, 549). Seit 1673 hatte er deshalb gefordert: Indivisiblen sind als unendlich klein zu definieren (Knobloch 2008, 175). Diese Definition setzt er in der vorliegenden Abhandlung voraus, wenn er im Vorspann zu Satz 6 und im Anschluss an dessen Beweis (LSB VII, 6, 529, 533) stolz verkündet, mit Satz 6 Cavalieris Indivisiblenmethode eine beweiskräftige, strenge Grundlage gegeben zu haben. Er behält also die Cavalieri'sche Terminologie bei, ändert aber die Bedeutung des Grundbegriffs Indivisible. Ja, er spricht später von seinem Integralkalkül als der *analysis indivisibilium* (Leibniz 1686).

Einen ähnlich grundlegenden Unterschied wie zwischen Indivisible und unendlich klein macht Leibniz in dieser gestrichenen Variante zwischen der begrenzten, unendlichen (*linea infinita terminata*) und der unbegrenzten, unendlichen Linie (*linea infinita interminata*). Nur die fiktive Quantität einer begrenzt gedachten, unendlichen Linie ist Gegenstand der Geometrie, nicht aber die unbegrenzte, unendliche Linie, die das von Leibniz in der Mathematik nicht zugelassene aktual Unendlich repräsentiert (Breger 1990, 63f.). Im Beweis zu Satz 11 spielt dieser Unterschied eine entscheidende Rolle (LSB VII, 6, 547).

Dort spricht er von dem unendlich kleinen Intervall, das kleiner als ein beliebiges zuordenbares Intervall ist und von der unendlichen Gerade, die größer als eine beliebige angebbare, aber nicht unbegrenzt ist. Er verwendet also die sonst von ihm zu Recht verworfene Sprechweise, da sie auf Null bzw. aktual Unendlich führt, ohne hier daran Anstoß zu nehmen.

---

### 3. Inhaltsanalyse

Formal umfasst die Abhandlung den Index notabiliorum mit einem Überblick über die ersten sieben Sätze, 51 Sätze, 25 Scholien, die den Sätzen 1, 3, 5 bis 8, 11, 12, 14, 16, 18, 19, 22, 23, 25, 29–32, 40, 43 bis 47 zugeordnet sind, fünf Korollare (eins zu Satz 14, 16, drei zu Satz 48, die zwei Korollare zu Satz 23 sind gestrichen) und sechs Gruppen von Definitionen, die auf Satz 6, Satz 7 und auf die Scholien zu Satz 7, 11, 14, 43 folgen. 16 Figuren veranschaulichen die Ausführungen.

Inhaltlich stellt die Schrift die 1676 bekannte Infinitesimalgeometrie dar. Sie gibt in anschaulich-geometrischer Einkleidung eine einheitliche Grundlegung der höheren Analysis durch apagogische Beweise und Grenzbetrachtungen (Scholtz 1934, 15). Leibniz nennt namentlich vierundzwanzig Vorgänger. Freilich hat er nach der vorliegenden Endredaktion die Namen von Desargues, Fabri, Huygens, Pardies, Roberval, Torricelli, Tschirnhaus wieder gestrichen. Die Würdigung älterer Leistungen ermöglicht es ihm zu zeigen, wie weit er

über das bis dahin Erreichte hinausgekommen ist. Dies betont er mehrfach insbesondere im Hinblick auf Cavalieri und Descartes.

Die Schrift besteht aus drei Abschnitten:

1. Satz 1 – 11
2. Satz 12 – 25
3. Satz 26 – 51

### 3.1. Der erste Abschnitt

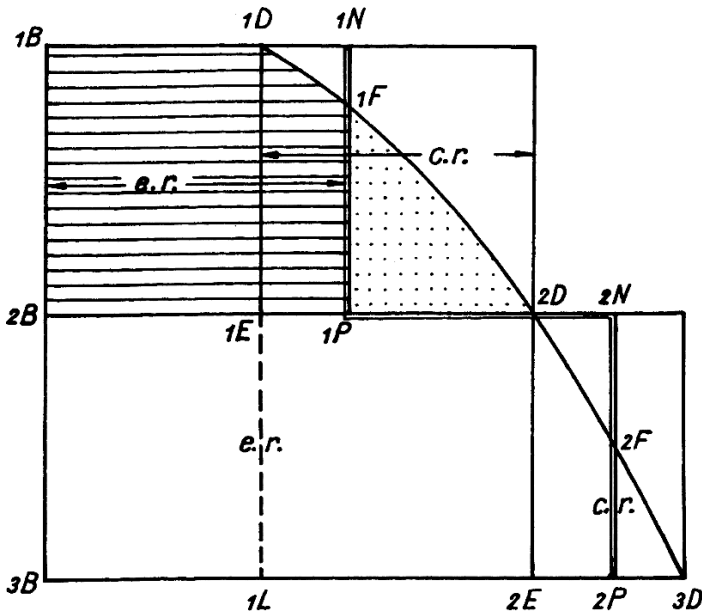
Der erste Abschnitt liefert die allgemeinen Sätze (*propositiones generales*) (Satz 11 Scholium), mit deren Hilfe seine Quadratur-, das heißt Integrationsmethode an Beispielen durchgeführt werden kann. Der Index notabiliorum verdeutlicht, dass nach Leibnizens Überzeugung die ersten sieben Sätze das Wichtigste, die methodische Grundlegung der gesamten Abhandlung enthalten. Die Sätze 8 und 9 sind Sonderfälle von Satz 7, die Sätze 10 und 11 betreffen die zugehörige Segmentenfigur.

Wie Leibniz im Scholium zu Satz 6 sagt, müssen im Interesse der Geometrie die Methoden und Prinzipien der Entdeckungen sowie einige besonders wichtige Sätze streng bewiesen werden. Diesem Ziel, ein universales, demonstratives System der Infinitesimalgeometrie zu schaffen, dient der erste Abschnitt, den vor kurzem Rabouin analysiert hat (Rabouin 2015).

Satz 1 lehrt die elementargeometrische Flächengleichheit von bestimmten Drei- und Rechtecken, der nach dem Kontinuitätsprinzip auch beim Übergang vom Endlichen zum Unendlich-Kleinen anwendbar bleibt. In der Zerlegung von krummlinig begrenzten Flächen in Dreiecke statt in Rechtecke sieht Leibniz sein besonderes Verdienst. Die Sätze 2 bis 5 begründen bewusst in größerer Allgemeinheit, als die Abhandlung es erforderte (Scholium zu Satz 3), eine *universale* Reihen- und Differenzenlehre.

Der sehr spitzfindige (*spinosissima*) Satz 6 gibt eine strenge Grundlegung der Leibniz'schen Integrationstheorie (Jesseph 2015, 197–200). Er zeigt, dass eine krummlinig begrenzte Fläche durch eine geradlinig begrenzte treppenförmige Fläche beliebig genau angenähert werden kann. Beliebig genau heißt: der Fehler kann kleiner als jede vorgegebene positive Zahl gemacht werden.

Während die „übliche Indivisiblenmethode“ Ein- und Umbeschreibungen gemischtliniiger Figuren betrachtete, ist die treppenförmige, mit Doppellinien begrenzte Figur 1 weder eine Ein- noch eine Umbeschreibung, sondern etwas dazwischen. Leibniz zeigt dadurch die Integrabilität einer großen Klasse von Funktionen mittels Riemann'scher Summen, die von den Zwischenwerten der partiellen Integrationsintervalle abhängen. Die zu den Punkten F gehörenden Ordinaten haben Abszissen, die zu den Werten NF gleich sind, also zu Zwischenwerten der Integrationsintervalle (Knobloch 2012, 248f.).



Der Beweis bedient sich archimedischer Abschätzungsmethoden. Die abschreckende Wirkung seiner Übergenaugigkeit (*scrupulositas*) auf den Leser hat Leibniz selbst vorausgesehen und deshalb dazu aufgefordert, den Satz bei der ersten Lektüre zu übergehen.

Satz 7 ist der Transmutationssatz, der lehrt, wie mittels affiner Transformationen zu einer Kurve eine *Quadratrix*, eine Hilfskurve, gefunden werden kann, mit deren Hilfe die Quadratur der vorgelegten Kurve oft überraschend leicht gelingt (Hofmann 1974, 54–62). Deshalb hält ihn Leibniz in dieser Abhandlung für einen der allgemeinsten und nützlichsten der Geometrie, der es erlaubt, Kegelschnitte in rationale Figuren zu transformieren. Insbesondere führt der Satz zur rationalen Kreisquadratur, um derentwillen er die Schrift verfasst hat (Satz 7 Scholium).

Die anschließenden Definitionen zeigen, wie Leibniz die Cavalieri'sche Indivisiblenmethode umbildet und präzisiert, in einem Sinn, den ihr bereits Roberval und Pascal gegeben hatten (Scholtz 1934, 25f.): Unter der Summe von Geraden ist die Summe von Rechtecken von unbestimmt kleiner (*indefinitae parvitas*), da unendlich kleiner Breite zu verstehen. Durch die Quantifizierung der Indivisiblen zu unendlich kleinen Größen gibt Leibniz dem Umgang mit Indivisiblen eine sichere Grundlage (Satz 23 Scholium).

### 3.2. Der zweite Abschnitt

Der zweite Abschnitt wendet die bisherigen Sätze auf spezielle Kurven an, um die Kreisquadratur vorzubereiten. Satz 12 gilt der Zykloidenretorte, Satz 13 ist der Segmentsatz an der Zykloide. Satz 14 löst das Problem, an Hand der Winkelfigur eine Kurve zu finden, so

dass die Flächen unter der Kurve den Winkeln der zugehörigen Kreissektoren proportional sind. Werden die Resekten nicht senkrecht zur x-Achse, sondern senkrecht zur y-Achse angetragen, entsteht die Verhältnis- oder hyperbolische Figur, die nach Leibnizens Verständnis in unmittelbarem Zusammenhang mit den Logarithmen steht. Ausführlich widmet er sich dem Thema Logarithmen freilich erst im dritten Abschnitt. Von besonderem Interesse sind seine Überlegungen, ob die absolut unbegrenzte Fläche (*spatium absolute interminatum*) dem rechten Winkel zuzuordnen ist, ohne dass er sich festlegt.

Bis auf Satz 20 gelten die folgenden Sätze 15 bis 25 den einfachen analytischen Kurven, insbesondere den Parabeln und Hyperbeln beliebiger Ordnung. Leibniz führt eine umfangreiche Terminologie und Klassifikation der Paraboloiden und Hyperboloide ein (Knobloch 2013), bevor er Eigenschaften und Quadraturen dieser Kurven untersucht. Auf Vorgänger wie Michelangelo Ricci weist er gegebenenfalls, z. B. im Falle von Satz 15, ausdrücklich hin.

Beim Beweis der Sätze 18, 20 und 22 ist auf Besonderheiten zu achten. Im Falle von Satz 18 geht Leibniz von den Funktionsgleichungen aus:  $y^m v^n = a$  bzw.  $bv^n = y^m$ . Der Vergleich der zueinander konjugierten Zonen führt auf die Produkte:  $\frac{m}{|m-n|} \cdot \frac{|m-n|}{n}$  oder  $\frac{m}{m+n} \cdot \frac{m+n}{n}$ . Die Fälle  $m = n$  (Gerade) und  $m = -n$  (Hyperbel) müssen also dabei ausgeschlossen werden, obwohl der Satz auch für diese beiden einfachen, analytischen Funktionen gilt.

Satz 20 ist für zwei Fälle formuliert und bewiesen:  $V + X$  habe zu  $V + Z$  ein endliches Verhältnis der Ungleichheit.

- (1) Sind  $X$  und  $Z$  endlich, wird auch  $V$  endlich sein.
- (2) Ist  $X$  oder  $Z$  unendlich, wird auch  $V$  unendlich sein.

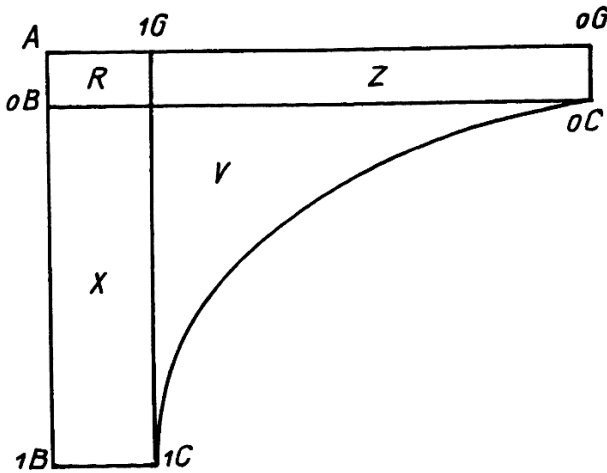
Mit Blick auf den Beweis zu Satz 22 ist ein dritter Fall zu beweisen:

- (3) Ist  $X$  endlich,  $Z$  unendlich klein, wird auch  $V$  endlich sein.

Um dies einzusehen, muss gezeigt werden, dass  $V$  weder unendlich klein noch unendlich ist.

Nehmen wir erstens an,  $V$  sei ebenfalls unendlich klein. Dann ist  $V + Z$  unendlich klein,  $V + X$  endlich. Also ist  $(V + X) : (V + Z)$  unendlich, da dies ein Verhältnis einer endlichen zu einer unendlich kleinen Größe ist. Dies ist ein Widerspruch gegen die Voraussetzung, dass dieses Verhältnis endlich ist.

Nehmen wir zweitens an,  $V$  sei unendlich. Dann ist  $V + Z$  unendlich,  $V + X$  ist ebenfalls unendlich. Also ist  $(V + X) - (V + Z)$  unendlich. Denn wenn man ein kleineres von einem größeren Unendlich abgezogen wird, ist der Rest unendlich (Regel 3). Aber  $(V + X) - (V + Z) = X - Z$  ist endlich (endlich minus unendlich klein). Dies ist ein Widerspruch gegen das vorausgehende Ergebnis. Also ist  $V$  endlich.



Satz 22 gilt Hyperboloiden  $y^m v^n = a$  unter Ausschluss der Kegelschnitthyperbel. Diese Kurven haben die beiden Achsen als Asymptoten, also unendlich lange Flächen in beiden Achsenrichtungen.

Dabei ist  $A_0B$  unendlich klein, deshalb  $A_0G = 0B_0C$  unendlich groß. Nach Satz 22 ist die Fläche  $F = R + Z + X + V$  unendlich, falls  $m < n$ , endlich, falls  $m > n$ . Eine der beiden unendlich langen Flächen ist demnach unendlich, die andere endlich. Der Beweis stützt sich auf die Sätze 18, 20 und 21.

Er kann auf die Behauptung reduziert werden: Ist  $R + Z$  unendlich / endlich, so ist  $F$  unendlich / endlich. Denn nach Satz 21 ist  $Z + R$  unendlich und damit auch  $F = V + X + Z + R$ , falls  $m < n$ , unendlich klein, falls  $m > n$ . In zweiten Fall ist also  $Z$  unendlich klein, da  $R$  unendlich klein ist, das heißt nach Satz 20 (3) ist  $V$  endlich, also ist  $V + X + Z + R$  endlich.

Der Beweis vollzieht sich in fünf Schritten:

- (1)  $\frac{V+X}{V+Z} = \frac{m}{n} \neq 1$  endlich nach Satz 18
- (2)  $X$  ist endlich. Nach Satz 20 gilt: Ist  $Z$  endlich / unendlich, so ist  $V$  endlich / unendlich, das heißt  $V + X$  oder  $V + X + Z$  endlich / unendlich, da  $X$  endlich ist.
- (3)  $R$  ist unendlich klein, also gilt: Ist  $Z$  endlich / unendlich, so ist  $V + X + Z + R$  endlich / unendlich.
- (4) Also gilt: Ist  $Z + R$  endlich / unendlich (da  $R$  unendlich klein ist), so ist  $Z$  endlich / unendlich.
- (5) Wann also ist  $Z + R$  endlich oder unendlich? Satz 21 enthält nicht diese Dichotomie: Leibniz verwendet ihn irrtümlicher Weise, wenn er sagt „aber endlich, wenn der Exponent der Potenzen der Ordinaten größer als der Exponent der Potenzen der Abszissen ist“. Richtig ist:  $Z + R$  ist unendlich klein, wenn  $m > n$  ist. Mit Hilfe des erweiterten Satzes 20 lässt sich der Beweis richtig zu Ende führen, wie wir gesehen haben.



Die Sätze über Kurven mit unendlich langen Flächenräumen geben Leibniz willkommene Gelegenheit, in den Scholien zu den Sätzen 22 und 23 allgemein über den Umgang mit dem Unendlichen zu sprechen. Es bedarf des Fadens eines Beweises, um vor Irrtümern gefeit zu sein, denen die Cavalieri'sche Methode in ihrer ursprünglichen Form ausgesetzt ist. Seine Methode der fiktiven, unendlich kleinen Größen bietet dagegen Sicherheit: Man kann Kurven ebenso sicher wie Geraden behandeln, wenn man Kurven als Polygone mit unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten auffasst.

Ausdrücklich sagt er im Scholium zu Satz 25, dem Ende der ersten umfangreichen Ausarbeitung zur Kreisquadratur, dass er damit hätte zufrieden sein können, wenn er nur die arithmetische Kreisquadratur hätte darstellen wollen. Aber er wolle die Fruchtbarkeit seiner Prinzipien aufzeigen. Deshalb folgt der dritte Abschnitt.

### 3.3. Der dritte Abschnitt

Satz 26 ist zunächst eine Aussage über unendliche, geometrische Reihen, die er in den folgenden Sätzen verwendet. Die Sätze 27 bis 32 leiten die arithmetische Kreisquadratur ab, das heißt die konvergente, unendliche, aus rationalen Zahlen bestehende Reihe, die die Kreisfläche bzw. diejenige eines Quadranten angibt, wenn der Kreisradius 1 beträgt. Dazu konstruiert er in Satz 27 die Versiera, also die Kurve, die die Segmentenfigur des Kreises hervorruft.

Er vermerkt im nachträglich hinzugefügten Scholium zu Satz 29 mit dem wichtigen Hinweis auf Newtons ersten Brief für Leibniz, er hätte seine Reihe auch nach der Art Nicolaus Mercators mittels Division statt mit Hilfe der geometrischen Reihe herleiten können. Satz 31 enthält die  $\arctan x$  Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1},$$

wenn man den Kreisradius  $AB=1$  und den zum Kreisbogen  $BO$  gehörenden Tangentenabschnitt  $BC = x$  setzt. Diese Satz ist, wie es im anschließenden Scholium heißt, der Höhepunkt (*palmarium*) der gesamten Abhandlung, um dessen willen er das Übrige geschrieben habe. Er liefert die wahre allgemeine analytische Beziehung zwischen dem Bogen und der Tangente eines Kreises. Mehr sei in dieser Hinsicht dem Menschen nicht möglich, wie er unten – gemeint ist Satz 51 – zeigen werde.

Satz 32 betrachtet den Spezialfall  $BO = \frac{1}{8}$  des Kreisumfanges, gibt also den Wert von  $\frac{\pi}{4}$  in Form der konvergenten, alternierenden Reihe  $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \dots$  an. Dies sei die wahre numerische Kreisquadratur (Satz 32 Scholium). Mit der Frage, ob und inwiefern Satz 32 wahr ist, hat sich Leibniz im April 1676 an anderer Stelle beschäftigt (LSB VI, 3, N. 69). Mit Hilfe der in Satz 33 eingeführten harmonischen Reihe untersucht Leibniz die  $\arctan$ -Reihe bzw. leitet aus ihr weitere Reihen für Kreise mit speziellen ein- und umbeschriebenen Quadraten ab (Satz 35 bis 38), die er in Satz 42 für die Hyperbelquadratur wieder aufgreift (Probst 2006).

Zunächst schiebt er die Sätze zur Summierung der reziproken Dreieckszahlen (Satz 39) bzw. allgemein der reziproken figurierten Zahlen des harmonischen Dreiecks (Satz 40) ein. Er stellt die Analogie zu Pascals arithmetischem Dreieck heraus und die Anwendungsmöglichkeiten in der Kombinatorik, beim Würfelspiel und den zahlentheoretischen Partitionen, begnügt sich jedoch mit diesem Hinweis.

Die Reihe der reziproken Dreieckszahlen liefert ihm die Hyperbelreihe  $\frac{1}{8}, \frac{1}{48}, \frac{1}{120}$  usw. Er kannte diese Reihe aus (Brouncker 1668), einem Aufsatz, auf den er bereits nach Satz 14 angespielt hatte. Er erwähnt ihn nunmehr nochmals nach Satz 42, der die Ergebnisse zu den Reihen für die Hyperbelquadratur zusammenfasst. Zugleich zeigt er, wie dasselbe Ergebnis mittels Mercators Methode erhalten werden kann. Satz 43 gibt die allgemeine Quadratur für die zentrischen Kegelschnitte Kreis, Ellipse, Hyperbel. Er ist der Gipfel (*fastigium*) der allgemeinen Kegelschnittquadratur.

Mercators Ableitung der Hyperbelquadratur veranlasst Leibniz, die folgenden Sätze 44 bis 47 der Logarithmusfunktion zu widmen. Logarithmen führt er als Terme arithmetischer Folgen  $m, n, l, p, q, r, \dots$  ein, die einer geometrischen Folge  $a, b, c, d, e, f, \dots$  zugeordnet sind, wobei beliebige Verknüpfungen der Terme der geometrischen Folge entsprechende Verknüpfungen der arithmetischen Folge nach sich ziehen müssen. Dies lässt sich durch verschiedene arithmetische Folgen erreichen (Leibnizens Folgen B und C), nicht aber durch Leibnizens Folge D.

Die Logarithmuskurve führt Leibniz als diejenige Linie ein, die die Endpunkte der mittleren Proportionalen zwischen zwei gegebenen Strecken verbindet. Während für die Logarithmuskurve das Auffinden mittlerer Proportionalen oder von Verhältnisgleichungen erforderlich ist, ist für die zugehörige Quadratrix das Auffinden von Winkelteilungen nötig. Ausführlich geht Leibniz auf diese geometrisch-konstruktive Definition an Hand der Figur 14 ein, bevor er insbesondere die Reihenentwicklungen für  $\log(1+x)$ ,  $\log \frac{1}{1-x}$  ( $b=1$ ) ableitet und Hyperbelflächen mit unendlich langen Flächenseiten betrachtet (Satz 44, 45). Auf diese Weise leitet er die Divergenz der harmonischen Reihe ab, ein von Pietro Mengoli 1650 veröffentlichtes Ergebnis (Mengoli 1650).

Satz 46 gibt eine geometrische Quadratur der Logarithmusfigur, die die Konstruktion der Logarithmen nicht voraussetzt. Im Scholium erwähnt er die inverse Tangentenmethode die er oft verwende und mit deren Hilfe er die bewundernswerteste aller Eigenschaften der Logarithmuskurve ermittelt habe: die Abschnitte, die auf der Asymptote von den Schnittpunkten der Kurventangenten und der Größe der Ordinaten der Berührungspunkte erzeugt werden, sind gleich lang. Leibniz nennt diese Größe *b numerus primarius* oder Parameter. Sie weist den Ursprung der logarithmischen Kurve aus der Hyperbel auf. Satz 47 impliziert für den Fall  $b=1$  die Reihen für  $e^x - 1$  und  $e^{-x} - 1$  ( $x=1$  bzw.  $x=(1)$  oder  $(1)$ ). Von beiden Reihenentwicklungen zeigt Leibniz, dass sie gemäß seiner Definition eine logarithmische Kurve ergeben.

Satz 48 verwendet die Leibniz bekannte Newton'sche Reihenentwicklung für den sinus. Der Satz gibt die Reihe für den mit  $v$  bezeichneten sinus versus des Bogens  $a$ , das heißt für  $1 - \cos a$ , also (falls  $r=1$ )  $\frac{a^2}{2!} - \frac{a^4}{4!} + \frac{a^6}{6!} \mp \dots$ . Die drei Folgerungen enthalten unter anderem

Gottfried Wilhelm Leibniz

De quadratura arithmetica circuli ellipseos et  
hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine  
tabulis

Knobloch, E. (Hrsg.)

2016, VII, 303 S. 16 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-662-52802-0