

2 Identifikation linearer Systeme anhand nichtparametrischer Modelle im Zeit- und Frequenzbereich

2.1 Einführung

Nachfolgend werden als nichtparametrische Modelle linearer dynamischer Systeme die Übergangsfunktion $h(t)$, die Gewichtsfunktion $g(t)$ und der Frequenzgang $G(j\omega)$ betrachtet.¹ Es wird gezeigt, wie diese aus deterministischen und stochastischen Eingangs- und Ausgangssignalen $u(t)$ und $y(t)$ ermittelt werden können und wie sich aus ihnen in einfacher Weise parametrische Systemmodelle herleiten lassen.² Dazu soll zunächst an einige grundlegende Beziehungen zwischen $g(t)$, $h(t)$ und $G(j\omega)$ bei dynamischen Systemen erinnert werden [Unb08].

Der Zusammenhang zwischen dem Frequenzgang $G(j\omega)$ eines linearen, kausalen, zeitinvarianten, zeitkontinuierlichen Systems und der Impulsantwort $g(t)$ ist

$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega} = \int_{0^-}^{\infty} g(t) e^{-st} dt \Big|_{s=j\omega} = R(\omega) + jI(\omega) \quad (2.1)$$

mit $R(\omega) = \operatorname{Re} G(j\omega)$ und $I(\omega) = \operatorname{Im} G(j\omega)$. Die Beziehungen zwischen dem Frequenzgang $G(j\omega)$ und der Sprungantwort $h(t)$ lauten

$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega} = j\omega \int_{0^-}^{\infty} h(t) e^{-st} dt \Big|_{s=j\omega}, \quad (2.2)$$

und

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{R(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega \quad (2.3a)$$

oder

$$h(t) = R(0) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{I(\omega)}{\omega} \cos \omega t d\omega. \quad (2.3b)$$

¹ Die Funktionen $h(t)$ und $g(t)$ sind die Systemreaktionen auf einen Einheitssprung $\sigma(t)$ bzw. Einheits- oder δ -Impuls $\delta(t)$ zur Zeit $t = 0$ am Systemeingang und werden daher auch als (normierte) Sprungantwort und (normierte) Impulsantwort bezeichnet.

² Die Ermittlung nichtparametrischer Modelle wird auch als nichtparametrische Identifikation bezeichnet. Auf die Unterscheidung zwischen nichtparametrischen und parametrischen Modellen bzw. nichtparametrischer und parametrischer Identifikation wird in Abschnitt 7.2.5 genauer eingegangen.

Dabei wurde vorausgesetzt, dass die zu $G(j\omega)$ gehörende Übertragungsfunktion $G(s)$ in der gesamten geschlossenen rechten s -Halbebene (also inklusive der imaginären Achse und des Ursprungs) keine Pole besitzt. Auf die in Gln. (2.1) bis (2.3) angegebenen Beziehungen wird in diesem Kapitel mehrfach zurückgegriffen. Im Folgenden werden zunächst Verfahren für die Identifikation im Zeitbereich behandelt (Abschnitt 2.2). Anschließend werden in Abschnitt 2.3 Verfahren im Frequenzbereich betrachtet. Die Tabellen 2.1 und 2.2 geben eine Übersicht der in den nachfolgenden Abschnitten behandelten Verfahren mit Angabe der Randbedingungen und Eingangsdaten sowie der Ergebnisse. Wenngleich die Verfahren hier vor dem Hintergrund der nichtparametrischen Identifikation vorgestellt werden, ist aus den Tabellen ersichtlich, dass viele dieser Verfahren auch prinzipielle Umrechnungsbeziehungen zwischen verschiedenen Systembeschreibungen darstellen, denen die eingangs vorgestellten systemtheoretischen Beziehungen zugrunde liegen.

Tabelle 2.1 Verfahren zur nichtparametrischen Identifikation im Zeitbereich

Abschnitt	Randbedingungen/Eingangsdaten	Ergebnis
2.1.1	Sprungantwort gemessen	Ordnung, stationäre Verstärkung und Zeitkonstanten einer Übertragungsfunktion
2.1.2	Antwort auf einfache Testsignale gemessen	Übergangsfunktion (als graphischer Verlauf oder punktweise)
2.1.3	Eingangs- und Ausgangssignal gemessen	Gewichtsfunktion (punktweise)
2.1.4.2	Anregung mit binären oder ternären Rauschsignalen, Ausgangsgröße gemessen	Gewichtsfunktion (punktweise)
2.1.4.3	Geschlossener Regelkreis, Kreuzleistungsspektren von Führungs- und Ausgangsgröße und von Führungs- und Stellgröße bestimmt	Frequenzgang der Regelstrecke (punktweise)
2.1.4.4	Anregung mit Sinussignal, Kreuzkorrelationsfunktion zwischen Eingangs- und Ausgangsgröße gemessen/bestimmt	Realteil und Imaginärteil des Frequenzgangs (punktweise)
2.1.5	Gewichtsfunktion gegeben	Koeffizienten einer Übertragungsfunktion

Tabelle 2.2 Verfahren zur nichtparametrischen Identifikation im Frequenzbereich

Abschnitt	Randbedingungen/Eingangsdaten	Ergebnis
2.2.1	Frequenzgang gemessen (punktweise)	Koeffizienten einer Übertragungsfunktion
2.2.2.1	Sprungantwort gemessen	Frequenzgang
2.2.2.2	Anregung mit nichtsprungförmigem, deterministischem Testsignal, Ausgangsgröße gemessen	Frequenzgang
2.2.3	Verlauf des Frequenzgangs gegeben	Übergangsfunktion

2.2 Verfahren im Zeitbereich

2.2.1 Messung und Auswertung der Übergangsfunktion

Für dynamische Systeme mit verzögertem proportionalem oder integralem Verhalten, also PT_n - und IT_n -Systemen, sowie für einfaches PT_2S -Verhalten (Systeme mit einem konjugiert komplexen Polpaar in der linken s -Halbebene) existieren zahlreiche Analyseverfahren, um die Parameter einer gebrochen rationalen Übertragungsfunktion $G(s)$ mit und ohne Totzeit direkt aus dem graphischen Verlauf der Übergangsfunktion $h(t)$ zu ermitteln [Unb08]. Die meisten dieser Verfahren sind auf PT_n -Systeme zugeschnitten. Da aber IT_n -Systeme durch Integration von PT_n -Systemen entstehen und der Integralanteil sich stets einfach graphisch eliminieren lässt, ermöglichen diese Verfahren auch die Identifikation von IT_n -Systemen. Der Grundgedanke aller Verfahren besteht darin, eine vorgegebene Übergangsfunktion $h(t)$ durch bekannte einfache Übertragungsglieder zu approximieren. Dabei wird als Ansatz eine bestimmte Struktur für die zu bestimmende Modellübertragungsfunktion $G_M(s)$ gewählt. Die Parameter dieser Übertragungsfunktion werden dann anhand spezieller Kennwerte der Übergangsfunktion mit Hilfe von einfachen Rechenoperationen oder Diagrammen ermittelt. Grundsätzlich kann dabei unterschieden werden zwischen Wendetangenten- und Zeitprozentkennwerte-Verfahren. Die Wendetangenten-Verfahren basieren auf der Konstruktion der Wendetangente (siehe Bild 2.1a) von $h(t)$ im Wendepunkt (W) und der Bestimmung der Zeitabschnitte T_a (Anstiegszeit) und T_u (Verzugszeit). Beim Zeitprozentkennwerte-Verfahren (siehe Bild 2.1b) werden die Zeiten t_m bestimmt, bei denen $h(t_m)/K$ das m -fache seines stationären Endwertes erreicht hat, wobei m in Prozent angegeben wird und K die stationäre Verstärkung des Systems darstellt. In Bild 2.1b ist dies für $m = 30\%$ und $m = 80\%$ gezeigt.

Ohne auf die Details dieser Verfahren, die z.B. in [Unb08] ausführlich dargestellt sind, einzugehen, soll nur beispielhaft ein spezielles, sehr leistungsfähiges Wendetangenten-

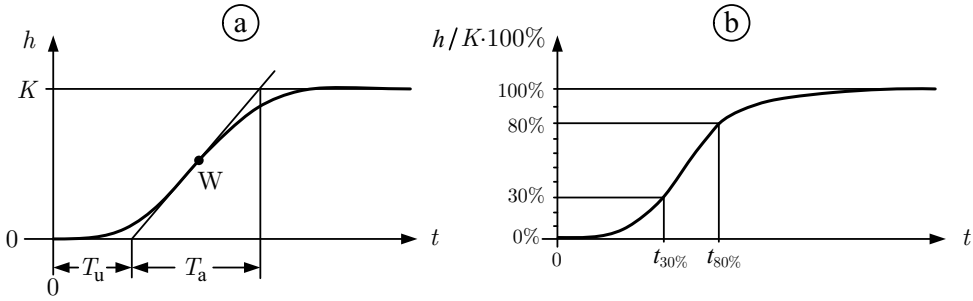


Bild 2.1 (a) Konstruktion der Wendetangente und (b) Ablesen der Zeitprozentkennwerte

Verfahren [Hud69] vorgestellt werden, welches als Modellstruktur die Übertragungsfunktion n -ter Ordnung

$$G_M(s) = \frac{K}{\prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{T}{1+i \cdot r} s + 1 \right)} \quad (2.4)$$

mit der stationären Verstärkung K und den n Zeitkonstanten T , $T/(1+r)$, $T/(1+2r)$, ..., $T/(1+(n-1)r)$ verwendet.³ Für diese Struktur wurden mit den Werten von $n = 2, 3, \dots, 7$ und $-1/(n-1) < r < 0$ die Quotienten T/T_a und T_u/T_a der Übergangsfunktion berechnet. Dies ist in Bild 2.2 dargestellt. Aus der vorgegebenen Übergangsfunktion muss mit einer Wendetangentenkonstruktion die Größe T_u/T_a ermittelt werden. Der Schnittpunkt der Linie $T_u/T_a = \text{const}$ mit der n -Kurve niedrigster Ordnung liefert die Werte $-r$ und T/T_a . Damit sind die Werte für n , r und T aus T_u und T_a bestimmt. Dieses Verfahren ermöglicht, wie das nachfolgende Beispiel zeigt, schnell recht gute Ergebnisse.

Beispiel 2.1

Es wird angenommen, dass aus einer gemessenen Übergangsfunktion die Werte

$$K = 1, \quad T_a = 15 \text{ s} \quad \text{und} \quad T_u = 4 \text{ s}$$

bestimmt wurden. Daraus wird das Verhältnis

$$T_u/T_a = \frac{4}{15} \approx 0,27$$

gebildet und mit diesem werden aus Bild 2.2 in den dargestellten Schritten 1 bis 3 die Werte

$$n = 4, \quad r = -0,25, \quad T/T_a = 0,1$$

und daraus

$$T = T_a \cdot 0,1 = 1,5 \text{ s}$$

ermittelt. Mit diesen Werten ergibt sich nach Gl. (2.4) die Übertragungsfunktion

³ Prinzipiell könnte das hier vorgestellte Verfahren aufgrund der Verwendung des Modells mit den Modellparametern K , T und r auch als parametrisches Identifikationsverfahren interpretiert werden. Da es sich aber um ein einfaches Ableseverfahren handelt, wird dieses zusammen mit den nichtparametrischen Identifikationsverfahren in diesem Kapitel behandelt.

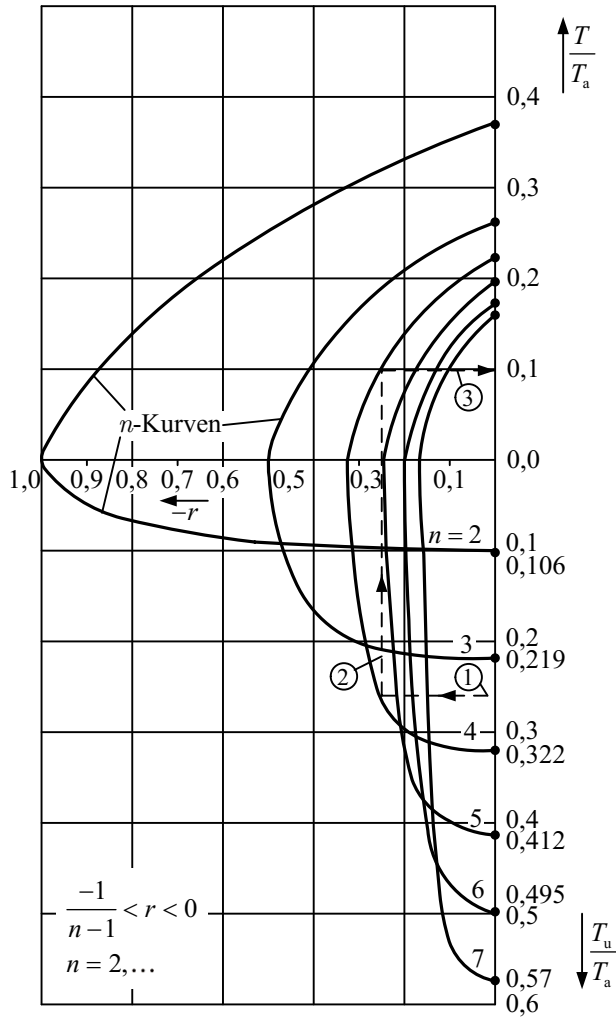


Bild 2.2 Diagramm zur Bestimmung der Kennwerte n , r und T von Gl. (2.4)

$$G_M(s) = \frac{1}{(Ts+1) \left(\frac{T}{1+r}s+1\right) \left(\frac{T}{1+2r}s+1\right) \left(\frac{T}{1+3r}s+1\right)}$$

$$= \frac{1}{(1,5s+1)(2s+1)(3s+1)(6s+1)}$$



2.2.2 Bestimmung der Übergangsfunktion aus der Antwort auf einfache Testsignale

Häufig lässt sich in der Praxis aus unterschiedlichen Gründen als Testsignal am Eingang des zu untersuchenden Systems keine sprunghafte Erregung über längere Zeit aufschalten. Können statt einer sprunghaften Erregung andere einfache Testsignale, wie z.B. Rechteck- oder Dreieckimpulse oder rampenförmige Signale, verwendet werden, kann auch in diesen Fällen sowohl die Übergangsfunktion $h(t)$ als auch die Gewichtsfunktion $g(t)$ einfach ermittelt werden. Dazu wird die Systemantwort über die Zerlegung des Testsignals in einzelne Anteile und entsprechende Überlagerung der Antworten auf die einzelnen Anteile bestimmt. Dies wird nachfolgend für einen Rechteckimpuls und für eine Rampenfunktion als Testsignal gezeigt.

Wird als Eingangstestsignal $u(t)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Rechteckimpuls $u_p(t)$ mit der Amplitude K^* und der Impulsdauer T_p verwendet, dann kann dieser aus der Überlagerung zweier um T_p verschobener Sprungfunktionen $\sigma(t)$ in der Form

$$u(t) = u_p(t) = K^*[\sigma(t) - \sigma(t - T_p)] \quad (2.5)$$

und das zugehörige Ausgangssignal durch

$$y(t) = K^*h(t) - K^*h(t - T_p)$$

dargestellt werden. Daraus folgt als Bestimmungsgleichung für die gesuchte Übergangsfunktion die Beziehung

$$h(t) = \frac{1}{K^*}y(t) + h(t - T_p), \quad t > 0. \quad (2.6)$$

Aus Gl. (2.6) lässt sich $h(t)$ unter der Bedingung, dass das System für $t \leq 0$ in Ruhe war und somit $y(t) = 0$ und $h(t) = 0$ gesetzt werden kann, leicht graphisch oder numerisch sukzessive aus $y(t)$ ermitteln.

Bei Verwendung einer Rampenfunktion mit der Anfangssteigung K^*/T_p und dem Endwert K^* bei $t = T_p$ als Eingangstestsignal kann dieses aus der Überlagerung zweier um die Zeit T_p verschobener und entgegen gerichteter Anstiegsfunktionen mit der Steigung K^*/T_p bzw. $-K^*/T_p$ gemäß Bild 2.3 zusammengesetzt werden. Diese Anstiegsfunktionen können auch aus der Integration zweier um die Zeit T_p gegeneinander verschobener Sprungfunktionen der Höhe K^*/T_p bzw. $-K^*/T_p$ gebildet werden. Unter der Voraussetzung eines linearen zeitinvarianten Systemverhaltens darf die Integration von der Eingangsseite auf die Ausgangsseite verschoben werden, womit sich dann durch Differentiation des Ausgangssignals $y(t)$ über die Beziehung

$$\frac{dy(t)}{dt} = K^*h(t) - K^*h(t - T_p) \quad (2.7)$$

die gesuchte Übergangsfunktion schließlich über

$$h(t) = \frac{T_p}{K^*} \frac{dy(t)}{dt} + h(t - T_p) \quad (2.8)$$

wieder sukzessive numerisch oder graphisch ermitteln lässt.

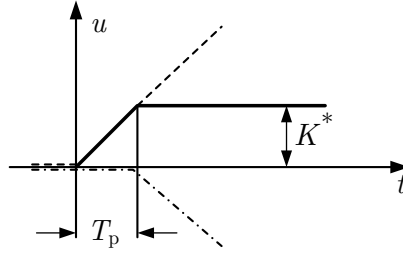


Bild 2.3 Rampenfunktion als Überlagerung zweier Anstiegsfunktionen

2.2.3 Bestimmung der Gewichtsfunktion durch numerische Entfaltung

Sofern für die Identifikation keine speziellen einfachen Testsignale verwendet werden können, kann die Gewichtsfunktion prinzipiell numerisch durch Entfaltung aus den gemessenen Eingangs- und Ausgangssignalen bestimmt werden, wie nachfolgend gezeigt wird.

Der allgemeine Zusammenhang zwischen Eingangssignal, $u(t)$ und Ausgangssignal, $y(t)$, sowie der Gewichtsfunktion $g(t)$ eines linearen zeitkontinuierlichen Systems wird durch das Duhamelsche Faltungsintegral

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) u(t - \tau) d\tau \quad (2.9)$$

beschrieben, wobei aufgrund der Kausalität des Systems, also $g(t) = 0$ für $t < 0$, als untere Integrationsgrenze 0 und mit der Annahme $u(t) = 0$ für $t < 0$ als obere Integrationsgrenze t gesetzt werden kann. Sind die Signalwerte von $u(t)$ und $y(t)$ zu den Zeitpunkten $0, \Delta\tau, 2\Delta\tau, \dots, k\Delta\tau$ bekannt, so lässt sich durch eine numerische Entfaltung der Gl. (2.9) die Gewichtsfunktion $g(t)$ punktweise ermitteln. Hierzu wird das Integral in Gl. (2.9) durch eine Rechteckapproximation näherungsweise in eine Summe überführt, also

$$y(i\Delta\tau) = \sum_{\nu=0}^i u(t - \nu\Delta\tau) g(\nu\Delta\tau) \Delta\tau, \quad (2.10)$$

wobei hier eine konstante Schrittweite $\Delta\tau$ angenommen wurde, die einen hinreichend kleinen Wert annehmen sollte.⁴ Für $i = 0, 1, 2, \dots, k$ ergibt sich aus Gl. (2.10) ein System von $k + 1$ Gleichungen

$$\begin{aligned} y(0) &= u(0)g(0)\Delta\tau \\ y(\Delta\tau) &= u(\Delta\tau)g(0)\Delta\tau + u(0)g(\Delta\tau)\Delta\tau, \\ &\vdots \\ y(k\Delta\tau) &= u(k\Delta\tau)g(0)\Delta\tau + \dots + u(0)g(k\Delta\tau)\Delta\tau \end{aligned} \quad (2.11)$$

⁴ Natürlich ist diese Rechteck- oder alternativ eine Trapezapproximation auch für nicht konstante Schrittweite möglich.

mit den $k + 1$ Unbekannten $g(0), \dots, g(k\Delta\tau)$. Durch eine Normierung der Zeitachse und der Gewichtsfolge $g(k)$ auf die Schrittweite $\Delta\tau$ gemäß Bild 2.4 geht Gl. (2.10) über in die Faltungssumme

$$y(k) = \sum_{\nu=0}^k u(k-\nu)g(\nu) \quad (2.12)$$

und Gl. (2.11) kann für die diskreten Zeitpunkte k auf die Vektor-Matrix-Darstellung

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(k) \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}(k)} = \underbrace{\begin{bmatrix} u(0) & 0 & \dots & 0 \\ u(1) & u(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(k) & u(k-1) & \dots & u(0) \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}(k)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ \vdots \\ g(k) \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}(k)} \quad (2.13)$$

gebracht werden. Über Inversion der Matrix $\mathbf{U}(k)$ kann dann die entfaltete Gewichtsfolge (als Approximation der Gewichtsfolge) gemäß

$$\mathbf{g}(k) = \mathbf{U}^{-1}(k)\mathbf{y}(k) \quad (2.14)$$

bestimmt werden.

Über diese numerische Entfaltung und Näherung der zur Berechnung der Übergangsfunktion erforderlichen Integration

$$h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau \quad (2.15a)$$

durch Summenbildung ergibt sich schließlich aus $g(k)$ die gesuchte Übergangsfolge, also die Übergangsfunktion, in der zeitnormierten diskreten Darstellung gemäß

$$h(k) = \sum_{\nu=0}^k g(\nu). \quad (2.15b)$$

Bei den Berechnungsverfahren zur direkten Lösung linearer Gleichungssysteme wie in Gl. (2.14) (z.B. Gaußsches Verfahren, Verfahren nach Gauß-Banachiewicz, Verfahren nach Gauß-Jordan mit Pivotsuche oder Quadratwurzelverfahren nach Cholesky) können allerdings numerische Schwierigkeiten aufgrund einer schlechten Konditionierung der zu invertierenden Matrix auftreten.

Bei der hier beschriebenen direkten Bestimmung der Gewichtsfolge durch Entfaltung handelt es sich um ein Interpolationsverfahren [Str75]. Die ist daran ersichtlich, dass die Gewichtsfolge so bestimmt wird, dass die mit der bestimmten Gewichtsfolge berechnete Ausgangsgröße exakt mit der gemessenen Ausgangsgröße übereinstimmt, die Gleichungen in dem Gleichungssystem (2.11) also exakt erfüllt werden. Bereits kleinste Mess- oder Rundungsfehler in den Messdaten können bei Interpolationsverfahren zu erheblichen Fehlern in dem bestimmten Modell führen, da das Modell ja exakt an die fehlerbehafteten Daten angepasst wird [Str75]. Bei der hier beschriebenen numerischen Entfaltung ist

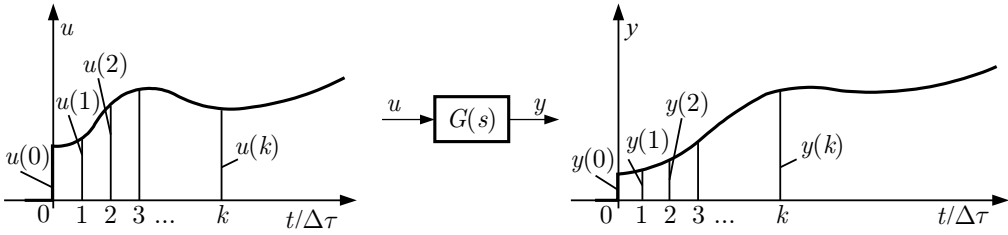


Bild 2.4 Beliebiges deterministisches Eingangssignal als Testsignal

dies auch daran ersichtlich, dass keinerlei Datenreduktion stattfindet. Aus $k + 1$ Messdaten werden $k + 1$ Elemente der Gewichtsfolge bestimmt. Eine mit einer Datenreduktion meist verbundene Rauschunterdrückung (z.B. im Sinne einer Mittelung) erfolgt damit nicht. Die Bestimmung der Gewichtsfolge durch direkte Entfaltung gemäß Gl. (2.14) ist daher nur bei nahezu ungestörten Signalen als brauchbar einzustufen. Soll direkt aus den Messdaten die Gewichtsfolge bestimmt werden, ist es auf jeden Fall vorzuziehen, ein Modell mit einer endlichen Gewichtsfolge (Modell mit endlicher Impulsantwort, *Finite-Impulse-Response-Modell*) anzunehmen und die Gewichtsfolge dann über Parameterschätzung zu bestimmen. Dabei ist dann in der Regel die Anzahl der verwendeten Messdaten erheblich größer als die Anzahl der zu schätzenden Parameter, sodass eine Datenreduktion stattfindet. Die Identifikation über Parameterschätzung wird in Kapitel 3 behandelt. Für die Bestimmung einer Gewichtsfolge endlicher Länge kann das in Abschnitt 3.3 behandelte *Least-Squares*-Verfahren verwendet werden.

2.2.4 Systemidentifikation mittels Korrelationsanalyse

2.2.4.1 Ermittlung der Gewichtsfunktion

Die meisten Systeme enthalten neben den eigentlichen Nutzsignalen (bei regelungstechnischen Systemen z.B. Führungsgröße und Stellsignal) auch zusätzliche Störungen. Wirkt beispielsweise eine innere (nicht messbare) Störung $z(t)$ gemäß Bild 2.5 auf das gemessene Ausgangssignal $y(t)$, so liefert das Duhamelsche Faltungsintegral für die Ausgangsgröße

$$y(t) = \int_0^{\infty} g(\sigma) u(t - \sigma) d\sigma + \int_0^{\infty} g_z(\sigma) z(t - \sigma) d\sigma, \quad (2.16)$$

wobei $g_z(t)$ die Gewichtsfunktion des Störverhaltens ist.

Für die über

$$R_{yu}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t) u(t + \tau) dt$$

bestimmte Kreuzkorrelationsfunktion (siehe Anhang B.1) ergibt sich damit

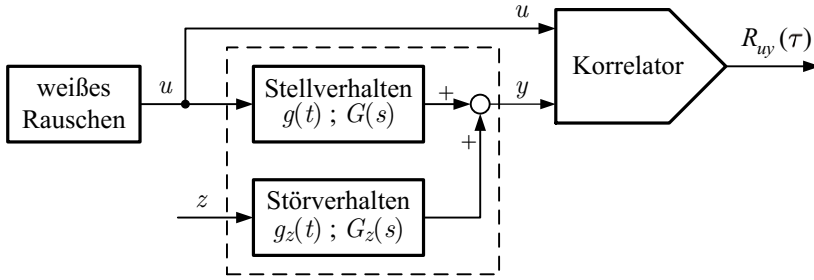


Bild 2.5 Messanordnung zur Bestimmung der Gewichtsfunktion

$$\begin{aligned}
 R_{yu}(\tau) = & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_0^{\infty} g(\sigma) u(t - \sigma) u(t + \tau) d\sigma dt \\
 & + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_0^{\infty} g_z(\sigma) z(t - \sigma) u(t + \tau) d\sigma dt.
 \end{aligned}$$

Die Auswertung dieser Integrale entsprechend dem in Anhang B.1 beschriebenen Vorgehen liefert

$$R_{yu}(\tau) = \int_0^{\infty} R_{uu}(\tau + \sigma) g(\sigma) d\sigma + \int_0^{\infty} R_{zu}(\tau + \sigma) g_z(\sigma) d\sigma. \quad (2.17)$$

Unter der Voraussetzung, dass das Störsignal $z(t)$ und die Eingangsgröße $u(t)$ unkorreliert sind und mindestens eines der Signale $z(t)$ und $u(t)$ mittelwertfrei ist, gilt

$$R_{zu}(\tau) = 0 \text{ für alle } \tau. \quad (2.18)$$

Damit vereinfacht sich Gl. (2.17) zu

$$R_{uy}(\tau) = R_{yu}(-\tau) = \int_0^{\infty} R_{uu}(\tau - \sigma) g(\sigma) d\sigma. \quad (2.19)$$

Diese Beziehung entspricht Gl. (B.4b) im Anhang B. Dort wird für den Spezialfall, dass das Eingangssignal $u(t)$ durch weißes Rauschen mit der spektralen Leistungsdichte $S_{uu}(\omega) = 1$ nach Gl. (A.88) mit $C = 1$ beschrieben wird, in Gl. (B.5) gezeigt, dass die Messanordnung gemäß Bild 2.5 als Kreuzkorrelationsfunktion gerade die Gewichtsfunktion des zu untersuchenden Systems liefert, also

$$g(\tau) = R_{uy}(\tau). \quad (2.20)$$

Für die praktische Anwendung von Gl. (2.20) sollte die spektrale Leistungsdichte $S_{uu}(\omega)$ näherungsweise in dem Frequenzbereich konstant sein, in dem der Frequenzgang $G(j\omega)$ des zu untersuchenden Systems nicht verschwindet. Um diesen sehr einfachen Zusammenhang von Gl. (2.20) bei einer Systemidentifikation auch praktisch voll auszunutzen,

wird daher in vielen Fällen als Systemeingangsgröße $u(t)$ ein annähernd weißes Rauschsignal gewählt. Dafür haben sich wegen der einfachen Auswertung insbesondere binäre und ternäre Rauschsignale gut bewährt, auf die nachfolgend näher eingegangen wird. An dieser Stelle soll auch darauf hingewiesen werden, dass die Korrelationsanalyse prinzipiell auch zur nichtparametrischen Identifikation nichtlinearer Systeme auf Basis der Volterra- und Wiener-Reihen-Darstellung einsetzbar ist, wobei Korrelationsfunktionen höherer Ordnung verwendet werden.⁵

2.2.4.2 *Korrelationsanalyse mittels binärer und ternärer Rauschsignale*

Im Folgenden wird die Korrelationsanalyse bei Verwendung von binären und ternären Rauschsignalen als Testanregung für das zu identifizierende System beschrieben.

a) Gewöhnliches binäres Rauschen als Testsignal

Zur Erregung eines dynamischen Systems kann als Eingangsgröße $u(t)$ ein stochastisches Telegrafensignal entsprechend Bild 2.6a verwendet werden. Dieses Signal nimmt nur die beiden Werte $+c$ und $-c$ an und besitzt folgende Eigenschaften:

- Die mittlere Anzahl der Vorzeichenwechsel von $u(t)$ pro Zeiteinheit ist ν .
- Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass n Vorzeichenwechsel im Zeitabschnitt τ auftreten, wird durch die Poisson-Verteilung [Sac78]

$$P(n) = \frac{(\nu\tau)^n}{n!} e^{-\nu\tau} \quad (2.21)$$

bestimmt.

Die zugehörige Autokorrelationsfunktion

$$R_{uu}(\tau) = E\{u(t)u(t+\tau)\} \quad (2.22)$$

ergibt sich zu [Lan73]

$$R_{uu}(\tau) = c^2 e^{-2\nu|\tau|} . \quad (2.23)$$

Als spektrale Leistungsdichte des Signals $u(t)$ folgt mit Gl. (A.80)

$$S_{uu}(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R_{uu}(\tau) \cos \omega\tau \, d\tau \quad (2.24)$$

und durch Einsetzen von Gl. (2.23) schließlich

$$S_{uu}(\omega) = \frac{4c^2\nu}{\omega^2 + 4\nu^2} . \quad (2.25)$$

⁵ Die Volterra- und die Wiener-Reihe werden in den Abschnitten 7.3.1 und 7.3.2 detaillierter betrachtet und die Bestimmung der Kerne wird in Abschnitt 8.3.2 behandelt.

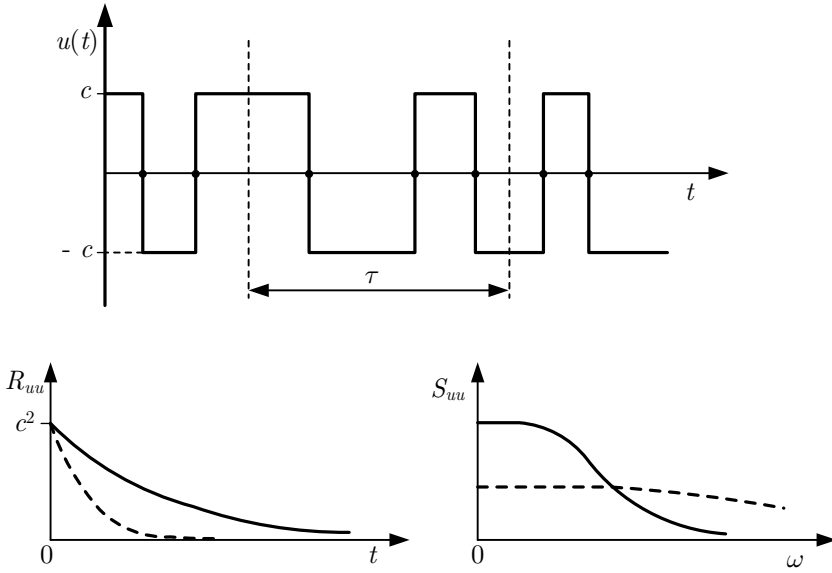


Bild 2.6 Zeitverlauf, Autokorrelationsfunktion $R_{uu}(\tau)$ und spektrale Leistungsdichte eines Telegrafensignals $S_{uu}(\omega)$ für kleine Werte (durchgezogene Linie) und große Werte (gestrichelte Linie) von ν

Die Verläufe von $R_{uu}(\tau)$ und $S_{uu}(\omega)$ sind in Bild 2.6b dargestellt. Der Vergleich mit Gl. (A.92) zeigt, dass diese spektrale Leistungsdichte der eines Gauß-Markov-Prozesses entspricht. Gemäß Bild 2.6b ergibt sich bei großen Werten von ν über einen weiten Frequenzbereich ein nahezu konstanter Wert der spektralen Leistungsdichte. Dieses Verhalten kommt also dem weißen Rauschen bereits sehr nahe. Die zugehörige Autokorrelationsfunktion kann dann ebenfalls näherungsweise durch einen δ -Impuls beschrieben werden, dessen Gewichtung sich ergibt, indem über $R_{uu}(\tau)$ im Bereich $-\infty < \tau < \infty$ integriert wird. Da außerdem definitionsgemäß das Integral über den δ -Impuls im Bereich $-\infty < \tau < \infty$ den Wert 1 liefert, resultiert schließlich

$$R_{uu}(\tau) \approx \frac{c^2}{\nu} \delta(\tau) . \quad (2.26)$$

Einsetzen von Gl. (2.26) in Gl. (B.4b) ergibt unter Berücksichtigung der Ausblendeigenschaft des δ -Impulses die Kreuzkorrelationsfunktion

$$R_{uy}(\tau) \approx \frac{c^2}{\nu} g(\tau) . \quad (2.27)$$

Die gesuchte Gewichtsfunktion

$$g(\tau) \approx \frac{\nu}{c^2} R_{uy}(\tau) , \quad (2.28)$$

die aus Gl. (2.27) angenähert folgt, ist also der Kreuzkorrelationsfunktion direkt proportional.

Für die Berechnung der Kreuzkorrelationsfunktion wird zweckmäßigerweise Gl. (A.59) gewählt, da hier das Eingangssignal $u(t)$ um die diskreten Werte $\tau = \tau_k$ verschoben werden kann. Da $u(t)$ nur die beiden Werte $+c$ und $-c$ annimmt, kann für $\tau = \tau_k$ anstelle von $u(t - \tau_k)$ die Beziehung $c \operatorname{sgn} u(t - \tau_k)$ gesetzt werden. Somit ergibt sich für eine genügend große Integrationszeit T in Analogie zu Gl. (A.59) näherungsweise

$$R_{uy}(\tau_k) \approx \frac{c}{T} \int_0^T y(t) \operatorname{sgn} u(t - \tau_k) dt . \quad (2.29)$$

Die Multiplikation unter dem Integral wird also hier auf eine Vorzeichenumkehr von $y(t)$ entsprechend dem Eingangssignal zurückgeführt. Die gesuchte Gewichtsfunktion folgt dann aus den Gln. (2.28) und (2.29) als

$$g(\tau_k) \approx \frac{\nu}{Tc} \int_0^T y(t) \operatorname{sgn} u(t - \tau_k) dt . \quad (2.30)$$

Die Erzeugung des binären Rauschsignals und seine Zeitverschiebung lassen sich mittels eines Rechners einfach realisieren.

b) Quantisiertes binäres Rauschsignal als Testsignal

Für die praktische Anwendung eines binären Rauschsignals erweist sich eine zeitliche Quantisierung desselben als sehr vorteilhaft. Das zeitlich quantisierte Signal besitzt während der äquidistanten Intervalle Δt den festen Wert $+c$ oder $-c$. Änderungen von einem Wert zum anderen treten rein zufällig, aber stets am Ende derartiger Intervalle auf. Die Autokorrelationsfunktion dieses Signals lautet [Fun75]

$$R_{uu}(\tau) = \begin{cases} c^2 (1 - |\frac{\tau}{\Delta t}|) & \text{für } |\tau| \leq \Delta t, \\ 0 & \text{für } |\tau| > \Delta t. \end{cases} \quad (2.31)$$

Bei einer Verschiebung von $u(t)$ um $\tau = \Delta t$ können somit $u(t)$ und $u(t - \tau)$ als unkorreliert angesehen werden. Die graphische Darstellung des quantisierten Rauschsignals $u(t)$ und seiner Autokorrelationsfunktion $R_{uu}(\tau)$ zeigt Bild 2.7. Diese Autokorrelationsfunktion kann bei genügend kleinem Δt ebenfalls näherungsweise durch einen δ -Impuls ersetzt werden. Somit geht Gl. (2.31) über in

$$R_{uu}(\tau) \approx c^2 \Delta t \delta(\tau) , \quad (2.32)$$

wobei $c^2 \Delta t$ gerade die Fläche unter der Autokorrelationsfunktion und damit das Gewicht des δ -Impulses ist. Die weitere Auswertung erfolgt dann entsprechend dem im letzten Abschnitt beschriebenen Weg.

c) Quantisierte binäre und ternäre Pseudo-Rauschsignale als Testsignal

Rein stochastische Testsignale, wie in den beiden vorangegangenen Abschnitten beschrieben, haben für die praktische Anwendung einige Nachteile. So kann z.B. die angestrebte ideale Autokorrelationsfunktion des Testsignals nur bei nicht realisierbarer unendlich breiter spektraler Leistungsdichte erreicht werden. Ferner ist zum Erzielen einer gewissen statistischen Sicherheit bei der Bestimmung der Kreuzkorrelationsfunktion eine große

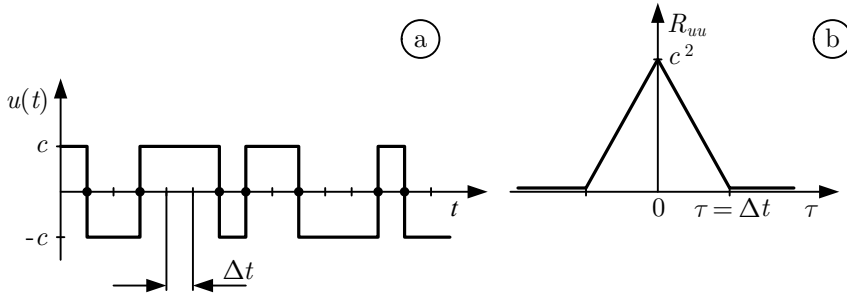


Bild 2.7 (a) Quantisiertes binäres Rauschsignal $u(t)$ und (b) zugehörige Autokorrelationsfunktion $R_{uu}(\tau)$

Korrelationszeit, also Messzeit, erforderlich. Daher werden bei der praktischen Durchführung von Korrelationsanalysen bevorzugt einfach erzeugbare, spezielle periodische binäre und ternäre Testsignale verwendet, bei denen die Kreuzkorrelationsfunktion mit voller Genauigkeit, jedoch nur für den Fall, dass keine zusätzlichen Störungen vorhanden sind, bereits nach Integration über eine Periode exakt vorliegt. Diese Testsignale ermöglichen aber auch bei zusätzlich vorhandenen Störsignalen am Systemausgang (vgl. Bild 2.5), z.B. bei Messrauschen, wesentlich kürzere Messzeiten zur Bestimmung der Kreuzkorrelationsfunktion als bei Verwendung rein stochastischer Testsignale.

Die bei der Identifikation dynamischer Systeme verwendeten binären und ternären Impulsfolgen haben aufgrund ihrer statistischen Eigenschaften unterschiedliche Anwendungsbereiche. In Tabelle 2.3 werden die Hauptmerkmale dieser Impulsfolgen systematisch zusammengefasst und gegenübergestellt [UF74]. Dabei wird zwischen folgenden, für die praktische Anwendung wichtigen, Impulsfolgen unterschieden:

a) Binäre Impulsfolgen bzw. PRBS-Signale (*Pseudo-Random Binary Sequence*):

- m -Impulsfolge,
- modifizierte m -Impulsfolge und
- maximal orthogonale Impulsfolge.

b) Ternäre Impulsfolgen.

Aufgrund ihrer einfachen Erzeugung wird die m -Impulsfolge am häufigsten zur Korrelationsanalyse verwendet. Daneben wird aber auch die ternäre Impulsfolge eingesetzt [God66, Jul72, Fun75].

Alle diese Pseudo-Rauschsignale haben eine ähnliche Autokorrelationsfunktion wie das weiße Rauschen. Wegen der Periodizität des Testsignals

$$u(t) = u(t + T) \quad (2.33)$$

Tabelle 2.3 Hauptmerkmale einiger wichtiger binärer und ternärer Impulsfolgen [UF74]

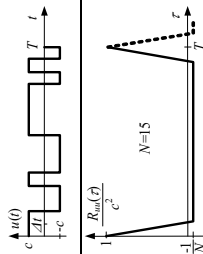
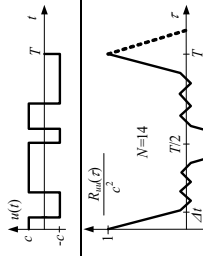
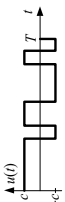
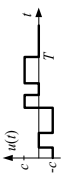
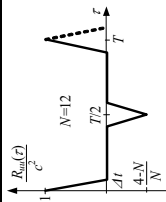
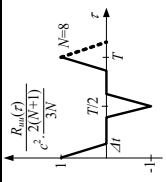
	m -Impulsfolge	modifizierte m -Impulsfolge
Anzahl der Einzelimpulse pro Periode	$N = 2^n - 1$ (z.B. 15, 31, 63, 127)	$N = 2(2^n - 1)$ (z.B. 30, 62, 126)
Amplitudenwerte	$\pm c$	$\pm c$
Mittelwert $\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$	$\bar{u} = \pm \frac{c}{N}$	$\bar{u} = 0$
Periodizität Beispiel einer Impulsfolge	$u(t) = u(T + t), T = N\Delta t$	$u(t) = u(T + t), u(t) = -u(T/2 + t), T = N\Delta t$
Autokorrelationsfunktion $\frac{R_{uu}(\tau)}{c^2} =$	 $\begin{cases} 1 - \frac{N+1}{N} \frac{\tau}{\Delta t}, & 0 \leq \tau < \Delta t \\ -\frac{1}{N}, & \Delta t \leq \tau \leq (N-1)\Delta t \\ \frac{\tau}{\Delta t} \frac{N+1}{N} - N, & (N-1)\Delta t < \tau \leq N\Delta t \end{cases}$	 $\begin{cases} 1 - \frac{N-2}{N} \frac{\tau}{\Delta t}, & 0 \leq \tau < \Delta t \\ \frac{4\tau}{N\Delta t} + \frac{4i+2}{N}, & i\Delta t \leq \tau < (i+1)\Delta t \\ \frac{4\tau}{N\Delta t} - \frac{4i+2}{N}, & i = 1, 3, \dots, \frac{N}{2} - 2, \frac{N}{2} + 2, \dots, N-3 \\ \frac{N-4}{2} - \frac{N-2}{N} \frac{\tau}{\Delta t}, & i\Delta t \leq \tau < (i+1)\Delta t, \\ \frac{N-2}{N} \frac{\tau}{\Delta t} - \frac{N}{2}, & i = 2, 4, \dots, \frac{N}{2} - 3, \frac{N}{2} + 1, \dots, N-2 \\ \frac{N-2}{N} \frac{\tau}{\Delta t} - N + 3, & (\frac{N}{2} - 1)\Delta t \leq \tau < \frac{N}{2}\Delta t \\ \frac{N-2}{N} \frac{\tau}{\Delta t} - N + 3, & (\frac{N}{2} - 1)\Delta t \leq \tau \leq N\Delta t \end{cases}$
Kreuzkorrelationsfkt. zur Berechnung von $g(t)$ für $\tau \geq \Delta t$	$R_{uy}(\tau) = c^2 \frac{N+1}{N} \Delta t g(\tau) - \frac{c^2}{N} \int_0^T g(\vartheta) d\vartheta$	$R_{uy}(\tau) = c^2 \frac{N+2}{N} \Delta t g(\tau)$
Bedingung für das Zeitverhalten von $g(\tau)$	$g(\tau)$ muss für $\tau = (N-1)\Delta t$ abgeklungen sein	$g(\tau)$ muss für $\tau = (\frac{N}{2} - 1)\Delta t$ abgeklungen sein

Tabelle 2.3 (Fortsetzung)

	max. orthogonale Impulsfolge	ternäre Impulsfolge
Anzahl der Einzelimpulse pro Periode	$N = 8n - 4$ (z.B. 12, 20, 28)	$N = 3^n - 1$ (z.B. 26, 80, 242)
Amplitudenwerte	$\pm c$	$\pm c$
Mittelwert $\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$	$\pm \bar{u} = \frac{2c}{N}$	$\bar{u} = 0$
Periodizität	$u(t) = u(T+t), T = N\Delta t$	$u(t) = u(T+t), u(t) = -u(T/2+t), T = N\Delta t$
Beispiel einer Impulsfolge		
Autokorrelationsfunktion $\frac{R_{uu}(\tau)}{c^2} =$	 $\begin{cases} 1 - \frac{\tau}{T}, & 0 \leq \tau < \Delta t \\ \frac{N-4}{N} \left(\frac{N}{2} - 1 - \frac{\tau}{\Delta t} \right), & (\frac{N}{2} - 1) \Delta t \leq \tau < \frac{N}{2} \Delta t \\ \frac{N-4}{N} \left(\frac{\tau}{\Delta t} - \frac{N}{2} - 1 \right), & \frac{N}{2} \Delta t \leq \tau < \frac{N+2}{2} \Delta t \\ \frac{t}{\Delta t} - N + 1, & (N-1) \Delta t \leq \tau \leq N \Delta t \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$	 $\begin{cases} 1 - \frac{\tau}{T}, & 0 \leq \tau < \Delta t \\ \frac{N}{2} - 1 - \frac{\tau}{\Delta t}, & (\frac{N}{2} - 1) \Delta t \leq \tau < \frac{N}{2} \Delta t \\ \frac{\tau}{\Delta t} - \frac{N}{2} - 1, & \frac{N}{2} \Delta t \leq \tau < (\frac{N}{2} - 1) \Delta t \\ \frac{\tau}{\Delta t} - N + 1, & (N-1) \Delta t \leq \tau \leq N \Delta t \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
Kreuzkorrelationsfkt. zur Berechnung von $g(t)$ für $\tau \geq \Delta t$	$R_{uy}(\tau) = c^2 \Delta t g(\tau)$	$R_{uy}(\tau) = \frac{2}{3} c^2 \frac{N+1}{N} \Delta t g(\tau)$
Bedingung für das Zeitverhalten von $g(\tau)$	$g(\tau)$ muss für $\tau = (\frac{N}{2} - 1) \Delta t$ abgeklungen sein	$g(\tau)$ muss für $\tau = (\frac{N}{2} - 1) \Delta t$ abgeklungen sein

kann die obere Integrationsgrenze bei der Bestimmung der Korrelationsfunktion durch die Periodendauer T ersetzt werden, und es folgt in Analogie zu Gl. (A.73) für die Autokorrelationsfunktion

$$R_{uu}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)u(t+\tau) dt \quad (2.34)$$

und für die Kreuzkorrelationsfunktion

$$R_{uy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)y(t+\tau) dt \quad (2.35a)$$

bzw.

$$R_{uy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T u(t-\tau)y(t) dt . \quad (2.35b)$$

Somit genügt bei Verwendung von Pseudo-Rauschsignalen als Eingangssignal $u(t)$ unter der Voraussetzung, dass $y(t)$ keine zusätzlichen Störungen enthält, zur genauen Ermittlung der Korrelationsfunktionen die Integration über nur eine Periode dieses Testsignals $u(t)$. Dies lässt sich, wie nachfolgend gezeigt, beweisen.

Gl. (B.4b) liefert in modifizierter Schreibweise

$$R_{uy}(\tau) = \int_0^T g(\vartheta)R_{uu}(\tau-\vartheta) d\vartheta + \int_T^{2T} g(\vartheta)R_{uu}(\tau-\vartheta) d\vartheta + \dots \quad (2.36)$$

Unter Berücksichtigung der Ausblendeigenschaft des δ -Impulses, der angenähert in der Autokorrelationsfunktion des Pseudo-Rauschsignals periodisch auftritt (vgl. Tabelle 2.3), ergibt sich schließlich

$$R_{uy}(\tau) = A(g(\tau) + g(\tau+T) + \dots) \text{ für } \tau > 0, \quad (2.37)$$

wobei A einen Bewertungsfaktor darstellt, der die nicht ideale Form der Autokorrelationsfunktion berücksichtigt und der Fläche unter dem bei $\tau = 0$ auftretenden Dreieckimpuls entspricht. Wird jetzt z.B. für eine m -Impulsfolge die Periodendauer T (bzw. für die übrigen Impulsfolgen $T/2$) geringfügig größer als die Abklingzeit der Gewichtsfunktion gewählt, also so, dass

$$g(\tau) \approx 0 \text{ für } \tau > T \quad (2.38)$$

gilt, dann ergibt sich anstelle von Gl. (2.37) die Kreuzkorrelationsfunktion

$$R_{uy}(\tau) \approx \begin{cases} Ag(\tau) & \text{für } 0 < \tau < T, \\ \frac{A}{2}g(0) & \text{für } \tau = 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

und die gesuchte Gewichtsfunktion

$$g(\tau) \approx \begin{cases} \frac{1}{A} R_{uy}(\tau) & \text{für } 0 < \tau < T, \\ \frac{2}{A} R_{uy}(0) & \text{für } \tau = 0. \end{cases} \quad (2.40)$$

Die gemessene bzw. numerisch aus Messwerten ermittelte Kreuzkorrelationsfunktion ist also angenähert proportional der gesuchten Gewichtsfunktion, aus der dann unter Verwendung bekannter Verfahren (siehe z.B. [Git70]) oder über die Auswertung der zugehörigen Übergangsfunktion gemäß Gl. (2.15) die Struktur und die Parameter der Übertragungsfunktion bestimmt werden können.

Wie oben bereits erwähnt, stellen die Autokorrelationsfunktionen periodischer Impulsfolgen nur näherungsweise mit T bzw. $T/2$ sich wiederholende positive bzw. negative δ -Impulse dar (vgl. Tabelle 2.3). Deshalb wird jeweils aus der dreieckimpulsförmigen Fläche der Autokorrelationsfunktion bei $\tau = 0$ der Bewertungsfaktor A abgeleitet, sodass dann für die Autokorrelationsfunktion der m -Impulsfolge und für die der modifizierten m -Impulsfolge in dem für die Identifikation interessierenden Bereich

$$R_{uu}(\tau) \approx c^2 \frac{N+1}{N} \Delta t \delta(\tau) \quad (2.41)$$

gilt sowie entsprechend für die Autokorrelationsfunktion der ternären Impulsfolge

$$R_{uu}(\tau) \approx \frac{2}{3} c^2 \frac{N+1}{N} \Delta t \delta(\tau) . \quad (2.42)$$

Damit ergibt sich gemäß Gl. (2.40) als Bestimmungsgleichung für die gesuchte Gewichtsfunktion:

- bei Verwendung von m - und modifizierten m -Impulsfolgen

$$g(\tau) \approx \begin{cases} \frac{1}{c^2 \frac{N+1}{N} \Delta t} R_{uy}(\tau) & \text{für } 0 < \tau \leq \tau_{\max}, \\ \frac{2}{c^2 \frac{N+1}{N} \Delta t} R_{uy}(\tau) & \text{für } \tau = 0, \end{cases} \quad (2.43)$$

mit

$$\tau_{\max} = \begin{cases} (N-1)\Delta t & \text{für die } m\text{-Impulsfolge,} \\ \left(\frac{N}{2} - 1\right) \Delta t & \text{für die modifizierte } m\text{-Impulsfolge.} \end{cases}$$

- bei Verwendung der ternären Impulsfolge

$$g(\tau) \approx \begin{cases} \frac{1}{\frac{2}{3} c^2 \frac{N+1}{N} \Delta t} R_{uy}(\tau) & \text{für } 0 < \tau \leq \left(\frac{N}{2} - 1\right) \Delta t, \\ \frac{1}{\frac{1}{3} c^2 \frac{N+1}{N} \Delta t} R_{uy}(\tau) & \text{für } \tau = 0. \end{cases} \quad (2.44)$$

Zusätzlich muss bei den Autokorrelationsfunktionen, die zwischen den dreieckförmigen Impulsen nicht den Wert null aufweisen (z.B. bei der m -Impulsfolge und der modifizierten m -Impulsfolge), dieser Anteil bei der Ermittlung der Gewichtsfunktion aus der Kreuzkorrelationsfunktion noch berücksichtigt werden, sofern dieser Einfluss nicht durch günstig eingestellte Versuchsparameter, z.B. große Werte von N , vernachlässigt werden kann.

Die praktische Ausführung der Korrelationsanalyse zum Bestimmen der Gewichtsfunktion $g(\tau)$ geschieht zu diskreten Zeitpunkten $\tau_i = i\Delta t$. Die kontinuierliche Gewichtsfunktion wird damit durch die diskrete Gewichtsfolge

$$g_i = g(i\Delta t), \quad i = 0, 1, \dots, W, \quad (2.45)$$

ersetzt, wobei ausreichend viele Punkte der Impulsantwort berücksichtigt werden müssen, W also so gewählt werden muss, dass $g(i\Delta t) \approx 0$ für $i = W + 1, W + 2, \dots$ gilt. Gl. (2.45) kann nun in der Form

$$G_i = g_i \left[\frac{1}{W+1} \sum_{i=0}^W g_i^2 \right]^{-1/2} \quad (2.46)$$

normiert werden. Für die anhand einer Korrelationsanalyse bestimmten Werte von G_i ergibt sich bei Verwendung einer m -Impulsfolge als Varianz [Cum70]

$$\sigma_{G_i}^2 = \sigma_{R_{uu}}^2 - \frac{1}{\lambda R}. \quad (2.47)$$

In dieser Beziehung ist R die Anzahl der für eine Messung verwendeten Einzelimpulse der Länge Δt ,

$$\lambda = \frac{E\{y^2(t)\}}{E\{z^2(t)\}} \quad (2.48)$$

ist das Signal-Rausch-Verhältnis und

$$\sigma_{R_{uu}}^2 = \left(\frac{R^*}{R} \right)^2 \left[\frac{1}{R^*} - \frac{1}{N} \right] \left[1 + \frac{1}{N} \right]$$

ist die Varianz der nicht idealen Form der Autokorrelationsfunktion der m -Impulsfolge, wenn R kein ganzzahliges Vielfaches von N ist. Dabei ist $R^* = R \bmod N$ gilt, d.h. R^* stellt den ganzzahligen Rest dar, der bei der Division von R durch N übrig bleibt, wobei $0 \leq R^* \leq N - 1$ ist (so würde sich z.B. mit $R = 35$ und $N = 5$ der Wert $R^* = 35 \bmod 5 = 0$ ergeben).

Die Standardabweichung von G_i , also die Wurzel von $\sigma_{G_i}^2$ aus Gl. (2.47), ist in Bild 2.8 für $N = 127$ über R dargestellt, wobei für λ verschiedene Werte als Parameter gewählt wurden. Hieraus ist ersichtlich, dass für kleine Werte λ der Fehler beim Bestimmen der Gewichtsfunktion am größten ist. Bei großen Werten von λ , also im weniger gestörten Fall, werden diese Fehler weitgehend durch die nichtideale Form der Autokorrelationsfunktion des Testsignals bestimmt. Im ungestörten Fall ($\lambda \rightarrow \infty$) wird der Fehler bei $R = N, 2N, \dots$ zu null. Daher erweist es sich hier als zweckmäßig, als Messdauer gerade die Periodendauer $T = N\Delta t$ oder ein ganzzahliges Vielfaches derselben zu wählen.

Bild 2.9 zeigt die Standardabweichung der normierten Gewichtsfunktion für verschiedene m -Impulsfolgen im ungestörten Fall. Bei Auftreten von Störungen ($\lambda < \infty$) verschieben sich alle Kurven gemäß Bild 2.8 nach oben. Aus dieser Darstellung ist ersichtlich, dass z.B. bei gleicher Zeitdauer Δt eines Einzelimpulses die Standardabweichung der ermittelten Punkte der Gewichtsfunktion für zunehmendes N größer wird. Wird allerdings für verschiedene m -Impulsfolgen, also für unterschiedliche N -Werte, eine gleiche Periodendauer $T = N\Delta t$ zugrunde gelegt, dann würden sich die Verhältnisse gerade umkehren. Dabei müsste dann für zunehmende N -Werte die Impulsdauer verkleinert werden. Andererseits

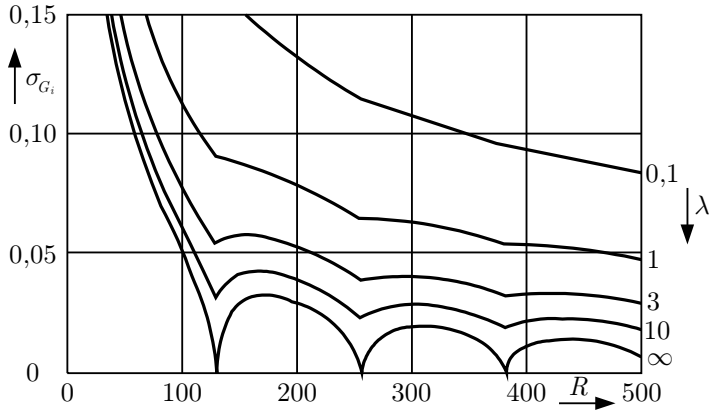


Bild 2.8 Einfluss der Messdauer und des Signal-Rausch-Verhältnisses λ auf die Standardabweichung der gemessenen Gewichtsfunktion für eine m -Impulsfolge mit $N = 127$ ($\lambda = \infty$ entspricht dem ungestörten Fall)

darf aber Δt nicht zu klein gewählt werden, da sonst das Signal-Rausch-Verhältnis des Ausgangssignals zu ungünstig wird, d.h. das Störsignal $z(t)$ würde dann überwiegen, vorausgesetzt, dass nicht die Amplitude c des Testsignals vergrößert wird.

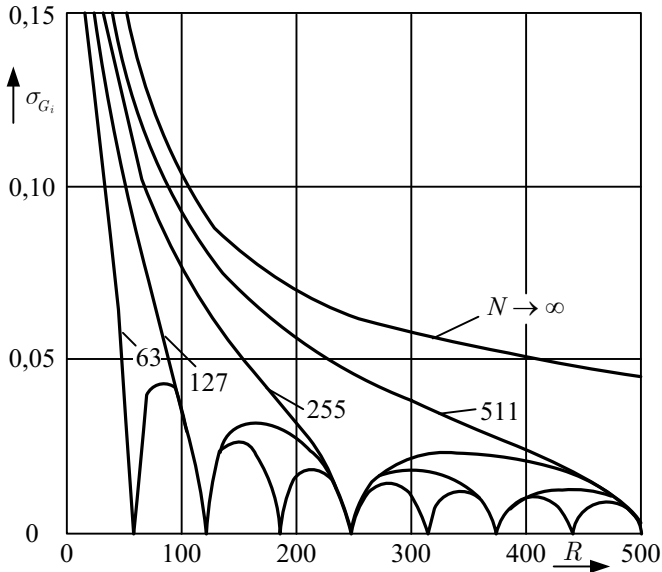


Bild 2.9 Standardabweichung der gemessenen Gewichtsfunktion bei Verwendung verschiedener m -Impulsfolgen für $z(t) = 0$ ($\lambda = \infty$) und $\Delta t = \text{const}$

Es erscheint in jedem Fall zweckmäßig, in Abhängigkeit vom Störsignal bei der Wahl von N und Δt einen Kompromiss zwischen Genauigkeit und Auflösung des Ausgangssignals zu erzielen. Die nur von Δt abhängige spektrale Leistungsdichte des Testsignals (bezogen auf die Bandbreite ω_b) muss etwa das 10- bis 30-fache der Bandbreite des untersuchten Systems betragen, damit die gleichmäßige Erregung aller Frequenzen gewährleistet ist. Dazu haben sich bei der praktischen Ausführung der Korrelationsanalyse mit binären m -Impulsfolgen und ternären Impulsfolgen für die Auswahl von N und Δt bzw. T folgende Regeln gut bewährt:

- T wird etwas größer als die Abklingzeit des Systems gewählt (meist kann diese grob aus Vorversuchen bestimmt werden).
- Für m -Impulsfolgen wird $N = 15, 31$ oder 63 gewählt, wobei $N = 15$ bei stark gestörtem Ausgangssignal und $N = 63$ bei schwach gestörtem Ausgangssignal zu verwenden ist. Für ternäre Impulsfolgen wird entsprechend $N = 26$ oder $N = 80$ gesetzt.

Zur praktischen Ermittlung der Kreuzkorrelationsfunktion $R_{uy}(\tau)$ können der in Bild 2.5 gezeigten ähnliche Messanordnungen verwendet werden, wobei als Eingangssignal das periodische Signal $u(t)$ vorgesehen werden muss und für die Korrelationszeit (Messzeit) zweckmäßigerweise ein ganzzahliges Vielfaches der Impulsfolge-Periode, also $qN\Delta t$, $q = 1, 2, \dots$, gewählt werden sollte.

Sehr einfach lässt sich das binäre Pseudo-Rauschsignal einer m -Impulsfolge mit Hilfe eines Impulsgenerators auf Basis eines m -stufigen Schieberegisters erzeugen. Für den Fall $m = 4$ ist ein derartiger Impulsgenerator in Bild 2.10 dargestellt. Die binären Inhalte des Registers werden jeweils nach Ablauf eines Zeitintervalls Δt um eine Binär-Stelle nach rechts verschoben. Gleichzeitig wird ein neuer Eingangsimpuls (1 oder 0) mittels einer Modulo-Zwei-Addition zweier speziell ausgesuchter Registerausgänge erzeugt. Bei dem dargestellten Generator wird somit in jedem Schritt eine 1 in die erste Registerstufe gebracht, wenn die Inhalte der beiden letzten Registerstufen zuvor ungleich waren, ansonsten wird eine 0 in die erste Registerstufe geschrieben. Wenn zur Zeit $t = 0$ dieser Impulsgenerator mit einem von null verschiedenen Registerinhalt gestartet wird, dann werden in den Registerstufen binäre m -Impulsfolgen mit einer Periode von $N = 15$ erzeugt. Bei einer Anordnung für $m = 4$ ist dies die maximale Länge der Impulsfolge. Innerhalb dieser Periode treten alle möglichen Kombinationen des Registerinhaltes jeweils nur einmal auf (mit Ausnahme der Kombination, bei der alle Registerinhalte gleich 0 sind). Das eigentliche Testsignal ergibt sich, indem der Inhalt einer Registerstufe für die Ausgangsgröße verwendet wird und 0 und 1 durch $-c$ und c ersetzt werden. Bild 2.11 zeigt die mit dem in Bild 2.10 gezeigten Schieberegister erzeugte Impulsfolge und die zugehörige Autokorrelationsfunktion, wobei für die Ausgangsgröße der Inhalt der ersten Registerstufe verwendet wurde. Ein entsprechender Impulsgenerator lässt sich mit einem Rechenprogramm einfach realisieren.⁶ Das folgende Beispiel verdeutlicht die Bestimmung der Gewichtsfunktion über Korrelationsanalyse.

⁶ Eine Verallgemeinerung von binären oder ternären Pseudo-Rauschsignalen stellen *Pseudo-Random-Multi-Level-Sequence-Signale* (PRMS-Signale) dar, die L verschiedene Signalwerte annehmen können, wobei L eine Primzahl ist. Diese können ebenfalls über ein Schieberegister bzw. über eine dazugehörige Differenzengleichung mit modulo-Operationen erzeugt werden. Die Erzeugung von PRMS-Signalen wird in Abschnitt 9.8.3.5 behandelt.

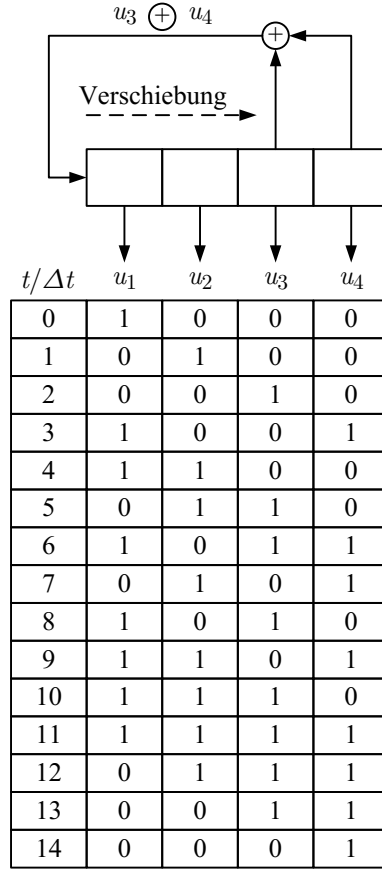


Bild 2.10 Tabellierte Schieberegisterinhalte des Impulsgenerators für eine Impulsfolge ($m = 4$)

Beispiel 2.2

Für eine simulierte Regelstrecke, gebildet aus der Hintereinanderschaltung von drei Verzögerungsgliedern erster Ordnung mit gleichen Zeitkonstanten $T_1 = T_2 = T_3 = 25\text{ s}$ und der Verstärkung $K_S = 1$, ergibt sich bei Verwendung einer m -Impulsfolge mit $N = 63$ als Eingangssignal $u(t)$ die in Bild 2.12b dargestellte Kreuzkorrelationsfunktion.

Dabei wirkt sich allerdings der negative Gleichanteil der Autokorrelationsfunktion noch stark auf die Kreuzkorrelationsfunktion aus. Deshalb muss in diesem Fall anstelle der Gl. (2.41) die genauere Beziehung

$$R_{uu}(\tau) = c^2 \frac{N+1}{N} \Delta t \delta(\tau) - \frac{c^2}{N}, \quad |\tau| \leq (N-1)\Delta t, \quad (2.49)$$

für die Berechnung der Kreuzkorrelationsfunktion

$$R_{uy}(\tau) = c^2 \frac{N+1}{N} \Delta t \int_0^T g(\vartheta) \delta(\tau - \vartheta) d\vartheta - \frac{c^2}{N} \int_0^T g(\vartheta) d\vartheta \quad (2.50)$$

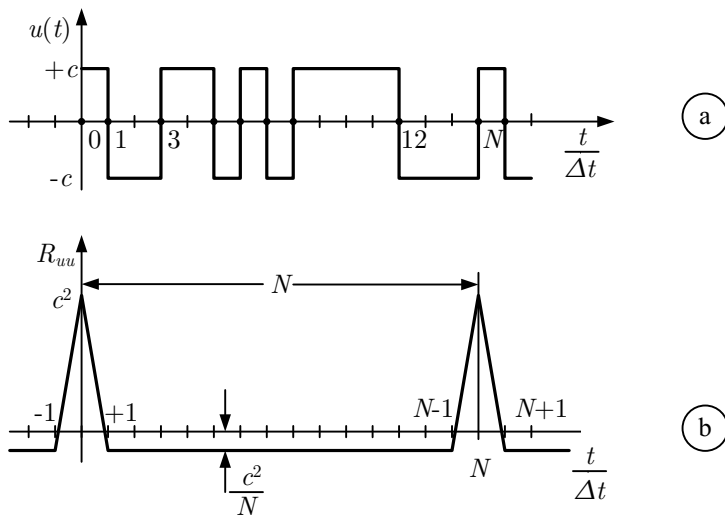


Bild 2.11 (a) Binäres Pseudo-Rauschsignal u und (b) zugehörige Autokorrelationsfunktion R_{uu} für eine m -Impulsfolge mit $m = 4$

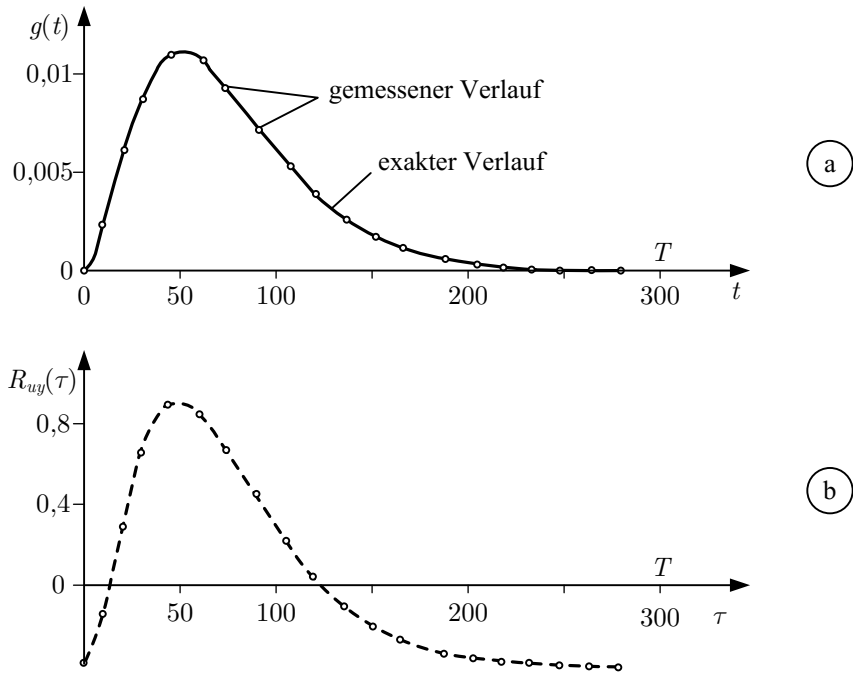


Bild 2.12 (a) Gewichtsfunktion der simulierten PT_3 -Regelstrecke und (b) die mit Hilfe einer m -Impulsfolge ermittelte Kreuzkorrelationsfunktion ($T_1 = T_2 = T_3 = 25$ s, $c = \pm 5$, $N = 63$, $T = 300$ s)

zugrunde gelegt werden. Bei der Regelstrecke mit P-Verhalten nimmt unter der Voraussetzung, dass T größer ist als die Abklingzeit, das Integral im zweiten Term der Gl. (2.50) gerade den Wert eins an. Als gesuchte Gewichtsfunktion folgt schließlich

$$g(\tau) = \frac{1}{c^2 \frac{N+1}{N} \Delta t} \left[R_{uy}(\tau) + \frac{c^2}{N} \right]. \quad (2.51)$$

Mit Hilfe dieser Beziehung wurde die in Bild 2.12a dargestellte Gewichtsfunktion aus der punktweise gemessenen Kreuzkorrelationsfunktion bestimmt. Der Vergleich mit dem exakten Verlauf der Gewichtsfunktion zeigt, dass die Abweichungen innerhalb der Zeichengenauigkeit liegen. ■

2.2.4.3 Korrelationsanalyse im geschlossenen Regelkreis

Bei der Bestimmung des dynamischen Verhaltens einer Regelstrecke mit der Übertragungsfunktion $G_S(s)$ im geschlossenen Regelkreis nach Bild 2.13 muss berücksichtigt werden, dass das Stellsignal $u(t)$ aufgrund der Rückführung stets mit dem Störsignal $z(t)$ korreliert ist. Damit wird die Bestimmung von $G_S(s)$ mit Hilfe einer Korrelationsmessung $R_{uy}(\tau)$ ausgeschlossen, da $R_{uz}(\tau)$, wie in Abschnitt 2.2.4.1 hergeleitet, nicht verschwindet. Sofern das über die Führungsgröße $w(t)$ aufgegebene Testsignal mit der Störung $z(t)$ unkorreliert ist, lässt sich der Frequenzgang der Regelstrecke $G_S(j\omega)$ aber mit Hilfe zweier Korrelationsmessungen bestimmen.

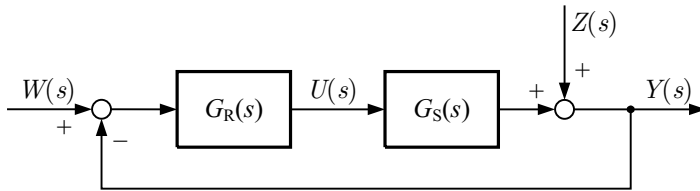


Bild 2.13 Geschlossener Regelkreis mit Störung am Ausgang der Regelstrecke

Werden mit $y_w(t)$ und $u_w(t)$ die Ausgangsgröße und die Stellgröße bezeichnet, die sich für $z(t) = 0$ ergeben würden sowie mit $y_z(t)$ und $u_z(t)$ die Ausgangsgröße und die Stellgröße für den Fall, dass $w(t) = 0$ ist, so gilt aufgrund der Linearität nach dem Superpositionsprinzip für die Regelgröße

$$y(t) = y_w(t) + y_z(t) \quad (2.52)$$

und für die Stellgröße

$$u(t) = u_w(t) + u_z(t). \quad (2.53)$$

Dabei sind die Signale $w(t)$ und $y_z(t)$ sowie $w(t)$ und $u_z(t)$ unkorreliert und somit folgt für die Kreuzkorrelationsfunktion von $w(t)$ und $y(t)$

$$\begin{aligned}
R_{wy}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T w(t)y(t+\tau) dt \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T w(t)y_w(t+\tau) dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T w(t)y_z(t+\tau) dt \\
&= R_{wy_w}(\tau)
\end{aligned} \tag{2.54}$$

und für die Kreuzkorrelationsfunktion zwischen $w(t)$ und $u(t)$

$$\begin{aligned}
R_{wu}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T w(t)u(t+\tau) dt \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T w(t)u_w(t+\tau) dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T w(t)u_z(t+\tau) dt \\
&= R_{wu_w}(\tau) .
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Nach Gl. (B.4b) ergibt sich andererseits für die Kreuzkorrelationsfunktion aus Gl. (2.54)

$$R_{wy_w}(\tau) = \int_0^{\infty} g_{yw}(\sigma) R_{ww}(\tau - \sigma) d\sigma \tag{2.56}$$

und für die Kreuzkorrelationsfunktion aus Gl. (2.55)

$$R_{wu_w}(\tau) = \int_0^{\infty} g_{uw}(\sigma) R_{ww}(\tau - \sigma) d\sigma , \tag{2.57}$$

wobei g_{yw} und g_{uw} die Gewichtsfunktionen des Übertragungsverhaltens zwischen w und y bzw. w und u im geschlossenen Kreis sind. Die Fourier-Transformation der Gln. (2.56) und (2.57) liefert die Kreuzleistungsdichtespektren

$$S_{wy_w}(j\omega) = G_{yw}(j\omega) S_{ww}(\omega) \tag{2.58}$$

und

$$S_{wu_w}(j\omega) = G_{uw}(j\omega) S_{ww}(\omega) . \tag{2.59}$$

Aus Bild 2.13 folgt unmittelbar für die in diesen beiden Beziehungen enthaltenen Frequenzgänge

$$G_{yw}(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{W(j\omega)} = \frac{G_R(j\omega)G_S(j\omega)}{1 + G_R(j\omega)G_S(j\omega)} \tag{2.60}$$

und

$$G_{uw}(j\omega) = \frac{U(j\omega)}{W(j\omega)} = \frac{G_R(j\omega)}{1 + G_R(j\omega)G_S(j\omega)} . \tag{2.61}$$

Die Division der Gln. (2.58) und (2.59) sowie der Gln. (2.60) und (2.61) liefert unter Berücksichtigung der Fourier-Transformierten der Gln. (2.54) und (2.55) direkt als gesuchten Frequenzgang der Regelstrecke

$$G_S(j\omega) = \frac{G_{yw}(j\omega)}{G_{uw}(j\omega)} = \frac{S_{wyw}(j\omega)}{S_{wu_w}(j\omega)} = \frac{S_{wy}(j\omega)}{S_{wu}(j\omega)}. \quad (2.62)$$

Somit kann durch die Ermittlung der beiden Kreuzleistungsspektren, z.B. anhand der beiden zugehörigen, gemessenen Kreuzkorrelationsfunktionen $R_{wy}(\tau)$ und $R_{wu}(\tau)$, der gesuchte Frequenzgang $G_S(j\omega)$ der Regelstrecke im geschlossenen Regelkreis bestimmt werden.

2.2.4.4 Direkte Bestimmung des Frequenzgangs durch Korrelationsanalyse

Unter den zu Beginn dieses Kapitels genannten Voraussetzungen gelten zwischen Real- und Imaginärteil des Frequenzgangs $G(j\omega) = R(\omega) + jI(\omega)$ und der Gewichtsfunktion $g(t)$ die Beziehungen

$$R(\omega) = \int_{0^-}^{\infty} g(t) \cos \omega t \, dt \quad (2.63)$$

bzw.

$$I(\omega) = - \int_{0^-}^{\infty} g(t) \sin \omega t \, dt, \quad (2.64)$$

wobei $g(t) = 0$ für $t < 0$ vorausgesetzt wird. Aufgrund dieser beiden Beziehungen lassen sich $R(\omega)$ und $I(\omega)$ in einfacher Weise wie in Bild 2.14 dargestellt durch eine Kreuzkorrelationsmessung bestimmen. Mit diesem Messprinzip lassen sich Frequenzgangsanalysatoren aufbauen. Es kann auch einfach programmtechnisch auf einem Mikrorechner realisiert werden [Unb75].

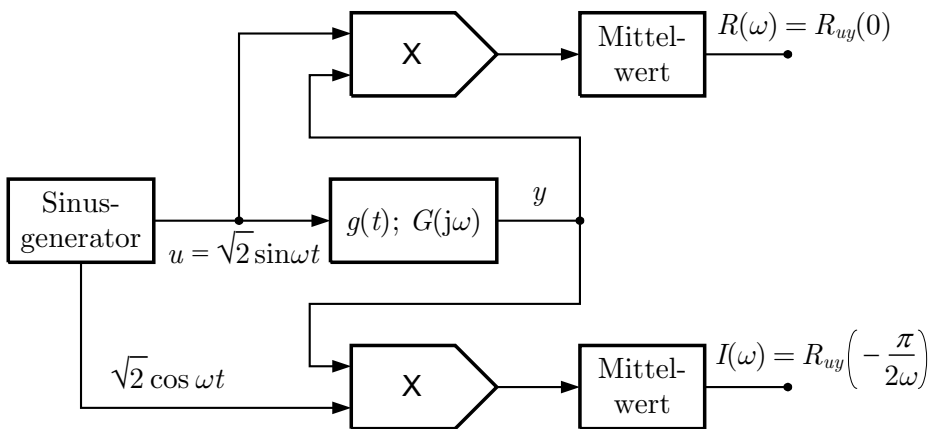


Bild 2.14 Messung des Frequenzgangs über Kreuzkorrelation

Wird für das Eingangssignal $u(t) = A \sin \omega t$ mit $A = \sqrt{2}$ die Autokorrelationsfunktion gebildet, so ergibt sich

$$R_{uu}(\tau) = (A^2/2) \cos \omega \tau = \cos \omega \tau . \quad (2.65)$$

Um Gl. (B.4b) aus Anhang B anwenden zu können, muss anstelle von Gl. (2.65) die Beziehung

$$\begin{aligned} R_{uu}(\tau - \nu) &= \cos \omega(\tau - \nu) \\ &= \cos \omega \tau \cos \omega \nu + \sin \omega \tau \sin \omega \nu \end{aligned} \quad (2.66)$$

verwendet werden. Wird Gl. (2.66) in Gl. (B.4b) eingesetzt, ergibt sich für die beiden Werte $\tau = 0$ und $\tau = -\pi/2\omega$ die Kreuzkorrelationsfunktion zu

$$R_{uy}(0) = \int_0^\infty g(\nu) \cos \omega \nu \, d\nu \quad (2.67)$$

und

$$R_{uy}\left(-\frac{\pi}{2\omega}\right) = - \int_0^\infty g(\nu) \sin \omega \nu \, d\nu . \quad (2.68)$$

Diese beiden Beziehungen sind aber gerade identisch mit denen der Gln. (2.63) und (2.64). Durch eine derartige Korrelationsmessung können somit direkt der Real- und Imaginärteil von $G(j\omega)$ ermittelt werden, wobei die Zeitverschiebung $\tau = -\pi/2\omega$ einfach durch eine Phasenverschiebung am Sinusgenerator erzeugt wird.⁷

Die Ausgangssignale der Multiplikationsblöcke setzen sich als Produkt zweier gleichfrequenter Sinusschwingungen je aus einem Gleichanteil und einer Sinusschwingung der doppelten Frequenz zusammen. Die Gleichanteile entsprechen den gesuchten Werten des Real- und Imaginärteils. Es ist also erforderlich, die überlagerte Wechselgröße durch eine anschließende Filterung bzw. Mittelwertbildung möglichst weitgehend zu unterdrücken. Das hier geschilderte Verfahren hat den Vorteil, dass kleinere stochastische Störsignale, die sich dem Ausgangssignal eventuell noch überlagern, durch die anschließende Mittelwertbildung weitgehend unterdrückt werden.

2.2.5 Systemidentifikation anhand der vorgegebenen Gewichtsfunktion

Nachdem in den vorhergehenden Abschnitten gezeigt wurde, wie die Gewichtsfunktion eines Übertragungssystems sowohl aus deterministischen als auch stochastischen Signalen ermittelt werden kann, soll nachfolgend aus einer graphisch vorgegebenen Gewichtsfunktion $g(t)$ als parametrisches Modell des zu identifizierenden Systems die Modellübertragungsfunktion

$$G_M(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n} \quad (2.69)$$

⁷ In Bild 2.14 kommt dies dadurch zum Ausdruck, dass für den zweiten Eingang des unteren Multiplikators $\sqrt{2} \cos(\omega t) = \sqrt{2} \sin(\omega(t + \pi/2\omega))$ verwendet wird.

mittels der Momentenmethode bestimmt werden [Ba54]. Ausgangspunkt dieses Verfahrens ist der Zusammenhang zwischen $g(t)$ und $G(s)$ über die Laplace-Transformation

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} g(t) e^{-st} dt. \quad (2.70)$$

Wird in Gl. (2.70) der Term e^{-st} um den Punkt $st = 0$ in eine Taylor-Reihe entwickelt, so ergibt sich

$$G(s) = \int_{0^-}^{\infty} \left(1 - st + \frac{(st)^2}{2!} - \frac{(st)^3}{3!} \pm \dots \right) g(t) dt. \quad (2.71)$$

Daraus folgt

$$G(s) = \int_{0^-}^{\infty} g(t) dt - s \int_{0^-}^{\infty} t g(t) dt + \frac{s^2}{2!} \int_{0^-}^{\infty} t^2 g(t) dt \pm \dots \quad (2.72)$$

Alle in Gl. (2.72) auftretenden Integrale können nun als Momente der Gewichtsfunktion aufgefasst werden, wobei jeweils nur eine numerische Integration der zeitgewichteten Gewichtsfunktion $t^i g(t)$ durchzuführen ist. Wird das i -te Moment der vorgegebenen Gewichtsfunktion als

$$M_i = \int_{0^-}^{\infty} t^i g(t) dt \quad (2.73)$$

definiert, dann lässt sich Gl. (2.72) umschreiben in die Form

$$G(s) = M_0 - sM_1 + \frac{s^2}{2!}M_2 - \frac{s^3}{3!}M_3 \pm \dots \quad (2.74)$$

Aus Gl. (2.69) folgt dann durch Gleichsetzen mit Gl. (2.74)

$$(M_0 - sM_1 + \frac{s^2}{2!}M_2 - \frac{s^3}{3!}M_3 \pm \dots)(a_0 + a_1s + \dots + s^n) = (b_0 + b_1s + \dots + b_ms^m). \quad (2.75)$$

Der Koeffizientenvergleich liefert hieraus $m + n + 1$ algebraische Gleichungen, aus denen mit den zuvor berechneten Momenten M_i die $m + n + 1$ zu identifizierenden Parameter $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_0, b_1, \dots, b_m$ leicht bestimmt werden können. Dies wird anhand eines einfachen Beispiels gezeigt.

Beispiel 2.3

Wird $m = 1$ und $n = 2$ gewählt, so ergibt sich durch Ausmultiplizieren der Beziehung aus Gl. (2.75) und anschließenden Koeffizientenvergleich das Gleichungssystem

$$M_0 a_0 = b_0,$$

$$(-M_1 a_0 + M_0 a_1) s = b_1 s,$$

$$\left(\frac{M_2}{2!} a_0 - M_1 a_1 + M_0 \right) s^2 = 0,$$

$$\left(-\frac{M_3}{3!} a_0 + \frac{M_2}{2!} a_1 - M_1 \right) s^3 = 0$$

zur Berechnung der gesuchten Modellparameter a_0 , a_1 , b_0 und b_1 . Dieses Gleichungssystem kann in Matrix-Vektor-Form als

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_0 & 0 & -1 & 0 \\ -M_1 & M_0 & 0 & -1 \\ \frac{M_2}{2!} & -M_1 & 0 & 0 \\ -\frac{M_3}{3!} & \frac{M_2}{2!} & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}_M} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -M_0 \\ M_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}}$$

angegeben werden. Damit kann der gesuchte Parametervektor über

$$\mathbf{p}_M = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{y}$$

berechnet werden. ■

Die hier beschriebene Form der Momentenmethode lässt sich für lineare Systeme mit aperiodischem Verhalten anwenden und ist wegen der dabei durchgeführten Integration unempfindlich gegenüber hochfrequenten Störungen. Beim Auftreten von niederfrequenten Störungen empfiehlt sich eine erweiterte Version dieser Methode [Bol73].

Bei der sogenannten Flächenmethode können die Koeffizienten eines speziellen Ansatzes für $G(s)$ aus einer mehrfachen Integration der vorgegebenen Übergangsfunktion ermittelt werden. Bei der Interpolationsmethode werden die $m+n+1$ unbekannten Parameter der Übertragungsfunktion nach Gl. (2.69) so berechnet, dass die approximierende Übergangsfunktion in $m+n+1$ Punkten mit dem Verlauf der vorgegebenen Übergangsfunktion übereinstimmt [Lep72].

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass es ähnlich der Auswertung einer vorgegebenen Übergangsfunktion anhand spezieller Kennwerte, die bei $h(t)$ abgelesen werden können (wie in Bild 2.1 bereits dargestellt), auch Verfahren gibt, die mittels abgelesener Kennwerte aus dem Verlauf der Impulsantwort $g(t)$ die Ermittlung einer rationalen Übertragungsfunktion $G(s)$ gemäß Gl. (2.69) ermöglichen [Git70], worauf aber hier nicht weiter eingegangen werden soll.

2.3 Verfahren im Frequenzbereich

2.3.1 Messung des Frequenzgangs und Approximation durch rationale Funktionen

Liegt von einem zu identifizierenden Übertragungsglied der direkt gemessene oder z.B. über Gl. (2.62) anhand einer Korrelationsanalyse berechnete Verlauf des Frequenzgangs $G(j\omega)$ punktweise vor, dann ist es zweckmäßig, $G(j\omega)$ bzw. die zugehörige Übertragungsfunktion $G(s)$ durch eine rationale Modellübertragungsfunktion $G_M(s)$ zu approximieren. Dieses Vorgehen stellt eine Identifikation im Frequenzbereich dar. Grundsätzlich kann bei

Systemen mit minimalphasigem Verhalten das klassische Frequenzkennlinienverfahren [Unb08] dazu angewendet werden, bei dem nur der Betrag $|G(j\omega)|$, also der Amplitudengang, zur Approximation durch elementare Standardübertragungsglieder beginnend mit den niedrigsten ω -Werten verwendet wird. Der approximierende Frequenzkennlinien-Verlauf der einzelnen Standardübertragungsfunktionen liefert die Eckfrequenzen derselben, und die gesuchte Gesamtübertragungsfunktion ergibt sich dann aus der Multiplikation der gefundenen Einzelübertragungsfunktionen. Da bei einer Systemidentifikation jedoch meist nicht im Voraus bekannt ist, ob ein System mit minimalphasigem Verhalten vorliegt, kann dieses Verfahren nur eingeschränkt angewendet werden. Diese Einschränkung liegt beim nachfolgend dargestellten Verfahren nicht vor [Unb66b].

Bei diesem Verfahren wird vom Verlauf der Ortskurve eines gemessenen oder aus anderen Daten berechneten Frequenzgangs

$$G(j\omega) = R(\omega) + jI(\omega) \quad (2.76)$$

ausgegangen. Es soll dazu eine gebrochen rationale, das zu identifizierende System beschreibende Übertragungsfunktion

$$G_M(s) = R_M(s) + jI_M(\omega) = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_ns^n}{a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n} \quad (2.77)$$

mit a_ν, b_ν reell und $a_n \neq 0$ ermittelt werden, die für $s = j\omega$ die Ortskurve $G(j\omega)$ möglichst gut annähert. Da über die Hilbert-Transformation ein eindeutiger Zusammenhang zwischen der Realteilstfunktion $R(\omega)$ und der Imaginärteilstfunktion $I(\omega)$ besteht, genügt es auch, z.B. nur die gegebene Realteilstfunktion $R(\omega)$ durch $R_M(\omega)$ zu approximieren. Damit wird automatisch auch $I_M(\omega)$ gewonnen.

Die praktische Durchführung dieser Approximation erfolgt durch eine konforme Abbildung der s -Ebene auf die w -Ebene mittels der Transformationsgleichung

$$w = \frac{\sigma_0^2 + s^2}{\sigma_0^2 - s^2} \quad \text{bzw.} \quad w = \frac{\sigma_0^2 - \omega^2}{\sigma_0^2 + \omega^2} \quad \text{für } s = j\omega, \quad (2.78)$$

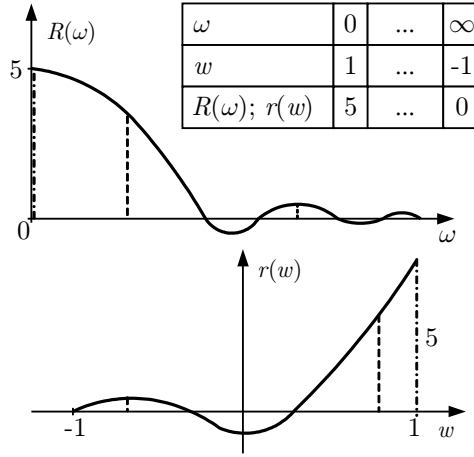
durch die der Frequenzbereich $0 \leq \omega < \infty$ in ein endliches Intervall $-1 < w \leq 1$ übergeht. Damit kann $R(\omega)$ mit gleichbleibenden Werten als $r(w)$ in der w -Ebene dargestellt werden (siehe Bild 2.15), wobei die konstante Größe σ_0 so gewählt werden sollte, dass der wesentliche Frequenzbereich für $R(\omega)$ auch in der w -Ebene möglichst stark berücksichtigt wird. Durch eine zweckmäßige Wahl von $2n+1$ Kurvenpunkten von $r(w)$ kann für $r_M(w)$ der Ansatz

$$r_M(w) = \frac{c_0 + c_1w + \dots + c_nw^n}{1 + d_1w + \dots + d_nw^n} \quad (2.79)$$

gemacht werden, woraus durch Auflösung des zugehörigen Systems von $2n+1$ linearen Gleichungen die Parameter c_0, \dots, c_n und d_1, \dots, d_n ermittelt werden können, da für die gewählten Punkte $r(w_\mu) = r_M(w_\mu)$ gilt.⁸

Die Rücktransformation der nun bekannten Funktion $r_M(w)$ mittels Gl. (2.78) liefert direkt den Realteil $R_M(\omega)$ der gesuchten Übertragungsfunktion $G_M(s)$ für $s = j\omega$. Für diesen gilt

⁸ Die $2n+1$ Kurvenpunkte müssen nicht äquidistant sein, vielmehr sollten die Intervalle dort kleiner sein, wo $r(\omega)$ kleine Werte aufweist.

Bild 2.15 Transformation von $R(\omega)$ in $r(w)$

$$R_M(\omega) = \frac{1}{2} (G_M(s) + G_M(-s)) \Big|_{s=j\omega}. \quad (2.80)$$

Zur Abkürzung wird

$$H(s) = \frac{1}{2} (G_M(s) + G_M(-s)) \quad (2.81)$$

eingeführt. Über eine Faktorisierung des Nennerpolynoms von $H(s)$ in ein Hurwitz-Polynom $D(s)$ und ein Anti-Hurwitz-Polynom $D(-s)$, also

$$H(s) = \frac{C_0 + C_1 s^2 + \dots + C_n s^{2n}}{D_0 + D_1 s^2 + \dots + D_n s^{2n}} = \frac{C(s^2)}{D(s)D(-s)}, \quad (2.82)$$

kann mit dem Ansatz

$$G_M(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_n s^n}{D(s)} \quad (2.83)$$

und

$$D(s) = a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n \quad (2.84)$$

direkt die Übertragungsfunktion $G_M(s)$ ermittelt werden. Dabei ergeben sich die Koeffizienten b_1, \dots, b_n durch Koeffizientenvergleich der Gln. (2.80) und (2.82), sofern zuvor die Gln. (2.83) und (2.84) in Gl. (2.80) bzw. in Gl. (2.82) eingesetzt wurden. Die praktische Durchführung dieses Verfahrens erfolgt mittel eines Rechenprogramms. Dabei wird die Struktur von $G_M(s)$ zunächst durch die in dem Ansatz gemäß Gl. (2.79) verwendeten $2n + 1$ Kurvenpunkte bestimmt. Werden hierbei sehr viele Punkte gewählt, so nehmen die Koeffizienten höherer Ordnung in $G_M(s)$ automatisch sehr kleine Werte an und können somit vernachlässigt werden. Dieses Verfahren liefert also neben den Parametern auch die Struktur von $G_M(s)$. Die erzielte Genauigkeit der Systembeschreibung ist sehr hoch, wobei trotzdem die Ordnung von Zähler- und Nennerpolynom vergleichsweise niedrig bleibt, was gerade für die Weiterverarbeitung eines solchen mathematischen Modells sehr vorteilhaft ist. Am nachfolgend dargestellten einfachen Beispiel wird der prinzipielle Ablauf des Verfahrens erläutert.

Beispiel 2.4

Es sei $n = 1$ gewählt, dann wird

$$r_M(w) = \frac{c_0 + c_1 w}{1 + d_1 w}.$$

Sind durch die Lösung der beschriebenen einfachen Approximationsaufgabe die Parameter c_0 , c_1 und d_1 ermittelt, so erfolgt mit

$$w = \frac{\sigma_0^2 + s^2}{\sigma_0^2 - s^2}$$

die Rücktransformation gemäß Gl. (2.80)

$$R_M(\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = \left. \frac{c_0 + c_1 \frac{\sigma_0^2 + s^2}{\sigma_0^2 - s^2}}{1 + d_1 \frac{\sigma_0^2 + s^2}{\sigma_0^2 - s^2}} \right|_{s=j\omega}.$$

Zusammenfassen liefert

$$H(s) = \frac{(c_0 + c_1) \sigma_0^2 + (-c_0 + c_1) s^2}{(d_1 + 1) \sigma_0^2 + (d_1 - 1) s^2}.$$

Abgekürzt folgt entsprechend Gl. (2.82)

$$H(s) = \frac{C_0 + C_1 s^2}{D_0 + D_1 s^2} = \frac{C(s^2)}{D(s)D(-s)} = \frac{1}{2} (G_M(s) + G_M(-s)). \quad (2.85)$$

Mit dem Ansatz nach Gl. (2.83)

$$G_M(s) = \frac{b_0 + b_1 s}{D(s)}$$

und mit

$$D(s) = a_0 + a_1 s$$

gemäß Gl. (2.84) ergibt sich nach Einsetzen dieser beiden Beziehungen in Gl. (2.80)

$$H(s) = \frac{1}{2} \left[\frac{(b_0 + b_1 s) D(-s) + (b_0 + b_1 s) D(s)}{D(s) D(-s)} \right]. \quad (2.86)$$

Aus der Auflösung von

$$D(s)D(-s) = D_0 + D_1 s^2 = 0$$

ergeben sich die Wurzeln von $D(s)D(-s)$ zu

$$s_{1,2} = \pm \sqrt{-D_0/D_1} = \pm \sigma_0 \sqrt{\frac{1 + d_1}{1 - d_1}}.$$

Da aber

$$D(s) = a_0 + a_1 s$$

ist, folgt schließlich nach Einsetzen der Wurzel und anschließendem Koeffizientenvergleich

$$a_0 = \sigma_0 \sqrt{1 + d_1}$$

und

$$a_1 = \sqrt{1 - d_1}.$$

Zur Berechnung der Parameter b_0 und b_1 wird $D(s)$ in Gl. (2.86) eingesetzt. Dies liefert

$$H(s) = \frac{1}{2} \left[\frac{(b_0 + b_1 s) (a_0 - a_1 s) + (b_0 - b_1 s) (a_0 + a_1 s)}{D(s) D(-s)} \right]$$

oder ausmultipliziert

$$H(s) = \frac{a_0 b_0 - a_1 b_1 s^2}{D(s) D(-s)}. \quad (2.87)$$

Der Koeffizientenvergleich zwischen den Gln. (2.85) und (2.87) ergibt die zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} C_0 &= a_0 b_0, \\ C_1 &= -a_1 b_1 \end{aligned}$$

für die zwei noch unbekannten Parameter b_0 und b_1 . Aufgelöst ergibt sich dann

$$b_0 = \frac{C_0}{a_0} = \frac{\sigma_0 (c_0 + c_1)}{\sqrt{1 + d_1}}$$

und

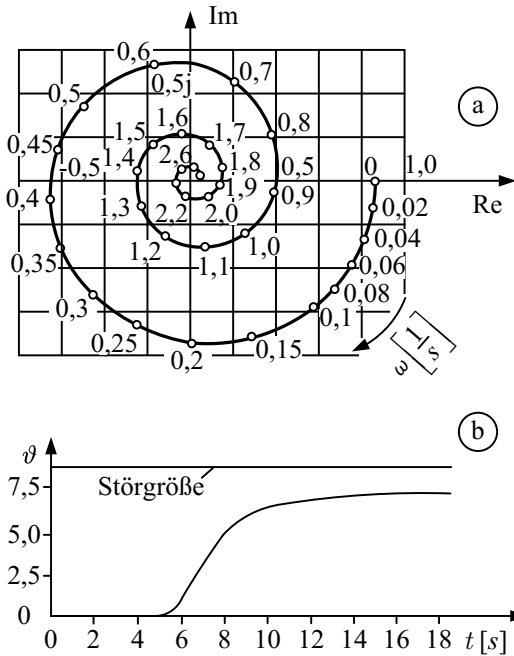
$$b_1 = -\frac{C_1}{a_1} = \frac{c_0 - c_1}{\sqrt{1 - d_1}}.$$

■

Die in Bild 2.16 dargestellte und approximierte Ortskurve zeigt die Ergebnisse der Anwendung dieses Verfahrens am Beispiel eines Wärmetauschers.

2.3.2 Zusammenhänge zwischen Zeit- und Frequenzbereichsdarstellungen

Wie bereits bei der Einführung der Gln. (2.1) bis (2.3) erwähnt wurde, gibt es aufgrund der Laplace- und Fourier-Transformationen grundlegende Zusammenhänge zwischen den kontinuierlichen Systembeschreibungen im Zeitbereich, also $h(t)$ oder $g(t)$, und denen im Frequenzbereich, $G(s)$ oder $G(j\omega)$. Ähnliche Beziehungen lassen sich auch für die entsprechenden diskreten Systembeschreibungen, $h(k)$ oder $g(k)$, sowie die diskrete Übertragungsfunktion $G_z(z)$ oder den diskreten Frequenzgang $G_z(e^{j\omega T})$ angeben. Da bei der Systemidentifikation häufig der Übergang zwischen Zeit- und Frequenzbereichsdarstellung erforderlich ist, werden nachfolgend einige Verfahren angegeben, die die numerische Umrechnung zwischen beiden Darstellungsformen gestatten.



$a_0 = 1,00$	$b_0 = 0,850$
$a_1 = 5,48$	$b_1 = -2,23$
$a_2 = 11,28$	$b_2 = 2,69$
$a_3 = 15,90$	$b_3 = -2,03$
$a_4 = 12,70$	$b_4 = 0,992$
$a_5 = 8,35$	$b_5 = -0,355$
$a_6 = 3,44$	$b_6 = 0,079$
$a_7 = 1,04$	$b_7 = -0,016$
$a_8 = 0,226$	$b_8 = 0$

Bild 2.16 (a) Punktweise vorgegebene Ortskurve (o) und Approximation (durchgezogene Linie) sowie (b) zugehörige Übergangsfunktion eines Wärmetauschers, wobei die im Kasten angegebenen Koeffizienten das mathematische Modell gemäß Gl. (2.77) beschreiben

2.3.2.1 Berechnung des Frequenzgangs aus der Sprungantwort

Wird ein lineares System zum Zeitpunkt $t = 0$ durch eine Sprungfunktion der Höhe K^* erregt, dann ergibt sich die Sprungantwort $h^*(t)$ und damit gilt für die Übergangsfunktion

$$h(t) = \frac{h^*(t)}{K^*}. \quad (2.88)$$

Mit der Laplace-Transformierten von $h(t)$, also

$$H(s) = \int_{0^-}^{\infty} h(t) e^{-st} dt,$$

folgt die Übertragungsfunktion des betreffenden Übertragungssystems zu

$$G(s) = sH(s) = s \int_{0^-}^{\infty} h(t) e^{-st} dt. \quad (2.89)$$

Für $s = j\omega$ ergibt sich aus $G(s)$ der Frequenzgang gemäß Gl. (2.2) und mit Gl. (2.89) folgt für dessen Real- und Imaginärteil

$$R(\omega) = \frac{\omega}{K^*} \int_{0^-}^{\infty} h^*(t) \sin \omega t \, dt, \quad (2.90a)$$

$$I(\omega) = \frac{\omega}{K^*} \int_{0^-}^{\infty} h^*(t) \cos \omega t \, dt. \quad (2.90b)$$

Da für die Auswertung der Gln. (2.90a) und (2.90b) bei einer nichtparametrischen Modellierung des zu identifizierenden Systems die Antwort $h^*(t)$ nicht analytisch, sondern nur in Form einer Messung vorliegt, kann der jeweilige Integralwert für verschiedene ω -Werte nur numerisch ermittelt werden. Dieser Weg soll hier jedoch nicht besprochen werden. Stattdessen wird ein Verfahren angegeben, das auf dasselbe Ergebnis führt, dessen Herleitung aber nicht die direkte Auswertung der Gln. (2.90a) und (2.90b) erfordert [Unb66c].

Zunächst wird der graphisch vorgegebene Verlauf der Sprungantwort $h^*(t)$, die sich für $t \rightarrow \infty$ asymptotisch einer Geraden mit beliebiger endlicher Steigung nähert, in N äquidistanten Zeitintervallen der Größe Δt durch einen Geradenzug $\tilde{h}(t)$ entsprechend Bild 2.17 approximiert. Dabei stellt $t_N = N\Delta t$ diejenige Zeit dar, nach der die Sprungantwort $h^*(t)$ nur noch hinreichend kleine Abweichungen von der asymptotischen Geraden für $t \rightarrow \infty$ aufweist.

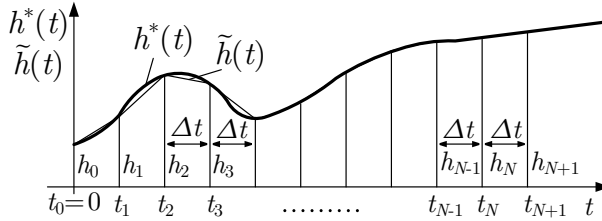


Bild 2.17 Annäherung der Sprungantwort $h^*(t)$ durch einen Geradenzug $\tilde{h}(t)$

Werden nun die Abkürzungen

$$p_\nu = \begin{cases} h_1^* - h_0^* & \text{für } \nu = 0, \\ h_{\nu+1}^* - 2h_\nu^* + h_{\nu-1}^* & \text{für } \nu = 1, 2, \dots, N, \end{cases} \quad (2.91)$$

eingeführt, dann läßt sich zeigen [Unb08], dass dem approximierenden Geradenzug $\tilde{h}(t)$ von $h^*(t)$ der Frequenzgang

$$G(j\omega) = \frac{1}{K^*} \left\{ h_0 - \frac{1}{\omega \Delta t} \sum_{\nu=0}^N p_\nu [\sin(\omega \nu \Delta t) + j \cos(\omega \nu \Delta t)] \right\} \quad (2.92)$$

entspricht. Die Zerlegung von $G(j\omega)$ in Real- und Imaginärteil ergibt dann

$$R(\omega) = \frac{1}{K^*} \left[h_0 - \frac{1}{\omega \Delta t} \sum_{\nu=0}^N p_\nu \sin(\omega \nu \Delta t) \right], \quad (2.93a)$$

$$I(\omega) = \frac{1}{K^*} \frac{1}{\omega \Delta t} \sum_{\nu=0}^N p_\nu \cos(\omega \nu \Delta t). \quad (2.93b)$$

Mit diesen beiden numerisch leicht auswertbaren Beziehungen stehen somit Näherungslösungen für die Gln. (2.90a) und (2.90b) zur Verfügung.

2.3.2.2 Berechnung des Frequenzgangs aus der Antwort auf nichtsprungförmige deterministische Testsignale

Der im vorangegangenen Abschnitt erläuterte Ansatz kann auch auf die Anwendung bei nichtsprungförmigen, deterministischen Testsignalen erweitert werden. Hierzu wird als Modellvorstellung angenommen, dass das deterministische Testsignal $u(t)$, welches zur Systemidentifikation eingesetzt werden soll, das Ausgangssignal eines fiktiven Übertragungsgliedes ist, welches dem zu identifizierenden System gemäß Bild 2.18 in Reihe vorgeschaltet ist und sprungförmig erregt wird. Über die Vorschaltung des fiktiven Übertragungsgliedes wird also das nichtsprungförmige Testsignal auf ein sprungförmiges Signal zurückgeführt.

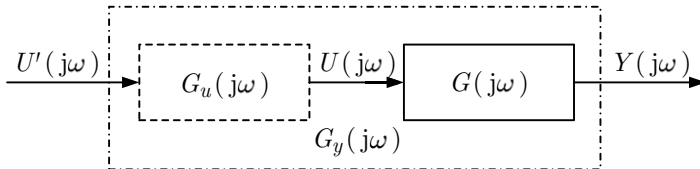


Bild 2.18 Erzeugung eines beliebigen Testsignals $u(t)$ durch ein vorgeschaltetes fiktives Übertragungsglied mit dem Frequenzgang $G_u(j\omega)$ und sprungförmiger Erregung $u'(t) = \sigma(t)$

Die beiden Signale $u(t)$ und $y(t)$ brauchen dabei nur die Bedingung erfüllen, dass sie für $t > 0$ eine endliche Steigung aufweisen und für $t \rightarrow \infty$ asymptotisch in eine Gerade mit beliebiger endlicher Steigung übergehen. Der gesuchte Frequenzgang $G(j\omega)$ ergibt sich gemäß Bild 2.18 zu

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{G_y(j\omega)}{G_u(j\omega)}. \quad (2.94)$$

Da sowohl $G_y(j\omega)$ als auch $G_u(j\omega)$ die Frequenzgänge sprungförmig erregter Übertragungsglieder darstellen, lässt sich $G(j\omega)$ anhand von Gl. (2.94) durch zweimaliges Anwenden des im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen Verfahrens berechnen. Unter Verwendung der Gl. (2.92) folgt somit für den gesuchten Frequenzgang gemäß Gl. (2.94) näherungsweise

$$G(j\omega) \approx \frac{y_0 - \frac{1}{\omega\Delta t} \sum_{\nu=0}^N p_\nu [\sin(\omega\nu\Delta t) + j \cos(\omega\nu\Delta t)]}{u_0 - \frac{1}{\omega\Delta t} \sum_{\mu=0}^M p_\mu [\sin(\omega\mu\Delta t') + j \cos(\omega\mu\Delta t')]}. \quad (2.95)$$

Dabei wird gemäß Bild 2.19 das Eingangssignal $u(t)$ in M , das Ausgangssignal $y(t)$ in N äquidistante Zeitintervalle der Länge Δt bzw. $\Delta t'$ unterteilt und die zugehörigen Ordinatenwerte u_μ und y_ν werden abgelesen. Aus diesen Werten werden die Koeffizienten

$$\begin{aligned} p_0 &= y_1 - y_0, \\ p_\nu &= y_{\nu+1} - 2y_\nu + y_{\nu-1} \quad \text{für } \nu = 1, \dots, N, \\ q_0 &= u_1 - u_0, \\ q_\mu &= u_{\mu+1} - 2u_\mu + u_{\mu-1} \quad \text{für } \mu = 1, \dots, M, \end{aligned}$$

gebildet. Dabei ist zu beachten, dass die beiden letzten Ordinatenwerte, also u_M und u_{M+1} bzw. y_N und y_{N+1} , bereits auf der jeweiligen asymptotischen Geraden des Signalverlaufs für $t \rightarrow \infty$ liegen sollten.

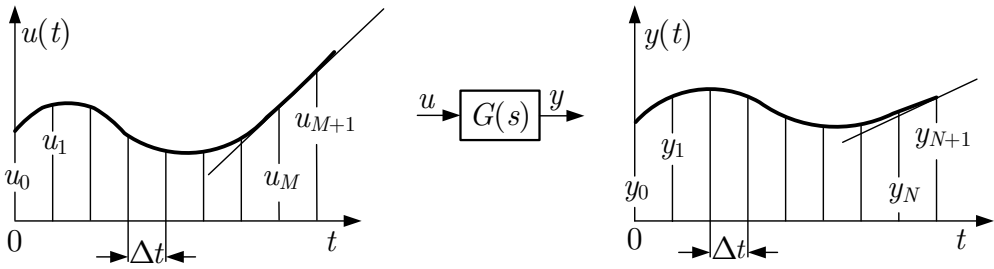


Bild 2.19 Zur Berechnung des Frequenzgangs aus gemessenem Eingangs- und Ausgangssignal

Für verschiedene häufig verwendete Testsignale sind die aus Gl. (2.95) resultierenden Ergebnisse in Tabelle 2.4 zusammengestellt [Unb68]. Dementsprechend brauchen nur die bei den jeweiligen Testsignalen sich ergebenden Werte y_ν des Antwortsignals in die betreffenden Gleichungen eingesetzt werden, um den Real- und Imaginärteil des gesuchten Frequenzgangs $G(j\omega)$ zu berechnen.

Abschließend sei noch darauf hingewiesen, dass die Berechnung des Frequenzgangs auch mittels einer diskreten Fourier-Transformation der abgetasteten Zeitsignale erfolgen kann. Der Frequenzgang kann dann über den als empirischen Übertragungsfunktionsschätzwert (*Empirical Transfer Function Estimate*, ETFE [Lju99]) bezeichneten Quotienten der diskreten Fourier-Transformierten von Ausgangs- und Eingangsgröße bestimmt werden. Dabei werden zweckmäßigerweise periodische Testsignale verwendet. Dies wird in Abschnitt 9.8.2 eingehender betrachtet.

Tabelle 2.4 Frequenzgangberechnung mit Testsignalen [Unb68]

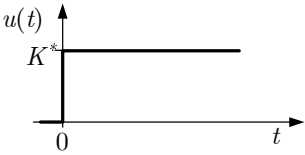
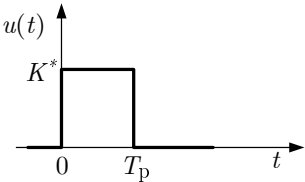
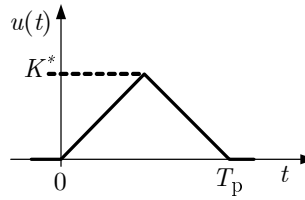
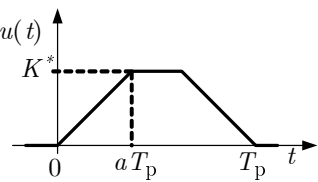
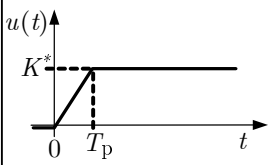
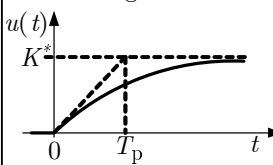
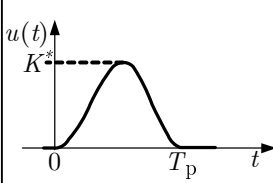
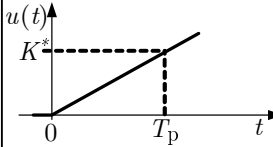
Testsignal $u(t)$	Frequenzgang $G(j\omega) = \text{Re}(\omega) + j\text{Im}(\omega)$, $p_\nu = y_{\nu+1} - 2y_\nu + y_{\nu-1}$
<p>Sprung</p> 	$\text{Re}(\omega) = \frac{1}{K^*} \left[y_0 - \frac{1}{\omega \Delta t} \sum_{\nu=0}^N p_\nu \sin(\omega \nu \Delta t) \right]$ $\text{Im}(\omega) = -\frac{1}{K^*} \frac{1}{\omega \Delta t} \sum_{\nu=0}^N p_\nu \cos(\omega \nu \Delta t)$
<p>Rechteckimpuls</p> 	$\text{Re}(\omega) = \frac{y_0 \sin\left(\frac{\omega T_p}{2}\right) - \frac{1}{\omega \Delta t} \sum_{\nu=0}^N p_\nu \cos\left(\nu \omega \Delta t - \frac{\omega T_p}{2}\right)}{2K^* \sin\left(\frac{\omega T_p}{2}\right)}$ $\text{Im}(\omega) = \frac{-y_0 \cos\left(\frac{\omega T_p}{2}\right) - \frac{1}{\omega \Delta t} \sum_{\nu=0}^N p_\nu \sin\left(\nu \omega \Delta t - \frac{\omega T_p}{2}\right)}{2K^* \sin\left(\frac{\omega T_p}{2}\right)}$
<p>Dreieckimpuls</p> 	$\text{Re}(\omega) = \frac{y_0 \sin\left(\frac{\omega T_p}{2}\right) - \frac{1}{\omega \Delta t} \sum_{\nu=0}^N p_\nu \cos\left(\nu \omega \Delta t - \frac{\omega T_p}{2}\right)}{\frac{8K^*}{\omega T_p} \sin^2\left(\frac{\omega T_p}{4}\right)}$ $\text{Im}(\omega) = \frac{-y_0 \sin\left(\frac{\omega T_p}{2}\right) - \frac{1}{\omega \Delta t} \sum_{\nu=0}^N p_\nu \sin\left(\nu \omega \Delta t - \frac{\omega T_p}{2}\right)}{\frac{8K^*}{\omega T_p} \sin^2\left(\frac{\omega T_p}{4}\right)}$
<p>Trapezimpuls</p> 	$\text{Re}(\omega) = \frac{y_0 \sin\left(\frac{\omega T_p}{2}\right) - \frac{1}{\omega \Delta t} \sum_{\nu=0}^N p_\nu \cos\left(\nu \omega \Delta t - \frac{\omega T_p}{2}\right)}{\frac{1}{a} \cdot \frac{4K^*}{\omega T_p} \sin\left(\frac{\omega T_p}{2} a\right) \sin\left[\frac{\omega T_p}{2} (1-a)\right]}$ $\text{Im}(\omega) = \frac{-y_0 \cos\left(\frac{\omega T_p}{2}\right) + \frac{1}{\omega \Delta t} \sum_{\nu=0}^N p_\nu \sin\left(\nu \omega \Delta t - \frac{\omega T_p}{2}\right)}{\frac{1}{a} \cdot \frac{4K^*}{\omega T_p} \sin\left(\frac{\omega T_p}{2} a\right) \sin\left[\frac{\omega T_p}{2} (1-a)\right]}$

Tabelle 2.4 (Fortsetzung)

Testsignal $u(t)$	Frequenzgang $G(j\omega) = \text{Re}(\omega) + j\text{Im}(\omega)$, $p_\nu = y_{\nu+1} - 2y_\nu + y_{\nu-1}$
<p>Rampe</p> 	$\text{Re}(\omega) = \frac{\omega T_p}{K^* \sin\left(\frac{\omega T_p}{2}\right)} \left[y_0 \cos\left(\frac{\omega T_p}{2}\right) - \frac{1}{\omega \Delta t} \sum_{\nu=0}^N p_\nu \sin\left(\nu \omega \Delta t - \frac{\omega T_p}{2}\right) \right]$ $\text{Im}(\omega) = \frac{\omega T_p}{K^* \sin\left(\frac{\omega T_p}{2}\right)} \left[y_0 \sin\left(\frac{\omega T_p}{2}\right) - \frac{1}{\omega \Delta t} \sum_{\nu=0}^N p_\nu \cos\left(\nu \omega \Delta t - \frac{\omega T_p}{2}\right) \right]$
<p>Verzögerung 1. Ordnung</p> 	$\text{Re}(\omega) = \frac{1}{K^*} \left(y_0 - \frac{1}{\omega \Delta t} \left[\sum_{\nu=0}^N p_\nu \sin(\omega \nu \Delta t) - \omega T_p \sum_{\nu=0}^N p_\nu \cos(\omega \nu \Delta t) \right] \right)$ $\text{Im}(\omega) = \frac{1}{K^*} \left(y_0 \omega T - \frac{1}{\omega \Delta t} \left[\sum_{\nu=0}^N p_\nu \cos(\omega \nu \Delta t) - \omega T_p \sum_{\nu=0}^N p_\nu \sin(\omega \nu \Delta t) \right] \right)$
<p>Kosinusimpuls</p> 	$\text{Re}(\omega) = \frac{1 - \left(\frac{\omega T_p}{2\pi}\right)^2}{K^* \sin\left(\frac{\omega T_p}{2}\right)} \left[y_0 \sin\left(\frac{\omega T_p}{2}\right) - \frac{1}{\omega \Delta t} \sum_{\nu=0}^N p_\nu \cos\left(\nu \omega \Delta t - \frac{\omega T_p}{2}\right) \right]$ $\text{Im}(\omega) = \frac{1 - \left(\frac{\omega T_p}{2\pi}\right)^2}{K^* \sin\left(\frac{\omega T_p}{2}\right)} \left[-y_0 \cos\left(\frac{\omega T_p}{2}\right) + \frac{1}{\omega \Delta t} \sum_{\nu=0}^N p_\nu \sin\left(\nu \omega \Delta t - \frac{\omega T_p}{2}\right) \right]$
<p>Anstiegssfunktion</p> 	$\text{Re}(\omega) = \frac{\omega T_p}{K^*} \cdot \frac{1}{\omega \Delta t} \cdot \sum_{\nu=0}^N p_\nu \cos(\omega \nu \Delta t)$ $\text{Im}(\omega) = \frac{\omega T_p}{K^*} \left[y_0 - \frac{1}{\omega \Delta t} \cdot \sum_{\nu=0}^N p_\nu \sin(\omega \nu \Delta t) \right]$

2.3.3 Berechnung der Übergangsfunktion aus dem Frequenzgang

Den Ausgangspunkt des hier beschriebenen Verfahrens [Unb66a] stellt Gl. (2.3b) dar. Der Verlauf von

$$\tilde{I}(\omega) = \frac{I(\omega)}{\omega}, \quad \omega \geq 0, \quad \tilde{I}(0) \neq \infty, \quad (2.96)$$

sei als gegeben vorausgesetzt. Durch einen Streckenzug $\tilde{s}_0, \tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_N$ wird $\tilde{I}(\omega)$ im Bereich $0 \leq \omega \leq \omega_{N+1}$ so approximiert, dass für $\omega \geq \omega_N$ der Verlauf von $\tilde{I}(\omega) \approx 0$ wird (siehe Bild 2.20a). Auf der ω -Achse werden nun wie in Bild 2.20b dargestellt jeweils bei den (nicht notwendigerweise äquidistanten) Werten ω_ν , $\nu = 0, 1, \dots, N$, $\omega_0 = 0$, beginnende Strecken aufgetragen, deren Steigung gleich der Differenz der Steigungen der Strecken $\tilde{s}_{\nu+1}$ und \tilde{s}_ν ist. So werden für $\nu = 0, 1, \dots, N$ die Rampenfunktionen

$$s_\nu(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{für } \omega < \omega_\nu, \\ b_\nu(\omega - \omega_\nu) & \text{für } \omega \geq \omega_\nu, \end{cases} \quad (2.97)$$

mit den jeweiligen Steigungen

$$b_\nu = \begin{cases} \frac{\tilde{I}(\omega_1) - \tilde{I}(\omega_0)}{\omega_1 - \omega_0} & \text{für } \nu = 0, \\ \frac{\tilde{I}(\omega_{\nu+1}) - \tilde{I}(\omega_\nu)}{\omega_{\nu+1} - \omega_\nu} - \frac{\tilde{I}(\omega_\nu) - \tilde{I}(\omega_{\nu-1})}{\omega_\nu - \omega_{\nu-1}} & \text{für } \nu = 1, \dots, N-1, \\ -\frac{\tilde{I}(\omega_N) - \tilde{I}(\omega_{N-1})}{\omega_N - \omega_{N-1}} & \text{für } \nu = N \end{cases} \quad (2.98)$$

definiert. Die Größen $\tilde{I}(\omega_\nu)$, $\nu = 0, 1, \dots, N$, werden dabei direkt aus dem Verlauf von $\tilde{I}(\omega)$ entnommen.

Die Approximation von $\tilde{I}(\omega)$ kann dann durch Überlagerung dieser Rampenfunktionen und Addition von $\tilde{I}(\omega_0)$ in der Form

$$\tilde{I}(\omega) \approx \tilde{I}(\omega_0) + \sum_{\nu=0}^N s_\nu(\omega) \quad (2.99)$$

erfolgen. Wird entsprechend der Voraussetzung $\tilde{I}(\omega) \approx 0$ für $\omega \geq \omega_N$ die obere Integrationsgrenze zu $\omega = \omega_N$ gesetzt, so geht Gl. (2.3b) in die Form

$$h(t) \approx R(0) + \frac{2}{\pi} \left[\sum_{\nu=0}^N \int_{\omega_\nu}^{\omega_N} s_\nu(\omega) \cos \omega t \, d\omega + \tilde{I}(\omega_0) \int_0^{\omega_N} \cos \omega t \, d\omega \right] \quad (2.100)$$

über. Mit Gl. (2.97) folgt aus Gl. (2.100)

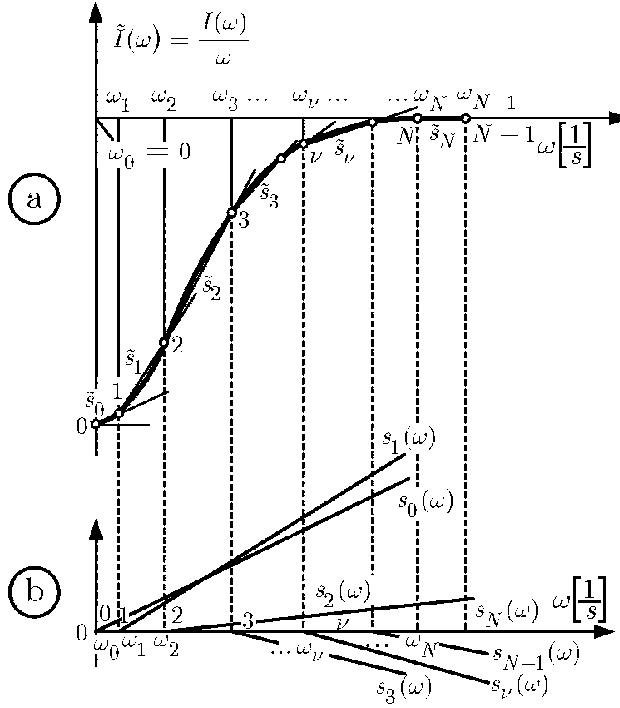


Bild 2.20 (a) Annäherung der Kurve $\tilde{I}(\omega) = I(\omega)/\omega$ durch einen Streckenzug $\tilde{s}_0, \tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_N$ und (b) Darstellung der Rampenfunktionen $s_\nu(\omega)$ nach Gl. (2.97)

$$\begin{aligned}
 h(t) &\approx R(0) \\
 &+ \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=0}^N \left(b_\nu \int_{\omega_\nu}^{\omega_N} \omega \cos \omega t d\omega - \omega_\nu b_\nu \int_{\omega_\nu}^{\omega_N} \cos \omega t d\omega \right) \\
 &+ \frac{2}{\pi} \tilde{I}(\omega_0) \int_0^{\omega_0} \cos \omega t d\omega.
 \end{aligned} \tag{2.101}$$

Nach Auswertung der Integrale und Zusammenfassung aller Terme ergibt sich dann für $t > 0$

$$\begin{aligned}
 h(t) &\approx R(0) + \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{\sin \omega_N t}{t} \left[\tilde{I}(\omega_0) + \sum_{\nu=0}^N b_\nu (\omega_N - \omega_\nu) \right] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{t^2} \sum_{\nu=0}^N b_\nu \cos \omega_\nu t + \frac{\cos \omega_N t}{t^2} \sum_{\nu=0}^N b_\nu \right\}.
 \end{aligned} \tag{2.102}$$

Wird berücksichtigt, dass in Gl. (2.102)

$$\sum_{\nu=0}^N b_\nu = 0$$

und

$$\tilde{I}(\omega_0) + \sum_{\nu=0}^N b_{\nu}(\omega_N - \omega_{\nu}) = \tilde{I}(\omega_N) \approx 0$$

gesetzt werden kann, so folgt schließlich

$$h(t) \approx R(0) + \frac{2}{\pi t^2} \sum_{\nu=0}^N b_{\nu} \cos \omega_{\nu} t, \quad t > 0. \quad (2.103)$$

Diese Gleichung erlaubt zusammen mit Gl. (2.98) durch Einsetzen von Werten für t recht einfach eine näherungsweise Berechnung der Übergangsfunktion $h(t)$ aus dem vorgegebenen Frequenzgang $G(j\omega)$.

Identifikation dynamischer Systeme
Methoden zur experimentellen Modellbildung aus
Messdaten

Bohn, C.; Unbehauen, H.

2016, XX, 698 S. 149 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-8348-1755-6