

Onde elettromagnetiche

Sommario In questo capitolo, dopo aver derivato dalle equazioni di Maxwell l'equazione delle onde, viene introdotta l'onda piana e ne vengono discusse le proprietà. Successivamente è definito lo spettro di frequenza ed è ricavata la relazione che lega la durata di un impulso luminoso alla larghezza spettrale. La propagazione di onde monocromatiche viene affrontata utilizzando l'approssimazione parassiale, valida per fasci di luce che contengano raggi poco inclinati rispetto alla direzione principale di propagazione, come è il caso dei fasci laser. Nell'ambito di tale approssimazione si dimostra che le onde sferiche Gaussiane sono degli invarianti nella propagazione, la qual cosa permette di descrivere gli effetti della propagazione con semplici relazioni algebriche. Viene poi introdotta la teoria classica della diffrazione, vista come una teoria approssimata della propagazione. Si dimostra che l'approssimazione di Fresnel produce risultati equivalenti all'approssimazione parassiale. Si discute infine l'approssimazione di Fraunhofer, che viene applicata ad alcuni casi semplici.

2.1 Onde elettromagnetiche nel vuoto

La propagazione nel vuoto di un'onda elettromagnetica è descritta dalle equazioni di Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.4)$$

dove \mathbf{E} è il campo elettrico (unità di misura: V/m), e \mathbf{B} è l'induzione magnetica (Tesla, T). La costante ϵ_0 è chiamata costante dielettrica (o permittività elettrica) del vuoto e vale 8.854×10^{-12} F/m, mentre μ_0 rappresenta la permeabilità magnetica del vuoto e vale $4\pi \times 10^{-7}$ H/m.

Ricordando una proprietà generale degli operatori differenziali:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \quad (2.5)$$

prendendo il rotore di entrambe i membri della (2.4), e tenendo conto della (2.1), si ha:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial(\nabla \times \mathbf{B})}{\partial t}. \quad (2.6)$$

Utilizzando la (2.3), si ottiene infine una equazione, detta equazione delle onde, che contiene come unica incognita il campo elettrico:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (2.7)$$

dove $c = (\epsilon_o \mu_o)^{-1/2}$ è la velocità di propagazione dell'onda elettromagnetica. Ovviamente \mathbf{B} soddisfa ad una equazione identica alla (2.7).

L'onda elettromagnetica descritta dalle equazioni di Maxwell trasporta energia. La direzione del flusso di energia è quella del vettore di Poynting, definito come:

$$\mathbf{S_P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (2.8)$$

dove $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_o$ è il campo magnetico (unità di misura: A/m). Il modulo del vettore $\mathbf{S_P}$, che ha le dimensioni di W/m^2 , rappresenta la potenza per unità di area trasportata dal campo elettromagnetico.

Una importante soluzione particolare della (2.7) è l'onda piana monocromatica:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_o \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi) = \mathbf{E}_o \text{Re}\{\exp[-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi)]\} \quad (2.9)$$

dove \mathbf{k} è il vettore propagazione, che ha modulo $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$, λ è la lunghezza d'onda, e ϕ una fase costante che può sempre essere posta uguale a 0 scegliendo opportunamente l'origine dell'asse dei tempi. L'onda descritta dalla (2.9) è chiamata piana perché ha superfici equifase (dette anche fronti d'onda) che sono piane. Le superfici equifase sono perpendicolari a \mathbf{k} .

Sostituendo la (2.9) nella (2.1), si ha: $i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$, cioè $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$. Analogamente, usando la (2.2), si trova: $\mathbf{B} \perp \mathbf{k}$. Con la (2.4) si dimostra inoltre che $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$, e che \mathbf{B} ed \mathbf{E} hanno la stessa fase. Si ricava infine che: $B = \sqrt{\epsilon_o \mu_o} E$. Riassumendo la situazione, il campo elettrico e quello magnetico sono mutuamente perpendicolari, e giacciono entrambi nel piano perpendicolare alla direzione di propagazione: si tratta quindi di un'onda trasversa. Inoltre \mathbf{B} ed \mathbf{E} oscillano in fase.

Il vettore di Poynting dell'onda piana è diretto come il vettore propagazione \mathbf{k} . Inserendo la (2.9) nella (2.8) si ricava la seguente espressione:

$$\mathbf{S_P} = c\epsilon_o E_o^2 \frac{\mathbf{k}}{k} \cos^2(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi). \quad (2.10)$$

I campi a frequenza ottica sono funzioni del tempo che variano molto rapida-

mente. Ad esempio, il periodo di oscillazione di un campo che ha lunghezza d'onda $\lambda = 1 \mu\text{m}$ è $T = \lambda/c = 3.3 \times 10^{-15} \text{ s} = 3.3 \text{ fs}$. Spesso, come nel caso del vettore di Poynting che rappresenta un flusso di energia, è più significativo considerare il valore medio nel tempo piuttosto che il valore istantaneo. Date due funzioni sinusoidali alla stessa frequenza $a(t) = A \cos(\omega t + \alpha)$ e $b(t) = B \cos(\omega t + \beta)$ si ha che la media temporale del prodotto è data da:

$$\langle a(t)b(t) \rangle = \frac{1}{2}AB \cos(\alpha - \beta). \quad (2.11)$$

Utilizzando la (2.11) si ricava che la media temporale del modulo di \mathbf{S}_p , che viene chiamata intensità I dell'onda elettromagnetica, è uguale a:

$$I = c \frac{\epsilon_0 E_o^2}{2}. \quad (2.12)$$

Per un'onda monocromatica, i vettori di campo sono funzioni sinusoidali del tempo e dello spazio, ma spesso è utile rappresentarli in termini di funzioni esponenziali complesse come mostrato nella (2.9). In questo testo i campi saranno spesso indicati come funzioni del tipo $\mathbf{E} = \mathbf{E}_o \exp[-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi)]$. Usando questo tipo di notazione bisognerà comunque ricordare che solo la parte reale dell'espressione complessa ha un effettivo significato fisico.

2.2 Spettro dei segnali ottici

Si consideri un generico fascio di luce caratterizzato da un campo elettrico $E(\mathbf{r}, t)$ che, per semplicità, prendiamo sotto forma scalare. Il campo $E(t)$ (nelle formule seguenti ometteremo la coordinata spaziale \mathbf{r}) può essere espresso come una sovrapposizione pesata di funzioni sinusoidali a diversa frequenza. La forma matematica di tale sovrapposizione è l'integrale:

$$E(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega E(\omega) \exp(-i\omega t). \quad (2.13)$$

La funzione $E(\omega)$ rappresenta, in ampiezza e fase, il peso della componente a frequenza ω . Da un punto di vista matematico, $E(\omega)$ è la trasformata di Fourier di $E(t)$.

Invertendo la (2.13), si ha:

$$E(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt E(t) \exp(i\omega t). \quad (2.14)$$

Lo spettro di intensità del segnale luminoso, $S(\omega)$, è espresso da:

$$S(\omega) = c \frac{\epsilon_0 |E(\omega)|^2}{2}. \quad (2.15)$$

Nel prossimo capitolo verranno discussi i metodi per misurare lo spettro di potenza. È importante sottolineare che nella misura di $S(\omega)$ si perde l'informazione sulla fase di $E(\omega)$, quindi la conoscenza di $S(\omega)$ non è sufficiente, in generale, per ricostruire l'andamento temporale di $E(t)$.

Nel caso particolare di segnale monocromatico, $E(t) = E_o \exp(-i\omega_o t)$, $E(\omega)$ diventa una funzione singolare, perché è nulla per tutti i valori $\omega \neq \omega_o$, e diventa infinita se $\omega = \omega_o$. Per rappresentare questo andamento è utile introdurre la funzione δ di Dirac, che ha integrale unitario. La trasformata di Fourier dell'onda monocromatica si può scrivere come:

$$E(\omega) = E_o \delta(\omega - \omega_o). \quad (2.16)$$

La luce emessa dalle sorgenti convenzionali contiene una molteplicità di frequenze, ognuna delle quali oscilla con una fase completamente casuale e del tutto priva di correlazione con quella delle altre frequenze. Nel caso del laser è invece possibile introdurre un vincolo di fase tra le diverse frequenze emesse. Questa proprietà è estremamente importante perché permette di generare in modo perfettamente controllato impulsi di luce anche molto brevi e con elevate potenze di picco, come si è visto nel capitolo precedente.

Nel caso di un impulso di luce che abbia andamento temporale gaussiano, come quello mostrato nella Fig. 2.1, il campo elettrico può essere espresso come:

$$E(t) = A_o \exp\left(-\frac{t^2}{2\tau_i^2}\right) \exp(-i\omega_o t) \quad (2.17)$$

dove ω_o è la frequenza centrale del segnale luminoso, e τ_i è il ritardo al quale l'intensità si riduce del fattore $1/e$ rispetto al valore di picco. Di solito si definisce come durata di un impulso di luce τ_p la larghezza a metà altezza del picco di intensità, che è legata a τ_i dalla relazione:

$$\tau_p = 2\sqrt{\ln 2} \tau_i = 1.67 \tau_i. \quad (2.18)$$

Ricordando l'integrale definito:

$$\int_0^\infty \exp(-a^2 t^2) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \quad (2.19)$$

la trasformata di Fourier della (2.17), che è anch'essa una funzione gaussiana, può essere facilmente calcolata, ottenendo:

$$E(\omega) = \sqrt{2\pi} \tau_i A_o \exp\left(-\frac{\tau_i^2 (\omega - \omega_o)^2}{2}\right). \quad (2.20)$$

Se $\Delta \nu$ è la larghezza a metà altezza del picco dello spettro di potenza, si trova che, per l'impulso descritto dalla (2.17), vale la relazione:

$$\Delta \nu \tau_p = \frac{2 \ln 2}{\pi} = 0.441. \quad (2.21)$$

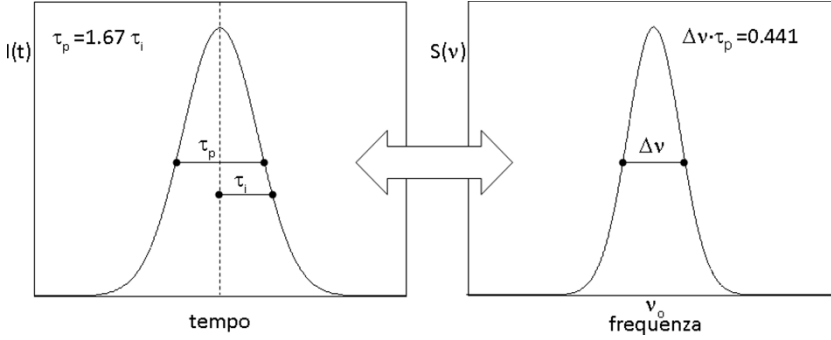


Fig. 2.1 Impulso gaussiano e suo spettro di potenza

Se l'impulso ha una forma temporale diversa dalla gaussiana, il prodotto tra banda in frequenza e durata temporale non è più uguale a 0.441, ma è comunque espresso da un numero dell'ordine di 1.

È importante notare che la relazione (2.21) vale solo nel caso in cui $E(\omega)$ sia una quantità reale, il che equivale a dire che tutte le componenti in frequenza dell'impulso abbiano la stessa fase. Un impulso di questo tipo è chiamato “transform-limited pulse”.

Nel caso generale di impulsi che non siano “transform-limited”, la (2.21) fornisce solo il limite inferiore del prodotto banda-durata. Per considerare un caso estremo, si potrebbe creare un impulso gaussiano di durata τ_p agendo con un interruttore elettro-ottico (descritto nel Capitolo 4) su di un fascio di luce solare. In questo caso, la banda spettrale dell'impulso rimarrebbe quella della luce solare, e quindi il prodotto banda-durata sarebbe superiore di molti ordini di grandezza al valore 0.441.

2.3 Polarizzazione della luce

Una proprietà importante delle onde trasversali è la polarizzazione. Un'onda luminosa è detta polarizzata linearmente se il campo elettrico ad essa associato oscilla nel tempo senza cambiare direzione. La direzione di \mathbf{E} individua la direzione di polarizzazione dell'onda piana.

Nel caso generale, supponendo, per fissare le idee, di considerare un'onda piana che si propaghi lungo l'asse z , il campo elettrico avrà componenti lungo gli assi x e y che sono entrambe funzioni sinusoidali:

$$E_x = E_{x0} \cos(\omega t - kz) \quad (2.22)$$

$$E_y = E_{y0} \cos(\omega t - kz + \phi) \quad (2.23)$$

dove ϕ è lo sfasamento fra le due componenti. Ponendo $X = E_x/E_{x0} = \cos(\omega t - kz)$ e $Y = E_y/E_{y0} = \cos(\omega t - kz + \phi) = \cos(\omega t - kz) \cos \phi - \sin(\omega t - kz) \sin \phi$, si può ricavare una equazione implicita tra X e Y che non contiene più le coordinate

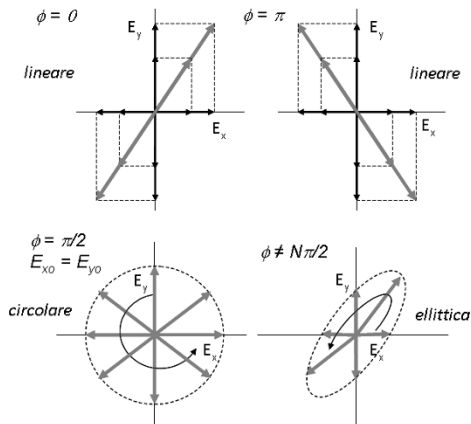


Fig. 2.2 Polarizzazione dell'onda elettromagnetica al variare dello sfasamento tra le componenti E_x e E_y

spazio-temporali:

$$X \cos \phi - Y = \sqrt{1 - X^2} \sin \phi. \quad (2.24)$$

Elevando al quadrato entrambi i membri della (2.24) si arriva all'equazione:

$$X^2 + Y^2 - 2XY \cos \phi = \sin^2 \phi \quad (2.25)$$

e quindi:

$$\frac{E_x^2}{E_{x0}^2} + \frac{E_y^2}{E_{y0}^2} - 2 \frac{E_x E_y}{E_{x0} E_{y0}} \cos \phi = \sin^2 \phi. \quad (2.26)$$

Nel piano individuato dalle due componenti del campo elettrico, la (2.26) rappresenta l'equazione della traiettoria descritta dal vertice del vettore campo elettrico nell'intervallo di tempo corrispondente ad un periodo ottico $T = 1/\nu$, come mostrato in Fig. 2.2. Nel caso generale la traiettoria ha forma ellittica. Nel caso particolare in cui $\phi = 0$, l'ellisse diventa una retta, cioè la direzione del vettore campo elettrico rimane costante nel tempo (polarizzazione lineare), formando con l'asse y un angolo θ tale che $\tan \theta = E_{x0}/E_{y0}$. Anche nel caso in cui lo sfasamento tra le due componenti del campo sia $\phi = \pi$, la polarizzazione risulta lineare, ma in una direzione che forma un angolo $-\theta$ rispetto all'asse y .

Nel caso particolare $\phi = \pm\pi/2$ e $E_{x0} = E_{y0}$, il vertice del vettore campo elettrico descrive un cerchio. Si parla in questo caso di polarizzazione circolare. La rotazione del vettore campo elettrico può avvenire in senso orario (polarizzazione circolare destrorsa) o antiorario (polarizzazione circolare sinistrorsa) a seconda che ϕ sia uguale a $\pi/2$ o a $-\pi/2$.

Uno stato generico di polarizzazione della luce può essere anche descritto come sovrapposizione di due polarizzazioni circolari, una destrorsa e una sinistrorsa, aventi diversa ampiezza e diversa fase. Se le due polarizzazioni circolari hanno diversa ampiezza, la polarizzazione risultante è ellittica, mentre, se hanno la stessa ampiezza, la polarizzazione risultante è lineare con una direzione determinata dallo sfasamento fra le due polarizzazioni circolari.

Nel caso del sole e delle sorgenti convenzionali si dice solitamente che la luce

emessa è depolarizzata. In realtà ciò che avviene è che lo stato di polarizzazione fluttua in modo casuale su di una scala di tempi molto più rapida di quella tipica della misura di polarizzazione.

2.4 Approssimazione parassiale

Da ora in poi in questo capitolo verranno prese in considerazione onde monocromatiche, cioè contenenti una sola lunghezza d'onda, per le quali verranno utilizzate delle trattazioni approssimate che permettono di risolvere problemi di propagazione in situazioni nelle quali le dimensioni dei componenti ottici e dei fasci di luce si possano considerare grandi rispetto alla lunghezza d'onda.

Nel caso di un'onda monocromatica con frequenza angolare ω , si può porre: $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)$. Sostituendo questa espressione nell'equazione delle onde, si ottiene l'equazione di Helmholtz:

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.27)$$

Nelle applicazioni non si ha mai a che fare con onde piane, ma con fasci di luce collimati, come quello emesso dal laser. In questa sezione viene discussa l'approssimazione parassiale, che è particolarmente adatta a trattare situazioni in cui il fascio di luce, propagandosi lungo una direzione che assumeremo coincidente con l'asse z , contiene solo onde che abbiano un vettore \mathbf{k} poco inclinato rispetto all'asse di propagazione.

Poiché la trattazione svolta in questo capitolo riguarderà da ora in poi la dipendenza del campo elettrico dalle sole coordinate spaziali, verrà omissa il termine $\exp(-i\omega t)$ in tutte le espressioni del campo elettrico.

Sostituendo nella (2.27) la seguente espressione:

$$E(x, y, z) = U(x, y, z) \exp(ikz) \quad (2.28)$$

si ottiene:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial U}{\partial z} = 0. \quad (2.29)$$

L'approssimazione parassiale assume che U sia una funzione di z lentamente variabile, nel senso che la scala spaziale su cui U cambia in modo significativo sia molto più grande di λ , come mostrato qualitativamente nella Fig. 2.3. Matematicamente, questo equivale a supporre che la derivata di U rispetto a z sia piccola rispetto a kU , e quindi che la derivata seconda di U rispetto a z sia piccola rispetto a kdU/dz .

Per chiarire meglio il significato di questa importante approssimazione, si consideri il caso semplice di un'onda che sia la somma di tre onde piane, una con il vettore \mathbf{k} diretto secondo l'asse z , le altre due con vettore \mathbf{k} che giace nel piano xz e forma un angolo $\pm\alpha$ con l'asse z . Assumendo che le tre onde abbiano la stessa

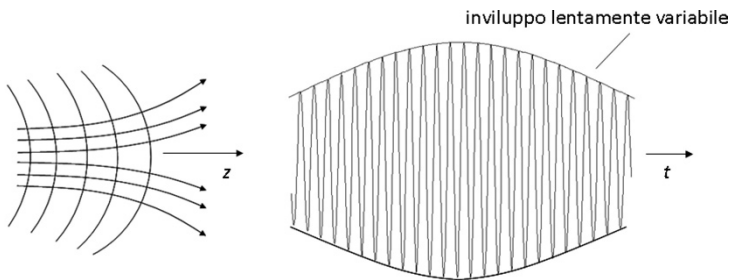


Fig. 2.3 Propagazione in approssimazione parassiale

ampiezza, il campo elettrico complessivo è dato da:

$$E(x, y, z) = E_o \exp(ikz)U(x, y, z)$$

dove

$$U(x, y, z) = 1 + \exp[ik(\cos \alpha - 1)z][\exp(ikx \sin \alpha) + \exp(-ikx \sin \alpha)].$$

Si ottiene:

$$\frac{dU}{dz} = ik(\cos \alpha - 1)U.$$

Se l'angolo α è piccolo, anche la quantità $\cos \alpha - 1$ è piccola, ed è quindi dimostrata la validità dell'approssimazione:

$$\left| \frac{dU}{dz} \right| \ll |kU|.$$

Trascurando la derivata seconda di U rispetto a z nella (2.29), si ottiene la cosiddetta equazione parassiale:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial U}{\partial z} = 0. \quad (2.30)$$

2.4.1 Onda sferica

Una importante soluzione particolare dell'equazione delle onde (2.7), che descrive in forma scalare un'onda monocromatica avente fronti d'onda sferici, è la seguente:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{A}_o}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_o|} \exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_o|). \quad (2.31)$$

L'onda ha origine nel punto \mathbf{r}_o che ha coordinate x_o, y_o, z_o . Assumendo che l'origine dell'onda sferica si trovi sull'asse z , cioè che $x_o = y_o = 0$, la distanza $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_o|$ è data

da:

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2} \\
 &= (z - z_0) \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{(z - z_0)^2}}.
 \end{aligned}
 \tag{2.32}$$

Applicare l'approssimazione parassiale alla (2.32) significa ritenere che la frazione che compare sotto radice nell'ultimo membro sia piccola rispetto ad 1. Sviluppando in serie di potenze la radice quadrata, e troncando al primo ordine, si ottiene:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \approx (z - z_0) \left[1 + \frac{x^2 + y^2}{2(z - z_0)^2} \right]. \tag{2.33}$$

Utilizzare la (2.33) al posto della (2.32) equivale ad approssimare il fronte d'onda sferico con un paraboloide. La validità della (2.33) è chiaramente limitata a situazioni nelle quali si osservi l'onda a distanze dall'asse di propagazione che siano piccole rispetto al valore della coordinata $z - z_0$.

Chiamando $R(z) = z - z_0$ il raggio di curvatura del fronte d'onda, l'ampiezza complessa del campo elettrico associato all'onda sferica può essere scritta come:

$$U(x, y, z) = \frac{A_0}{R(z)} \exp \left(ik \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} \right). \tag{2.34}$$

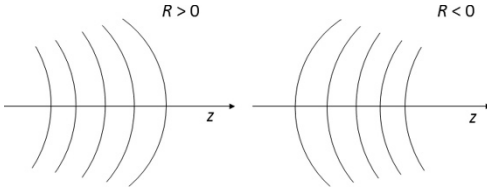


Fig. 2.4 Convenzione per il segno del raggio di curvatura del fronte d'onda dell'onda sferica

Il raggio di curvatura del fronte d'onda, R , è una grandezza dotata di segno: con la convenzione scelta (mostrata nella Fig. 2.4), R positivo significa fronte d'onda con la convessità rivolta verso le coordinate z positive, cioè onda divergente.

2.4.2 Onda sferica gaussiana

Il fascio di luce emesso dal laser può essere descritto come un'onda sferica che presenta una distribuzione trasversale di intensità di tipo gaussiano. L'ampiezza

complessa del campo elettrico di una tale onda è:

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= A(z) \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{w^2} \right] \exp \left[i \frac{k(x^2 + y^2)}{2R} \right] \\ &= A(z) \exp \left[i \frac{k(x^2 + y^2)}{2q} \right] \end{aligned} \quad (2.35)$$

dove w è la distanza dall'asse a cui l'ampiezza del campo si riduce di un fattore $1/e$. Il parametro w viene chiamato raggio dell'onda gaussiana.

Nel membro a destra della (2.35) compare la grandezza q , detta raggio di curvatura complesso, definita come:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} + i \frac{\lambda}{\pi w^2}. \quad (2.36)$$

Sostituendo la (2.35) nella (2.30), si trova che l'onda sferica gaussiana rappresenta una soluzione dell'equazione parassiale. Questo vuol dire che l'onda si propaga lunga l'asse z mantenendo invariata la sua espressione funzionale, e cambiando nella propagazione l'ampiezza $A(z)$ ed il raggio di curvatura complesso $q(z)$. La sostituzione nell'equazione parassiale genera la seguente equazione:

$$\left[\frac{k^2}{q^2} \left(\frac{dq}{dz} - 1 \right) (x^2 + y^2) + \frac{2ik}{q} \left(\frac{q}{A} \frac{dA}{dz} + 1 \right) \right] A(z) = 0. \quad (2.37)$$

L'unico modo in cui la (2.37) possa essere soddisfatta per tutti i valori di x e y è che valgano le due equazioni:

$$\frac{dq}{dz} = 1; \quad \frac{dA(z)}{dz} = -\frac{A(z)}{q(z)}. \quad (2.38)$$

Le soluzioni delle (2.38), con le condizioni iniziali $q(z_o) = q_o, A(z_o) = A_o$, sono:

$$q(z) = q_o + z - z_o; \quad \frac{A(z)}{A_o} = \frac{q_o}{q(z)}. \quad (2.39)$$

La prima delle (2.39) mostra che il raggio di curvatura complesso dell'onda sferica gaussiana si comporta esattamente come il raggio di curvatura reale dell'onda sferica che abbiamo discusso nella sezione precedente, la seconda delle (2.39) indica che l'ampiezza del campo elettrico cambia nella propagazione seguendo un andamento inversamente proporzionale al raggio di curvatura complesso.

Per comprendere meglio il significato dei risultati ottenuti, è utile discutere il caso in cui si abbia, in corrispondenza del piano $z = 0$, un'onda sferica gaussiana che presenti un fronte d'onda piano. Questo significa che il raggio di curvatura R_o è infinito per $z = 0$. Su questo piano il raggio di curvatura complesso è quindi dato da: $1/q_o = i\lambda/(\pi w_o^2)$, dove w_o è il raggio del fascio. La distribuzione di campo sul

piano $z = 0$ è:

$$U(x_o, y_o) = A_o \exp \left[i \frac{k(x_o^2 + y_o^2)}{2q_o} \right]. \quad (2.40)$$

Avendo assegnato la forma dell'onda alla coordinata $z = 0$, si può calcolare la distribuzione di campo alla coordinata generica z semplicemente inserendo le due condizioni (2.39) nella (2.35). Si noti che il problema di propagazione dell'onda luminosa viene risolto senza ricorrere all'equazione differenziale (2.30), ma utilizzando solo delle relazioni algebriche. Si ottiene:

$$U(x, y, z) = A_o \frac{q_o}{q_o + z} \exp \left[i \frac{k(x^2 + y^2)}{2(q_o + z)} \right] \quad (2.41)$$

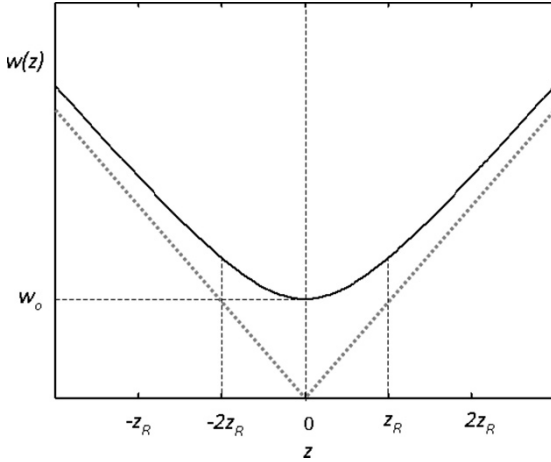


Fig. 2.5 Onda sferica gaussiana: andamento del parametro $w(z)$

che può anche essere scritta come:

$$U(x, y, z) = A_o \frac{w_o}{w(z)} \exp[-i\psi(z)] \exp \left[i \frac{k(x^2 + y^2)}{2q(z)} \right] \quad (2.42)$$

dove

$$q(z) = z + q_o = z - \frac{i\pi w_o^2}{\lambda} \quad (2.43)$$

$$w(z) = w_o \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_o^2} \right)^2} = w_o \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2} \quad (2.44)$$

$$\psi(z) = \arctan \left(\frac{\lambda z}{\pi w_o^2} \right) = \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right). \quad (2.45)$$

La quantità z_R , detta lunghezza di Rayleigh, è definita come:

$$z_R = \frac{\pi w_o^2}{\lambda}. \quad (2.46)$$

L'andamento di $w(z)$ è riportato nella Fig. 2.5. Si noti che il raggio del fascio cresce lentamente per piccoli z : si può dare una definizione della distanza su cui il fascio di luce mantiene il raggio minimo assumendo che tale distanza coincida con quella necessaria a variare di un fattore $\sqrt{2}$ il raggio minimo. Tale distanza è precisamente la lunghezza di Rayleigh.

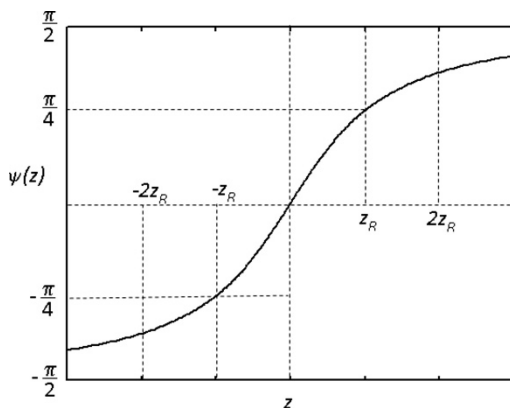


Fig. 2.6 Onda sferica gaussiana: andamento della fase aggiuntiva in funzione della coordinata di propagazione

La (2.42) indica che l'onda sferica gaussiana acquista nella propagazione uno sfasamento $\psi(z)$ aggiuntivo rispetto a quello tipico dell'onda piana. La (2.45) mostra che lo sfasamento aggiuntivo varia da $-\pi/2$ per $z \ll z_R$ a $\pi/2$ per $z \gg z_R$, come illustrato nella Fig. 2.6.

Attraverso la relazione (2.43) si ricava la dipendenza da z del raggio di curvatura del fronte d'onda dell'onda sferica gaussiana:

$$R(z) = z + \frac{1}{z} \left(\frac{\pi w_o^2}{\lambda} \right)^2 = z + \frac{z_R^2}{z}. \quad (2.47)$$

L'andamento di $R(z)$ è riportato nella Fig. 2.7.

È interessante discutere il comportamento dell'onda sferica gaussiana per distanze grandi rispetto alla lunghezza di Rayleigh. Se $z \gg z_R$, si ha dalla (2.44):

$$w(z) \approx \frac{\lambda z}{\pi w_o}. \quad (2.48)$$

Questa espressione mostra che il raggio del fascio di luce cresce proporzionalmente alla distanza dall'origine. La potenza luminosa è quindi prevalentemente

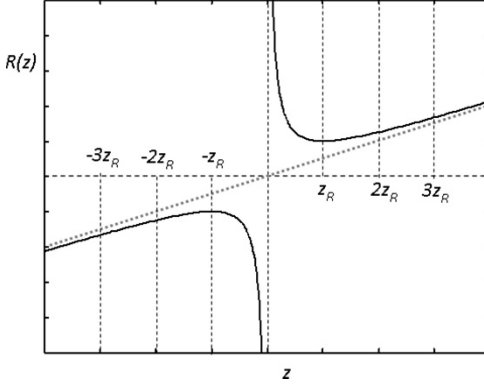


Fig. 2.7 Onda sferica gaussiana: andamento del raggio di curvatura del fronte d'onda in funzione della coordinata di propagazione

concentrata in un cono avente apertura:

$$\theta_o = \frac{\lambda}{\pi w_o}. \quad (2.49)$$

L'angolo θ_o è detto l'angolo di divergenza del fascio di luce. La (2.49) esprime un concetto molto generale per la propagazione di un'onda: ad una limitazione nella dimensione trasversale corrisponde necessariamente uno sparpagliamento angolare nella direzione del vettore propagazione. A meno di un fattore numerico dell'ordine dell'unità, l'angolo di divergenza è dato dal rapporto tra lunghezza d'onda e dimensione trasversale del fascio di luce. Si vedrà successivamente che un simile risultato si ottiene anche trattando il classico problema di diffrazione in cui un'onda piana attraversa un foro di raggio $D/2$, generando un fascio di luce con sparpagliamento angolare $\approx 2\lambda/D$.

Nell'ipotesi $z \gg z_R$, $R(z)$ diviene uguale a z , cioè il raggio di curvatura diventa identico a quello di un'onda sferica generata alla coordinata $z = 0$.

La trattazione svolta in questa sezione ha dimostrato che le proprietà delle onde sferiche gaussiane costituiscono una interessante generalizzazione delle proprietà delle onde sferiche ordinarie. L'aspetto importante è che le formule che descrivono l'onda sferica gaussiana contengono gli effetti della diffrazione.

2.5 Diffrazione. Approssimazione di Fresnel

La teoria della diffrazione è nata per trattare la situazione schematizzata nella Fig. 2.8. Un'onda piana monocromatica con vettore propagazione \mathbf{k} diretto secondo l'asse z investe uno schermo piano, che giace sul piano xy , opaco dappertutto tranne che in una zona trasparente che è definita da Σ . Si vuole determinare la distribuzione spaziale del campo elettromagnetico a destra del piano xy . Per trattare in modo esatto il problema occorrerebbe risolvere l'equazione delle onde con le opportune condizioni al contorno. Siccome il problema è troppo complicato, si ricorre a

soluzioni approssimate. L'approssimazione più semplice è quella dell'ottica geometrica, che, nel caso in figura, direbbe che il campo trasmesso è ancora un'onda piana, però limitata alla zona avente come base la superficie Σ e come direzione del-

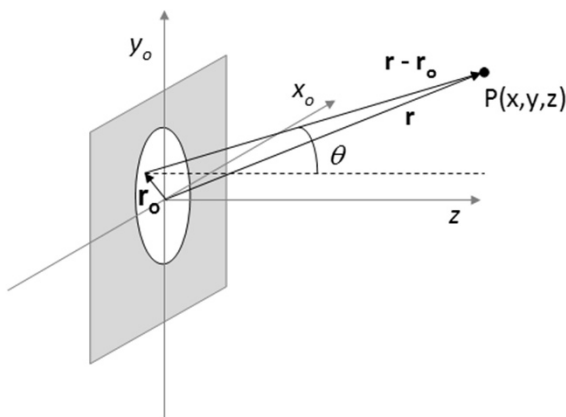


Fig. 2.8 Diffrazione da una apertura Σ che giace nel piano $z = 0$

l'asse quella di \mathbf{k} . Sperimentalmente si osserva invece che, al di là dell'apertura, ci sono anche onde elettromagnetiche con vettore di propagazione diverso da \mathbf{k} . Una approssimazione più soddisfacente si può ottenere ricorrendo alla teoria della diffrazione, impostata da Huygens e successivamente elaborata da Fresnel e da Kirchhoff. Qualitativamente l'idea è la seguente: ciascun elemento infinitesimo della superficie Σ investita dall'onda incidente si comporta come sorgente di un'onda sferica avente fase e ampiezza fissate, punto per punto, da quelle del campo incidente. Il campo elettrico in un determinato punto nel semispazio a destra dello schermo si calcola sovrapponendo i contributi di tutti gli elementi di superficie dell'apertura, ognuno con la fase appropriata, che viene calcolata tenendo conto della distanza percorsa. Si noti che il principio della sovrapposizione degli effetti è una diretta conseguenza della linearità delle equazioni di Maxwell.

La teoria può essere applicata anche in situazioni in cui l'onda incidente non è un'onda piana che viaggia lungo l'asse z . Il campo incidente viene caratterizzato come una grandezza scalare complessa, $E_i(x_o, y_o)$, dove x_o, y_o sono le coordinate che individuano i punti sul piano dello schermo. Il campo diffratto nel punto $P(x, y, z)$ è dato dal seguente integrale di superficie:

$$E(\mathbf{r}) = \frac{i}{\lambda} \iint_{\Sigma} E_i(\mathbf{r}_o) \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_o|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_o|} \cos \theta dx_o dy_o \quad (2.50)$$

dove $\mathbf{r} = (x, y, z)$ è il vettore che indica la posizione di P rispetto all'origine, \mathbf{r}_o è il vettore che indica la posizione dell'elemento di superficie $dx_o dy_o$ sul piano dello schermo, e θ è l'angolo formato dal vettore $\mathbf{r} - \mathbf{r}_o$ con l'asse z . Si ha quindi:

$$\cos \theta = \frac{z}{\sqrt{(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 + z^2}} \quad (2.51)$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_o| = \sqrt{(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 + z^2} = z \sqrt{1 + \frac{(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2}{z^2}}. \quad (2.52)$$

Si noti l'unità immaginaria i a moltiplicare l'integrale (2.50): questo significa che c'è uno sfasamento $\pi/2$ tra l'onda sferica irradiata da ciascun elemento della superficie Σ e l'onda incidente. L'integrale (2.50) rappresenta un'ottima approssimazione della soluzione esatta in tutti i casi in cui il campo diffratto è osservato in un punto che ha una distanza dal piano xy molto maggiore della lunghezza d'onda, cioè $z \gg \lambda$.

L'integrale (2.50) può essere esteso a tutto il piano xy moltiplicando la funzione integranda per un coefficiente di trasmissione $\tau(x_o, y_o)$ che vale 1 all'interno di Σ e 0 all'esterno di Σ . Ma l'introduzione di $\tau(x_o, y_o)$ permette anche di generalizzare la trattazione al caso in cui lo schermo presenti zone parzialmente trasparenti (in tal caso il modulo di τ potrebbe assumere tutti i valori compresi tra 0 e 1) e zone in cui si modifichi la fase del campo incidente (in tal caso τ diventerebbe una grandezza complessa).

La generalizzazione dell'integrale di diffrazione (2.50) assume la forma:

$$E(\mathbf{r}) = \frac{i}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} dx_o \int_{-\infty}^{\infty} \tau(x_o, y_o) E_i(\mathbf{r}_o) \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_o|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_o|} \cos \theta dy_o. \quad (2.53)$$

La teoria della diffrazione, vista attraverso l'integrale (2.53), costituisce una teoria approssimata della propagazione di onde elettromagnetiche. Infatti, una volta assegnata una distribuzione di campo sul piano $z = 0$ immediatamente a destra dello schermo, la (2.53) permette di calcolare il campo sul piano generico a distanza z .

In molti casi è utile considerare l'integrale di diffrazione nell'approssimazione di Fresnel. Assumendo che i raggi siano poco inclinati rispetto all'asse z è possibile sviluppare in serie di potenze il membro a destra della (2.52), trascurando tutti i termini di ordine superiore al primo. Nell'integrale (2.53) si può quindi porre $\cos \theta = 1$ e $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_o| = z$. Si noti però che l'esponenziale richiede un trattamento particolare: in generale, in un'esponenziale del tipo $\exp[i(A + A_1)]$, la constatazione che A_1 è molto piccolo rispetto ad A non è una ragione sufficiente per eliminare A_1 . Poiché l'esponenziale con esponente immaginario è una funzione periodica con periodo 2π , A_1 può essere infatti trascurato solo se è piccolo rispetto a 2π . Nell'esponenziale occorre quindi tenere il termine al primo ordine nello sviluppo in serie della (2.52):

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_o| \approx z \left[1 + \frac{(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2}{2z^2} \right]. \quad (2.54)$$

La condizione perché si possa trascurare il termine successivo al primo è:

$$\frac{k(x-x_o)^4}{4z^3} \ll 2\pi. \quad (2.55)$$

Se D è il diametro dell'apertura, la (2.55) dice che l'approssimazione di Fresnel è

certamente valida se è soddisfatta la condizione:

$$z^3 \gg \frac{D^4}{\lambda}. \quad (2.56)$$

In realtà, paragonando i risultati ottenuti con l'approssimazione di Fresnel a risultati numerici esatti, si constata che la condizione (2.56) è eccessivamente restrittiva.

In conclusione, l'integrale (2.53), scritto nell'approssimazione di Fresnel, diviene:

$$E(\mathbf{r}) = \frac{i \exp(ikz)}{\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} dx_o \int_{-\infty}^{\infty} \tau(x_o, y_o) E_i(\mathbf{r}_o) \exp\{ik/(2z)[(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2]\} dy_o. \quad (2.57)$$

L'integrale (2.57) rappresenta una convoluzione di un nucleo Gaussiano complesso con la distribuzione di campo presente immediatamente a destra del piano $x_o y_o$.

L'approssimazione di Fresnel può essere utilizzata per descrivere la propagazione libera di onde sferiche gaussiane. Si consideri un'onda sferica gaussiana che presenti un fronte d'onda piano in corrispondenza del piano $z = 0$. Questo significa che il raggio di curvatura R_o è infinito per $z = 0$. Il raggio di curvatura complesso è quindi dato da: $1/q_o = i\lambda/(\pi w_o^2)$, dove w_o è il raggio del fascio sul piano $z = 0$. La distribuzione di campo sul piano $z = 0$ è quindi:

$$E_i(x_o, y_o) = A_o \exp \left[i \frac{k(x_o^2 + y_o^2)}{2q_o} \right]. \quad (2.58)$$

La distribuzione di campo alla coordinata z si calcola inserendo la (2.58) nella (2.57), con $\tau(x_o, y_o) = 1$. Notando che l'integrale di diffrazione può essere facilmente calcolato per via analitica separando l'integrazione su x_o da quella su y_o , si ottiene:

$$E(x, y, z) = A_o \frac{i \exp(ikz)}{\lambda z} J(x, z) J(y, z) \quad (2.59)$$

dove:

$$J(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[i \frac{k(x-x_o)^2}{2z} \right] \exp \left[i \frac{kx_o^2}{2q_o} \right] dx_o. \quad (2.60)$$

Tenendo presente che:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{x^2}{w^2} \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(x-c)^2}{w^2} \right] dx = \sqrt{\pi} w \quad (2.61)$$

dove c è una costante arbitraria, possiamo calcolare facilmente l'integrale (2.60) se esprimiamo la funzione integranda come esponenziale di un quadrato. Si ha:

$$\begin{aligned}
J(x, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{ik}{2} \left(\frac{q_o + z}{q_o z} x_o^2 - \frac{2xx_o}{z} + \frac{x^2}{z} \right) \right] dx_o \\
&= \exp \left[\frac{ikx^2}{2(q_o + z)} \right] \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ \frac{ik(q_o + z)}{2q_o z} \left[x_o - \frac{q_o x}{q_o + z} \right]^2 \right\} dx_o.
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Il risultato dell'integrale (2.62) è:

$$E(x, y, z) = A_o \frac{q_o}{q_o + z} e^{ikz} \exp \left[i \frac{k(x^2 + y^2)}{2(q_o + z)} \right]. \tag{2.63}$$

Si è quindi ritrovato per altra via la (2.41). In altri termini, la trattazione del problema di propagazione con la teoria della diffrazione di Fresnel si è rivelata equivalente a quella basata sull'equazione parassiale.

2.6 Diffrazione di Fraunhofer

La trattazione della diffrazione può essere ulteriormente semplificata introducendo l'approssimazione di Fraunhofer, che consiste nel trascurare nell'espressione (2.57) i termini quadratici in x_o e y_o . Tale approssimazione è valida solo se i termini che si trascurano sono piccoli rispetto a π . Deve quindi valere la condizione:

$$z \gg \frac{(x_o^2 + y_o^2)}{\lambda}. \tag{2.64}$$

Nel caso di una apertura circolare di diametro D , il valore massimo della somma $x_o^2 + y_o^2$ è $D^2/4$, quindi la condizione diventa: $z \gg D^2/(4\lambda)$. In un caso pratico può essere molto difficile soddisfare questa condizione. Ad esempio, se $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$, e il diametro dell'apertura è $D = 5 \text{ cm}$, la (2.64) richiede $z \gg 3 \text{ km}$. Questo esempio spiega perché l'approssimazione di Fraunhofer viene anche detta approssimazione di campo lontano. Come si vedrà nella Sezione 3.3, è però possibile, utilizzando semplicemente una lente convergente, portare il campo lontano su di un piano vicino, coincidente con il piano focale della lente. Questa possibilità rende di un grande interesse pratico l'approssimazione di Fraunhofer.

L'integrale (2.57), scritto nell'approssimazione di Fraunhofer, diviene:

$$\begin{aligned}
E(x, y, z) &= \frac{i \exp(ikz)}{\lambda z} \exp \left[\frac{ik}{2z} (x^2 + y^2) \right] \\
&\int_{-\infty}^{\infty} dx_o \int_{-\infty}^{\infty} \tau(x_o, y_o) E_i(x_o, y_o) \exp(-i(k/z)(xx_o + yy_o)) dy_o.
\end{aligned} \tag{2.65}$$

È interessante osservare che, a meno dei fattori moltiplicativi che precedono l'integrale, $E(x, y, z)$ risulta essere la trasformata di Fourier bidimensionale del campo presente immediatamente a destra del piano di riferimento. Le due coordinate co-

niugate rispetto a x_o, y_o sono: $f_x = x/(\lambda z)$, e $f_y = y/(\lambda z)$, che rappresentano le componenti della frequenza spaziale \mathbf{f} che ha modulo $f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$.

Per comprendere il significato fisico della frequenza spaziale \mathbf{f} , occorre tenere presente che il campo τE_i uscente dal piano x_o, y_o può sempre essere descritto come una sovrapposizione di onde piane. Come schematizzato in Fig. 2.9, ogni onda piana è caratterizzata da una diversa direzione del vettore \mathbf{k} . La direzione di \mathbf{k} è determinata assegnando la coppia di angoli α_x, α_y , che sono, rispettivamente, gli angoli formati dal vettore propagazione con gli assi x, y . Una volta noti α_x e α_y , l'angolo α_z formato da \mathbf{k} con l'asse z è determinato dalla relazione: $\cos^2 \alpha_x + \cos^2 \alpha_y + \cos^2 \alpha_z = 1$. Ad ogni coppia di valori α_x, α_y corrisponde una frequenza spaziale \mathbf{f} con componenti $f_x = \lambda^{-1} \cos \alpha_x$ e $f_y = \lambda^{-1} \cos \alpha_y$. Il modulo di \mathbf{f} è:

$$f = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha_z}}{\lambda} = \frac{\sin \alpha_z}{\lambda}. \quad (2.66)$$

Il termine frequenza spaziale nasce dal fatto che f^{-1} rappresenta la spaziatura (periodo) dei piani equifase proiettati sul piano x_o, y_o . Tale spaziatura assume il valore λ se l'onda piana si propaga perpendicolarmente all'asse z ($\alpha_z = \pi/2$), e tende all'infinito quando α_z tende a 0, cioè quando l'onda si propaga lungo l'asse z .

La (2.65) dice che un'onda piana uscente dal piano $z = 0$ avente componenti della frequenza spaziale f_x, f_y è rappresentata sul piano z in campo lontano dal punto che ha coordinate $x = f_x \lambda z$ e $y = f_y \lambda z$. Nel caso in cui il campo incidente E_i sia un'onda piana con vettore propagazione \mathbf{k} diretto lungo z , $E(x, y, z)$ risulta essere

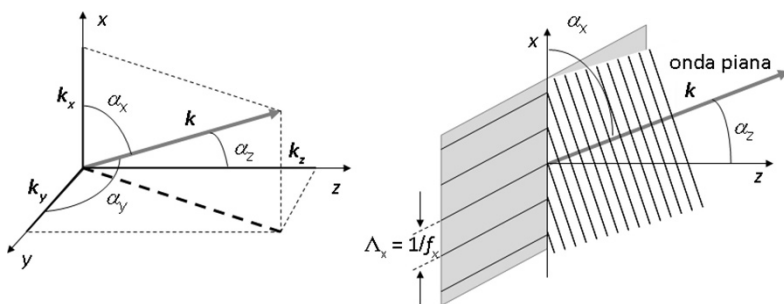
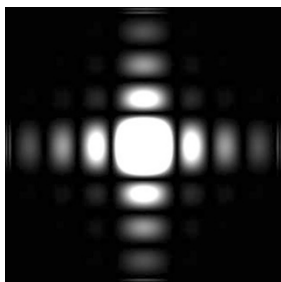


Fig. 2.9 Scomposizione di un fascio di luce in onde piane

Fig. 2.10 Immagine della diffrazione di Fraunhofer da una apertura quadrata



semplicemente la trasformata della funzione trasmissione $\tau(x_o, y_o)$.

2.6.1 Apertura rettangolare e circolare

È utile discutere alcuni esempi di applicazione dell'approssimazione di Fraunhofer. Si consideri un'onda piana che viaggia lungo l'asse z e illumina un'apertura rettangolare caratterizzata da:

$$\tau(x_o, y_o) = \text{rect}\left(\frac{x_o}{L_x}\right) \text{rect}\left(\frac{y_o}{L_y}\right), \quad (2.67)$$

dove $\text{rect}(x)$ è una funzione uguale a 1 nell'intervallo $-0.5 \leq x \leq 0.5$ e uguale a 0 altrove. La trasformata della (2.67) è: $F\{\tau(x_o, y_o)\} = L_x L_y \text{sinc}(\pi L_x f_x) \text{sinc}(\pi L_y f_y)$ dove $\text{sinc}(x) = (\sin x)/x$. Si ottiene quindi sostituendo nella (2.65):

$$E(x, y, z) = \frac{iE_i \exp(ikz)}{\lambda z} \exp[i(k/2z)(x^2 + y^2)] L_x L_y \text{sinc}\left(\pi \frac{xL_x}{\lambda z}\right) \text{sinc}\left(\pi \frac{yL_y}{\lambda z}\right). \quad (2.68)$$

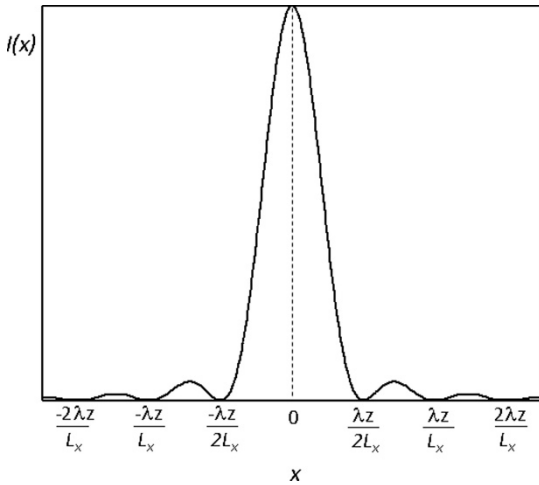


Fig. 2.11 Diffrazione di Fraunhofer da una apertura quadrata: andamento dell'intensità in funzione della coordinata x

La Fig. 2.10 mostra l'immagine dell'onda diffratta, mentre la Fig. 2.11 descrive l'andamento trasversale dell'intensità $I(x, y, z)$, che è proporzionale a $|E(x, y, z)|^2$, lungo la coordinata x . In particolare, dalla Fig. 2.11 risulta che la larghezza del primo lobo di diffrazione nella direzione x , calcolata come la distanza fra i primi due zeri, vale $\Delta x = \lambda z / L_x$, o, in altri termini, che $\lambda / (2L_x)$ è l'apertura angolare del lobo principale di diffrazione. Mentre l'onda incidente sull'apertura contiene solo un vettore propagazione diretto lungo l'asse z , l'onda che ha attraversato l'apertura

(onda diffratta) presenta uno sparpagliamento in \mathbf{k} che è tanto più accentuato quanto più è piccola l'apertura.

Si consideri ora un'apertura circolare caratterizzata da:

$$\tau(x_o, y_o) = \text{circ}\left(\frac{r_o}{R}\right), \quad (2.69)$$

dove $\text{circ}(r)$ è uguale a 1 all'interno del cerchio di raggio 1 e uguale a 0 altrove. Utilizzando la (2.65), si trova il campo diffratto:

$$E(r) = \frac{iE_i \exp(ikz)}{\lambda z} \exp[i(k/2z)r^2] R^2 \frac{J_1[rR/(\lambda z)]}{rR/(\lambda z)} \quad (2.70)$$

dove J_1 è la funzione di Bessel di ordine 1. La distribuzione di intensità $I(r)$, che è proporzionale a $|E(r)|^2$, è detta figura di Airy. L'immagine dell'onda diffratta è presentata nella Fig. 2.12, mentre l'andamento di $I(r)$ è mostrato nella Fig. 2.13. Il raggio corrispondente al primo zero è $0.61\lambda z/R$.

Fig. 2.12 Immagine della diffrazione di Fraunhofer da una apertura circolare

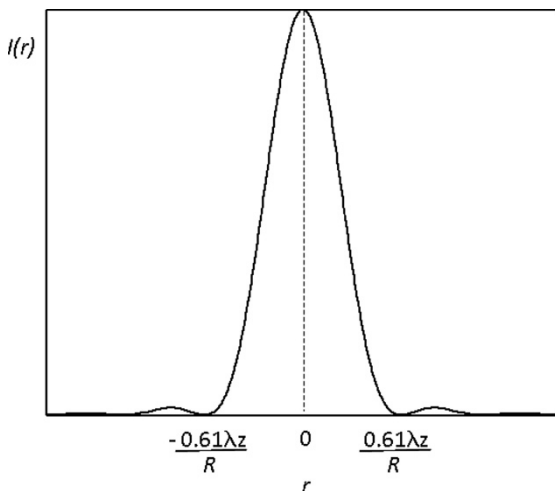
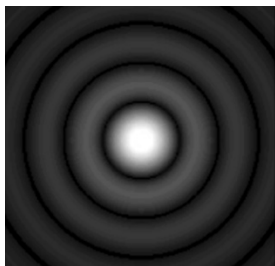


Fig. 2.13 Diffrazione di Fraunhofer da una apertura circolare: andamento dell'intensità in funzione della coordinata radiale

Gli esempi discussi in questa sezione confermano la conclusione che l'onda

uscente dall'apertura presenta uno sparpagliamento angolare che è dell'ordine del rapporto tra lunghezza d'onda e dimensione dell'apertura.

2.6.2 Funzione di trasmissione periodica

Si supponga che un'onda piana con vettore propagazione diretto lungo l'asse z incontri sul piano $z = 0$ una funzione trasmissione che abbia un andamento sinusoidale lungo l'asse x con passo $d = 1/f_o$, e sia delimitata da un'apertura quadrata di lato L . La funzione trasmissione è data da:

$$\tau(x_o, y_o) = \frac{1 + m \cos(2\pi f_o x_o)}{2} \text{rect}\left(\frac{x_o}{L}\right) \text{rect}\left(\frac{y_o}{L}\right) \quad (2.71)$$

dove il parametro m rappresenta la profondità della modulazione di trasmissione.

Notando che:

$$F\left\{\frac{1 + m \cos 2\pi f_o x_o}{2}\right\} = \frac{1}{2}\delta(f_x, f_y) + \frac{m}{4}\delta(f_x + f_o, f_y) + \frac{m}{4}\delta(f_x - f_o, f_y) \quad (2.72)$$

e ricordando che la trasformata di Fourier del prodotto di due funzioni è uguale alla convoluzione delle trasformate delle due funzioni, si ottiene:

$$E(x, y, z) = \frac{iE_i L^2 \exp(ikz)}{2\lambda z} \exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right] \text{sinc}\left(\pi \frac{yL}{\lambda z}\right) \left\{ \text{sinc}\left(\pi \frac{xL}{\lambda z}\right) + \frac{m}{2} \text{sinc}\left[\pi \frac{L}{\lambda z}(x + f_o \lambda z)\right] + \frac{m}{2} \text{sinc}\left[\pi \frac{L}{\lambda z}(x - f_o \lambda z)\right] \right\}. \quad (2.73)$$

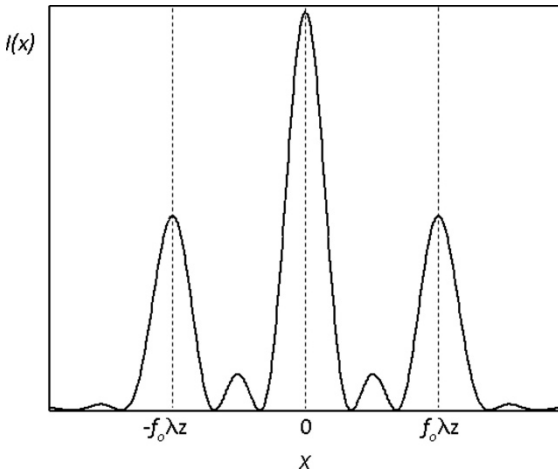


Fig. 2.14 Intensità della radiazione diffratta da una funzione trasmissione periodica

In Fig. 2.14 è riportato l'andamento dell'intensità diffratta in funzione della coordinata x . Il picco centrale rappresenta la frazione dell'onda incidente che si propaga lungo l'asse z , quest'onda rappresenta l'ordine 0 di diffrazione. Si noti che l'onda presenta uno sparpagliamento di direzione, cioè un'apertura angolare non infinitesima, a causa della limitazione trasversale introdotta dalla dimensione finita della zona trasparente.

I due picchi laterali, posizionati simmetricamente rispetto al picco centrale, rappresentano onde che hanno vettori propagazione che giacciono nel piano xz e formano con l'asse z gli angoli $\pm\lambda/d$. Queste due onde costituiscono gli ordini di diffrazione $+1$ e -1 . La separazione spaziale tra l'ordine 0 e l'ordine ± 1 è $f_o\lambda z$, mentre la larghezza dei picchi è $\lambda z/L$.

Il profilo di trasmissione sinusoidale non presenta modi di ordine superiore ad 1: se fosse stato invece considerato un profilo di trasmissione ad onda quadra, la funzione $\tau(x_o, y_o)$ avrebbe contenuto le armoniche di tutti gli ordini, e di conseguenza il fascio diffratto sarebbe stato costituito da modi di ordine anche superiore ad 1.

Un altro caso da considerare è quello del profilo sinusoidale di fase:

$$\tau(x_o, y_o) = \exp\left[i\frac{m \sin(2\pi f_o x_o)}{2}\right] \text{rect}\left(\frac{x_o}{L}\right) \text{rect}\left(\frac{y_o}{L}\right). \quad (2.74)$$

Un profilo di questo tipo può essere realizzato con una lamina di materiale trasparente che presenti o una modulazione sinusoidale di indice di rifrazione, oppure una modulazione di spessore, lungo la coordinata x_o . Tenendo conto che:

$$\exp\left[i\frac{m \sin 2\pi f_o x_o}{2}\right] = \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q\left(\frac{m}{2}\right) \exp(i2\pi q f_o x_o) \quad (2.75)$$

dove J_q è la funzione di Bessel del primo tipo di ordine q , e utilizzando il teorema di convoluzione, si ha:

$$E(x, y, z) = \frac{E_i L^2 \exp(ikz)}{2\lambda z} \exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right] \text{sinc}\left(\pi \frac{yL}{\lambda z}\right) \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q\left(\frac{m}{2}\right) \text{sinc}\left[\frac{\pi L}{\lambda z}(x - q f_o \lambda z)\right]. \quad (2.76)$$

La (2.76) mostra che il profilo sinusoidale di fase presenta tutti gli ordini di diffrazione, l'ampiezza dell'ordine q essendo determinata dal valore della corrispondente funzione di Bessel alla coordinata $m/2$. Si noti, in particolare, che si può sopprimere completamente l'ordine 0, cioè il fascio trasmesso, se $m/2$ coincide con uno zero della J_0 .

La discussione della diffrazione da un profilo di trasmissione periodico ha una importante applicazione al caso dei reticoli di diffrazione, trattati nel capitolo seguente. Mediante la diffrazione di Fraunhofer si possono calcolare non solo le pro-

prietà geometriche del reticolo, ma anche la distribuzione di potenza sui vari ordini di diffrazione del reticolo.

Esercizi

2.1. Si consideri l'onda elettromagnetica piana avente le seguenti componenti del campo elettrico (in unità SI): $E_x = 0$, $E_y = 200 \cos[12\pi \times 10^{14}(t - zc) + \pi/2]$, e $E_z = 0$. Indicare la frequenza, la lunghezza d'onda, la direzione di moto, e lo stato di polarizzazione dell'onda.

2.2. Si consideri l'onda elettromagnetica piana avente campo elettrico $E = E_o \cos(\omega t - kz)$. Assumendo che $E_o = 100 \text{ V/m}$, calcolare il valore di B_o in Tesla e dell'intensità I in W/m^2 .

2.3. Un'onda elettromagnetica piana che si propaga lungo l'asse z ha le seguenti componenti del campo elettrico: $E_x(t, z) = E_o \cos(\omega t - kz)$, e $E_y(t, z) = \sqrt{3}E_o \cos(\omega t - kz)$. Determinare l'angolo formato dalla direzione di polarizzazione con l'asse x .

2.4. Un'onda sferica gaussiana di lunghezza d'onda $\lambda = 0.63 \text{ }\mu\text{m}$ ha raggio minimo $w_o = 0.5 \text{ mm}$. Calcolare il raggio w ed il raggio di curvatura del fronte d'onda R sul piano alla distanza di 5 m dal piano di raggio minimo.

2.5. Un'onda elettromagnetica piana ha lunghezza d'onda $\lambda = 500 \text{ nm}$ ed un vettore d'onda \mathbf{k} che giace nel piano xz , formando un angolo $\alpha_x = 60^\circ$ con l'asse x . Calcolare la frequenza spaziale della distribuzione di fase sul piano $z = 0$.

2.6. Un'onda piana di lunghezza d'onda $\lambda = 500 \text{ nm}$ illumina una apertura circolare di diametro $D = 100 \text{ }\mu\text{m}$. La figura di diffrazione viene osservata su di uno schermo posto alla distanza di 30 cm dal piano dell'apertura. a) controllare se la condizione di validità della diffrazione di Fraunhofer è soddisfatta; b) determinare la posizione del primo zero della funzione di Airy.

Note di fotonica

Degiorgio, V.; Cristiani, I.

2016, XII, 222 pagg. 114 figg., Hardcover

ISBN: 978-88-470-5786-9