

2 Ziel der Allgemeinen Relativitätstheorie

Das Ziel der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) ist die relativistische Verallgemeinerung der Newtonschen Gravitationstheorie (1.5, 1.4). Diese Verallgemeinerung kann verglichen werden mit dem Übergang von der Elektrostatik (1.6, 1.7) zur Elektrodynamik. Eine Skizze der Ähnlichkeiten und der Unterschiede zwischen diesen Verallgemeinerungen ermöglicht eine erste, vorläufige Beschreibung der Struktur der aufzustellenden Gravitationstheorie.

Die folgende Diskussion setzt die Kenntnis der Speziellen Relativitätstheorie (SRT) und der Elektrodynamik voraus; im Gegensatz zum Vorgehen in den folgenden Kapiteln werden die eingeführten Größen hier nicht näher erläutert. Die für die Entwicklung der ART relevanten Aspekte der SRT und der Elektrodynamik werden aber in Teil II in einiger Ausführlichkeit dargestellt.

Wir skizzieren die wohlbekannte Verallgemeinerung der Elektrostatik zur relativistischen Theorie, der Elektrodynamik. In einer dynamischen Theorie hängen die Ladungsdichte $\varrho_e(\mathbf{r}, t)$ und das Potenzial $\Phi_e(\mathbf{r}, t)$ von der Zeit t ab. Wenn man nun lediglich $\varrho_e = \varrho_e(\mathbf{r}, t)$ und $\Phi_e = \Phi_e(\mathbf{r}, t)$ in (1.6) einsetzt, erhält man ein Fernwirkungsgesetz; das heißt eine Änderung der Ladungsdichte ϱ_e an einem Ort würde eine gleichzeitige Änderung des Felds Φ_e an allen anderen Orten implizieren. Damit sich solche Änderungen nur mit Lichtgeschwindigkeit c fortpflanzen, muss der Laplace-Operator in (1.6) durch den d'Alembert-Operator ersetzt werden,

$$\Delta \implies \square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \quad (2.1)$$

Lässt man relativ zueinander bewegte Inertialsysteme zu, so ist die Ladungsdichte ϱ_e zwangsläufig mit einer Stromdichte verknüpft; Ladungsdichte und Stromdichte transformieren sich ineinander. In der vollständigen Theorie tritt daher an die Stelle der Ladungsdichte ϱ_e die Stromdichte j^α ,

$$\varrho_e \implies (\varrho_e c, \varrho_e v^i) = (j^\alpha) \quad (2.2)$$

Dabei bezeichnet v^i die kartesischen Komponenten der Geschwindigkeit \mathbf{v} . Der Verallgemeinerung der Quellterme (2.2) entspricht eine analoge Verallgemeinerung der Potenziale,

$$\Phi_e \implies (\Phi_e, A^i) = (A^\alpha) \quad (2.3)$$

Die relativistische Verallgemeinerung der Feldgleichung lässt sich somit durch

$$\Delta \Phi_e = -4\pi \varrho_e \implies \square A^\alpha = \frac{4\pi}{c} j^\alpha \quad (2.4)$$

ausdrücken. Die 0-Komponente der vier rechten Gleichungen reduziert sich im statischen Fall auf die linke Gleichung. Die rechten Gleichungen sind äquivalent zu den Maxwellgleichungen. Sie sind noch zu ergänzen durch die zugehörige Eichbedingung der Potentiale und die relativistische Verallgemeinerung der Bewegungsgleichung (Kapitel 6). Für gegebene Quellen werden sie durch die retardierten Potentiale gelöst.

Da Elektrostatik und Newtonsche Gravitationstheorie die gleiche mathematische Struktur haben, liegt der Versuch nahe, die Gravitationstheorie in analoger Weise zu verallgemeinern. Im Vergleich zum Vorgehen in (2.1) – (2.4) ergeben sich Ähnlichkeiten und Unterschiede, die wir kurz skizzieren.

Zunächst wird man die Ersetzung (2.1) auch in (1.5) vornehmen. Der nächste Punkt ist dann die (2.2) entsprechende Verallgemeinerung der Massendichte. Hier ergibt sich ein erster, wesentlicher Unterschied: Die Ladung q eines Teilchens ist unabhängig davon, wie sich das Teilchen bewegt; dies gilt nicht für seine Masse. Als Beispiel betrachte man ein Wasserstoffatom, das aus einem Proton (Ruhmasse m_p , Ladung $q_p = e$) und einem Elektron (Ruhmasse m_e , Ladung $q_e = -e$) besteht. Im Atom haben das Elektron und das Proton endliche Geschwindigkeiten. Die Ladung des Atoms ist $q = q_p + q_e = 0$, für die Masse gilt dagegen $m \neq m_p + m_e$. Formal bedeutet dies, dass die Ladung ein Lorentzskalar ist; deshalb können wir Elementarteilchen auch eine Ladung (und nicht etwa nur eine Ruhladung) zuordnen. Im Gegensatz dazu ist nur die Ruhmasse eine Eigenschaft eines Elementarteilchens.

Da die Ladung ein Lorentzskalar ist, transformiert sich die Ladungsdichte $\varrho_e = \Delta q / \Delta V$ wie die 0-Komponente eines Lorentzvektors (der Stromdichte j^α); denn $1/\Delta V$ erhält wegen der Längenkontraktion einen Faktor γ . Eine analog zu ϱ_e definierte Energie-Massendichte $\varrho = \Delta m / \Delta V$ transformiert sich dagegen wie die 00-Komponente eines Lorentztensors, den wir als Energie-Impuls-Tensor $T^{\alpha\beta}$ bezeichnen. Dies liegt daran, dass die Energie selbst die 0-Komponente eines 4-Vektors (des Viererimpulses p^α , Kapitel 4) ist. Daher tritt an die Stelle von (2.2) die Ersetzung

$$\varrho \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \varrho c^2 & \varrho c v^i \\ \varrho c v^i & \varrho v^i v^j \end{pmatrix} \sim (T^{\alpha\beta}) \quad (2.5)$$

Die hier nur unvollständig eingeführten Größen (Energie-Massendichte, Energie-Impuls-Tensor $T^{\alpha\beta}$) werden in Kapitel 7 definiert. Die Ersetzung (2.5) impliziert eine analoge Verallgemeinerung des Gravitationspotenzials Φ zu einer zweifach indizierten Größe, die wir als metrischen Tensor $g^{\alpha\beta}$ bezeichnen. Daraus ergäbe sich folgende Struktur der relativistischen Feldgleichung der Gravitation:

$$\Delta \Phi = 4\pi G \varrho \quad \Rightarrow \quad \square g^{\alpha\beta} \sim G T^{\alpha\beta} \quad (2.6)$$

Die numerische Konstante in der rechten Gleichung ist so zu bestimmen, dass die 00-Komponente im statischen Fall mit der linken Gleichung übereinstimmt. Für schwache Felder werden wir in der Tat relativistische Feldgleichungen mit ähnlicher Struktur erhalten.

Wegen der Masse-Energie-Äquivalenz kommt eine grundlegende Komplikation hinzu, die in der Elektrodynamik nicht auftritt: Da das Gravitationsfeld auch Träger von Energie ist, stellt es selbst eine Quelle des Felds dar. Dies führt zu einer *Nichtlinearität* der exakten Feldgleichungen. Im Gegensatz dazu ist das elektromagnetische Feld nicht Quelle des Felds; die elektromagnetischen Felder (oder die Photonen) tragen keine Ladung.

Wir fassen die wesentlichen Punkte, die die Struktur der gesuchten Gravitationstheorie bestimmen, zusammen:

1. Die ART ist eine relativistische Verallgemeinerung der Newtonschen Gravitationstheorie. Die identische Struktur der Newtonschen Theorie und der Elektrostatik führt zu zahlreichen Analogien zwischen der ART und der Elektrodynamik.
2. Weil die Energie-Massendichte sich wie die 00-Komponente eines Lorentztensors transformiert, führt die Verallgemeinerung von (1.5) zu einer Tensorfeldgleichung und nicht wie in der Elektrodynamik zu einer Vektorfeldgleichung.
3. Weil das Gravitationsfeld Energie enthält, stellt es selbst eine Quelle des Felds dar. Dies bedingt nichtlineare Feldgleichungen.



<http://www.springer.com/978-3-662-53105-1>

Allgemeine Relativitätstheorie

Fließbach, T.

2016, X, 381 S. 32 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-662-53105-1