

Capitolo 3

Sistemi dinamici discreti in campo complesso

Il numero del mio taxi è il 1729, mi sembra un numero alquanto stupido. Al che Ramanujan rispose: No Hardy! No! È un numero molto interessante. È il numero più piccolo esprimibile come la somma di due cubi in due diversi modi:

$$1729 = 10^3 + 9^3, 1729 = 12^3 + 1^3.$$

Srinivasa Ramanujan (1887–1920)

In questo capitolo richiamiamo alcuni risultati fondamentali per i sistemi discreti in campo complesso. Per maggiori dettagli si vedano i riferimenti [18, 36].

3.1 Richiami di teoria

Sia $\mathbb{C}$ il campo dei numeri complessi, $p \in \mathbb{C}$ e $\delta > 0$. Se con $|z|$ si indica il modulo di $z \in \mathbb{C}$, l'insieme $\{z \in \mathbb{C} : |z - p| < \delta\}$ è un disco di $\mathbb{R}^2$, mentre l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : |x - p| < \delta\}$ è un intervallo in $\mathbb{R}$.

Definizione 3.1 Sia I un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{C}$ e $f : I \rightarrow I$ una funzione di variabile complessa. La coppia $\{I, f\}$ è detta *sistema dinamico discreto* (s.d.d.) su I , del primo ordine, autonomo, in forma normale. Per un dato iniziale $z_0 \in I$ assegnato, il sistema opera in modo ricorsivo secondo la legge $z_{k+1} = f(z_k)$, per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Definizione 3.2 Diciamo che un numero complesso p è un punto di equilibrio per il s.d.d. $\{I, f\}$ se $p \in I$ e $f(p) = p$ (ossia il punto di equilibrio p è un punto fisso della mappa f).

Definizione 3.3 Un punto di equilibrio del s.d.d. $\{I, f\}$ si dice *stabile* se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che $|z_0 - p| < \delta$, $z_0 \in I$ e $z_k = f^k(z_0)$ implicano

$$|z_k - p| < \varepsilon, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Un equilibrio p si dice *instabile* (o repulsivo) se non è stabile, ossia se esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che, per ogni $\delta > 0$, si possono determinare un dato $z_0 \in I$ e un indice $k > 0$ tali che

$$|z_0 - p| < \delta, \quad |z_k - c| > \varepsilon_0.$$

Definizione 3.4 Un punto di equilibrio c del s.d.d. $\{I, f\}$, si dice *localmente attrattivo* se esiste $\eta > 0$ tale che, per ogni dato iniziale

$$z_0 \in I \cap \{z \in \mathbb{C} : |z - p| < \eta\},$$

posto $z_k = f^k(z_0)$, risulta

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = p.$$

Definizione 3.5 Un punto equilibrio c di un s.d.d. $\{I, f\}$, si dice *localmente asintoticamente stabile* se è stabile e localmente attrattivo.

Definizione 3.6 Si dice bacino di attrazione di un punto di equilibrio $p \in I$ il più grande insieme $\mathcal{B}(p) \subseteq I$ di dati iniziali a cui corrispondono soluzioni (globali) convergenti all'equilibrio p per $k \rightarrow \infty$:

$$\mathcal{B}(p) = \left\{ z_0 \in \mathbb{C} : \lim_{k \rightarrow \infty} f^k(z_0) = p \right\}.$$

Definizione 3.7 Un s.d.d. $\{I, f\}$ è caotico (o ha una dinamica caotica) se:

1. le orbite periodiche sono dense (si considerano tutti i periodi interi, 1 incluso), ossia ogni sottoinsieme $A \subseteq I$ contiene almeno un punto appartenente ad un'orbita periodica;
2. f è topologicamente transitiva, ossia per ogni $x, y \in I$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $z \in I$ e $k \in \mathbb{N}$ tali che

$$|z - x| < \varepsilon, \quad |f^k(z) - y| < \varepsilon > 0;$$

3. $\{I, f\}$ esibisce una dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali, ossia esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $x \in I$ ed $\varepsilon > 0$ esistono $z \in I$ e $k \in \mathbb{N}$ tali che

$$|x - z| < \varepsilon, \quad |f^k(x) - f^k(z)| > \delta.$$

Definizione 3.8 La funzione f , definita in tutti i punti di un intorno (disco) $I(z_0) \subseteq \mathbb{C}$ che contenga il punto z_0 , si dice derivabile in z_0 se f esiste finito il limite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

3.2 Esempi elementari

Sono qui di seguito riportati alcuni esempi semplici utili per capire il comportamento dei sistemi dinamici discreti in campo complesso.

3.2.1 L'iterazione lineare $f(z) = az$

Sia $f(z) = az$, dove a è un numero complesso. Evidentemente, questa funzione ha un unico punto fisso, che è l'origine. Inoltre, se $z_0 \neq 0$, si ha $f(z_0) = az_0$, $f^2(z_0) = f(az_0) = a^2z_0$, e in generale $f^k(z_0) = a^kz_0$. Ricordando che un numero complesso può essere scritto in forma polare come prodotto tra il suo modulo e l'esponenziale complesso del suo argomento, ossia $a = |a|e^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi)$, si ha

$$a^k = |a|^k e^{k\theta i} \implies f^k(z_0) = |a|^k e^{k\theta i} z_0 = |a|^k |z_0| e^{(\arg(z_0) + k\theta)i}.$$

Questo significa che la k -esima iterazione, che corrisponde alla k -esima moltiplicazione per il numero complesso a , provoca una rotazione nel piano complesso del dato iniziale z_0 pari ad $k\theta$ composta con l'omotetia $|a|^k$. Essendo $|f^k(z_0)| = |a|^k |z_0|$, si hanno i seguenti casi possibili:

- se $|a| < 1$ allora $|a|^k |z_0|$ converge a zero (unico punto di equilibrio) all'aumentare di k ed il suo bacino di attrazione è $\mathcal{B}(c) \equiv \mathbb{C}$; in questo caso l'unico equilibrio è anche *globalmente asintoticamente stabile*;
- se $|a| > 1$ allora $|a|^k |z_0|$ tende all'infinito tranne quando $z_0 \equiv 0$, pertanto l'origine risulta repulsiva e $\mathcal{B}(0) = 0$;
- se $a = 1$, allora *tutti i punti di $\mathbb{C}$ sono equilibri e tutte le traiettorie sono costanti*;
- se $|a| = 1$ ma $a \neq 1$, allora l'origine è nuovamente l'unico equilibrio, stabile ma non attrattivo, e le traiettorie ruotano attorno ad essa. Se il rapporto tra l'argomento di a e 2π è razionale, allora le orbite sono periodiche, diversamente non esistono orbite periodiche ma la traiettoria è densa sul cerchio unitario (per la dimostrazione si veda [18]).

La dinamica nei casi $|a| < 1$ e $|a| > 1$ è illustrata in figura 3.1 per $z_0 = 1$ e due diversi valori di a , mentre la dinamica per $|a| = 1$ è riportata in figura 3.2. Dalle figure è evidente che l'argomento di a non influisce sulla convergenza o meno di $f^k(z_0)$ all'unico punto di equilibrio (l'origine) ma solamente sull'andamento dell'orbita. Ad ogni iterazione, infatti, la funzione viene aggiornata e $\arg(a)$ viene aggiunto all'argomento iniziale in modo che, quando l'argomento di a non è zero, l'orbita di tutti i punti diversi da zero gira attorno al punto fisso.

Poiché $|a| = |f'(0)|$, è intuibile che la *derivata di f calcolata nel punto fisso* (si veda la definizione 3.8) sia legata alla natura attrattiva o repulsiva dei punti fissi di una funzione complessa. Si può generalizzare e formalizzare questo concetto attraverso il seguente

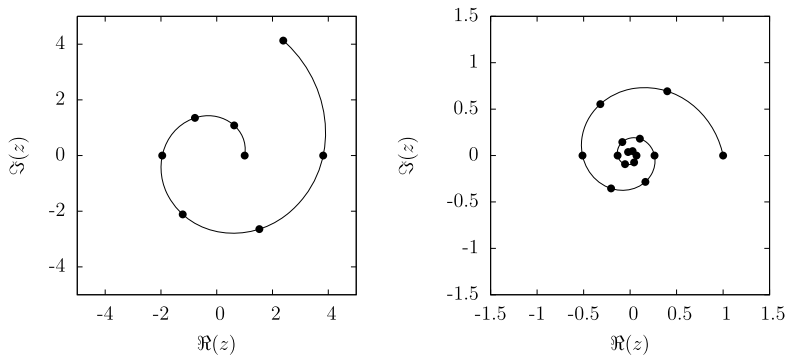


Fig. 3.1 Orbita del punto $z_0 = 1$ sotto l'iterazione della funzione lineare $f(z) = az$ con $|a| \neq 1$: $a = \frac{5}{4}e^{\frac{\pi}{3}i}$ (sinistra), $a = \frac{4}{5}e^{\frac{\pi}{3}i}$ (destra). Notiamo che nella prima dinamica il modulo cresce ad ogni iterazione di un fattore $\frac{5}{4}$, mentre nella seconda il modulo di ogni iterazione è $\frac{4}{5}$ del modulo dell'iterazione precedente. In entrambi i casi, $\frac{\pi}{3}$ viene aggiunto all'argomento ad ogni iterazione

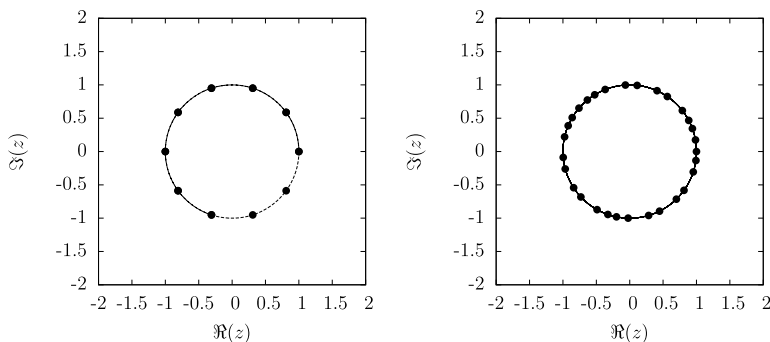


Fig. 3.2 Orbita del punto $z_0 = 1$ sotto l'iterazione della funzione lineare $f(z) = az$ con $|a| = 1$: $a = e^{\frac{\pi}{5}i}$ (sinistra), $a = e^{\pi i}$ (destra). Notiamo che se l'argomento di a è una frazione di π , allora l'orbita è periodica, diversamente l'orbita si mantiene sul cerchio unitario ed è densa su di esso, ma non periodica

Teorema 3.9 Sia $f : I \rightarrow I$ una funzione complessa derivabile e p un suo punto fisso.

Se $|f'(p)| < 1$ allora il bacino di attrazione di p contiene un intorno di p (ossia p è localmente asintoticamente stabile).

Se $|f'(p)| > 1$ allora esiste un intorno di p formato da punti che dovranno lasciare l'intorno in una iterazione successiva (ossia p è instabile).

Dimostrazione La dimostrazione di questo enunciato nel caso complesso è formalmente identica a quella relativa al caso reale, salvo il fatto che non vale il teorema

di Lagrange. Si può comunque usare l'identità seguente:

$$f(z) - f(w) = \int_w^z f'(u) du = \int_0^1 f'(w + t(z-w))(z-w) dt,$$

che risulta valida se il segmento che congiunge z a w è contenuto nell'insieme I su cui è definito il s.d.d. Pertanto, si ottiene

$$|f(z) - f(w)| \leq \max_{\zeta \in B_\varrho(p)} |f'(\zeta)| |z - w|, \quad \forall z, w \in B_\varrho(p),$$

dove, per ϱ sufficientemente, piccolo $\max_{\zeta \in B_\varrho(p)} |f'(\zeta)| < 1$. $\square$

Possiamo generalizzare il Teorema 3.9 per i punti periodici nel seguente

Teorema 3.10 *Sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione complessa derivabile e p un punto periodico di f di periodo k , ossia $f^k(p) = p$.*

Se $|(f^k)'(p)| < 1$ allora esiste un intorno di p che è contenuto nel bacino di attrazione di p per il sistema dinamico generato da f^k .

Se $|(f^k)'(p)| > 1$ allora esiste un intorno di p tale che i punti iterati, rispetto al sistema dinamico generato da f^k , abbandonano definitivamente l'intorno.

Questi teoremi motivano la seguente definizione di punti iperbolici periodici.

Definizione 3.11 *Sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione complessa differenziabile e p un punto periodico di f di periodo k . Allora p è un punto iperbolico periodico se*

$$|(f^k)'(p)| \neq 1.$$

Se $|(f^k)'(p)| < 1$ allora p è un punto periodico attrattivo.

Se $|(f^k)'(p)| > 1$ allora p è un punto periodico repulsivo.

3.2.2 L'iterazione quadratica $q(z) = z^2$

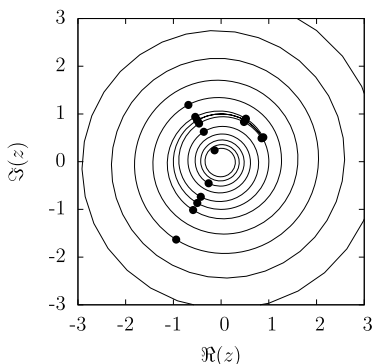
Sia $q(z) = z^2$ un polinomio quadratico in $\mathbb{C}$ i cui unici punti fissi sono 0 e 1. Siccome $q'(0) = 0$, allora l'origine è un punto attrattivo localmente asintoticamente stabile. Essendo $q'(1) = 2 > 1$, il punto di equilibrio $p = 1$ è repulsivo. Se riscriviamo z come $z = re^{i\theta}$, si ha

$$q(z) = (re^{i\theta})(re^{i\theta}) = r^2 e^{2i\theta}.$$

Iterando troviamo $q^2(z) = r^4 e^{4i\theta}$ e in generale

$$q^n(z) = r^{2^n} e^{n\theta i}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Fig. 3.3 Le orbite dei punti $0.98e^{\frac{\pi}{6}i}$, $e^{\frac{\pi}{6}i}$ e $1.02e^{\frac{\pi}{6}i}$ sotto l'iterazione di $q(z) = z^2$. Si può notare che le orbite convergono a zero o ad infinito se il modulo del punto iniziale $|z_0| \neq 1$, mentre se $|z_0| = 1$ le loro orbite restano sul cerchio unitario



Poiché $|q^n(z)| = r^{2^n}$, il bacino d'attrazione dell'origine è dato da tutti i punti iniziali di modulo inferiore ad 1, $\mathcal{B}(0) : \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, mentre se $|z| > 1$ la soluzione tende all'infinito. Se $|z| = 1$, invece, la dinamica risulta più interessante in quanto $|z| = 1 \implies |q^n(z)| = 1$ per ogni n . Pertanto, se indichiamo con S^1 il cerchio di punti aventi modulo 1, possiamo scrivere

$$q : S^1 \rightarrow S^1.$$

Ora se $\arg(z) = \theta$, allora $\arg(q(z)) = 2\theta$, che rappresenta la *mappa di raddoppio del cerchio*. Ad ogni passo temporale applichiamo la funzione $q(z) = z^2$ a tutti i punti di S^1 . Il modulo dei punti non subisce quindi variazioni, mentre l'argomento raddoppia. La mappa di raddoppio del cerchio su S^1 è caotica (si veda [18]), quindi anche $q(z) = z^2$ è caotica su S^1 . Le orbite nel piano complesso ottenute sotto l'iterazione di $q(z) = z^2$ sono riportate in figura 3.3 per tre valori di z_0 aventi modulo diverso ($z_0 = 0.98e^{\frac{\pi}{6}i}$, $z_0 = e^{\frac{\pi}{6}i}$ e $z_0 = 1.02e^{\frac{\pi}{6}i}$).

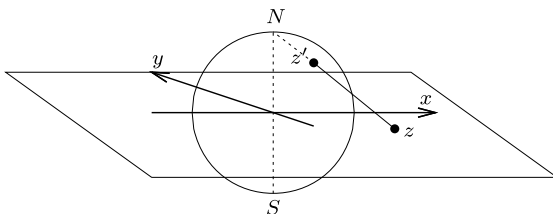
3.3 La sfera di Riemann

La descrizione geometrica dei numeri complessi, visti come punti su una sfera detta *sfera di Riemann*, risulta particolarmente utile in quanto consente di includere il *punto infinito* nel dominio delle funzioni definite su sottoinsiemi di $\mathbb{C}$. Per introdurla usiamo la *proiezione stereografica*, ovvero la stessa tecnica usata per la creazione delle mappe geografiche. Consideriamo la sfera di raggio 1 e centro nell'origine in $\mathbb{R}^3$. Questa sfera viene indicata convenzionalmente col simbolo S^2 . Il piano xy rappresenta il piano complesso e interseca la sfera all'equatore. Si veda la figura 3.4.

Sulla sfera si possono individuare alcuni punti importanti:

1. punto *infinito*, rappresentato dalle coordinate $(0, 0, 1)$;
2. punto zero, rappresentato dalle coordinate $(0, 0, -1)$;
3. punto i , rappresentato dalle coordinate $(0, 1, 0)$;
4. punto $-i$, rappresentato dalle coordinate $(0, -1, 0)$.

Fig. 3.4 Proiezione stereografica della sfera unitaria sul piano xy . Viene rappresentato un numero complesso z e la sua immagine z' sulla sfera di Riemann



Facciamo alcune semplici osservazioni geometriche:

- se tracciamo una retta dal punto $(0, 0, 1)$ ad un qualunque punto del piano complesso, allora essa attraverserà la sfera in *esattamente* un punto distinto da $(0, 0, 1)$;
- se tracciamo una retta dal punto $(0, 0, 1)$ ad un punto z del piano complesso di modulo $|z| > 1$, allora intersecherà la sfera nella *metà superiore*;
- se tracciamo una retta attraverso un punto qualunque sul cerchio unitario di $\mathbb{C}$ allora intersecherà la sfera *all'equatore*;
- se tracciamo una retta dal punto $(0, 0, 1)$ ad un punto z di modulo $|z| < 1$, allora intersecherà la sfera nella *metà inferiore*.

Per avere una corrispondenza tra sfera e piano complesso, si assegna ad ogni numero complesso (che denotiamo con z) un punto P sulla sfera che appartiene alla retta che congiunge il punto $(0, 0, 1)$ al numero z . Si stabilisce quindi una *corrispondenza biunivoca* tra S^2 e $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Per definire

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \ell \in \mathbb{C} \cup \{\infty\},$$

abbiamo bisogno di definire l'insieme degli intorni per ogni punto di S^2 . Una volta definiti gli intorni, possiamo definire gli insiemi aperti, la convergenza di sequenze e le funzioni continue senza alcun riferimento ad una metrica.

Definizione 3.12 Sia z' un punto sulla sfera di Riemann che corrisponde a z sul piano complesso. L'insieme U' sulla sfera di Riemann è un intorno di z' se il corrispondente (tramite la biiezione appena descritta) insieme U è un intorno di z nel piano complesso (nel senso della usuale metrica definita su $\mathbb{C}$). Sia $\varepsilon > 0$ e definiamo

$$N_\varepsilon(\infty) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| > \frac{1}{\varepsilon} \right\}.$$

Allora il corrispondente $(N_\varepsilon(\infty))'$ su S^2 è un intorno di $(0, 0, 1)$ sulla sfera di Riemann.

Un intorno su S^2 corrisponde alla definizione usuale degli intorni in $\mathbb{C}$, con l'aggiunta che gli intorni di ∞ sono definiti come insiemi della forma $N_\varepsilon(\infty)$, con $\varepsilon > 0$. Chiaramente se ε diminuisce, l'intorno di ∞ si restringe.

Una volta definiti tutti gli intorno in S^2 in termini di insiemi in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, ci riferiremo alla sfera di Riemann come *un'estensione del piano complesso*. Definiamo le funzioni su S^2 nel modo usuale, aggiungendo le due seguenti proprietà

$$f(\infty) := \lim_{z \rightarrow \infty} f(z),$$

se il limite esiste. Inoltre, se

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty,$$

allora $f(a) := \infty$.

Ora che abbiamo definito la nozione di intorno, possiamo definire quella di *insieme aperto, successione convergente e funzione continue*. Notiamo che le definizioni di punto di accumulazione, insieme chiuso e sottoinsieme denso sono tutte definite in termini di intorni.

Definizione 3.13 Un insieme si dice aperto se ogni elemento dell'insieme ha un intorno che è contenuto interamente nell'insieme.

Definizione 3.14 Una successione converge ad un punto se ogni intorno di quel punto contiene la coda della sequenza. In altre parole, la successione (z_k) converge al punto z se, per ogni intorno $N_\varepsilon(z)$, si può trovare un numero naturale M tale che $k \geq M$ implica $z_k \in N_\varepsilon(z)$.

Definizione 3.15 Sia $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ e $z_0 \in D$. Supponiamo che per ogni intorno V di $f(z_0)$ esista un intorno U di z_0 tale che $f(U) \subset V$. Allora f è continua in z_0 .

3.3.1 Le trasformazioni di Möbius

Per analizzare la dinamica di funzioni definite sul piano complesso esteso utilizzeremo, tra i vari strumenti, una classe speciale di funzioni, chiamate *Trasformazioni di Möbius*. Queste funzioni hanno la forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad (3.16)$$

e determinante $(ad - bc)$ diverso da zero. La condizione sul determinante è necessaria affinché la funzione sia effettivamente definita su tutta la sfera di Riemann. Valgono in particolare le relazioni seguenti:

$$T(\infty) := \frac{a}{c}, \quad T\left(-\frac{d}{c}\right) := \infty, \quad T\left(-\frac{b}{a}\right) := 0.$$

Inoltre, se $cz_0 + d = 0$, allora $T(z_0) = \infty$. Le trasformazioni di Möbius hanno varie proprietà interessanti: mappano *cerchi* su S^2 in *cerchi* e una *linea* sul piano complesso diventa un *cerchio* su S^2 attraverso ∞ . Altre proprietà che useremo di queste trasformazioni sono gli omeomorfismi sull'estensione del piano complesso.

3.4 Il metodo di Newton nel piano complesso

L'interpretazione *geometrica* del metodo di Newton come approssimazione della tangente *non* è valida nel piano complesso, tuttavia la formula del metodo è la stessa e la funzione di Newton per un polinomio complesso $f(z)$ è definita dall'equazione

$$N_f(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Definizione 3.17 Dato il s.d.d. $\{I, f\}$ con $f \in C^1$, diciamo che un suo punto di equilibrio p è *superattrattivo* se $f'(p) = 0$.

Teorema 3.18 Sia $p(z)$ un polinomio non costante di variabile complessa e sia $N_p(z)$ la funzione

$$N_p(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)}$$

dove è sottointesa l'eventuale semplificazione tra fattori comuni di p e p' . Allora:

1. N_p è definita e derivabile nell'insieme I di tutti i punti del piano complesso esclusi gli zeri di p' che non siano anche zeri di p . In particolare, senza ulteriori condizioni, è definita e continua in tutti gli zeri di p ;
2. l'insieme dei punti fissi di $N_p|_I$ coincide con l'insieme delle radici complesse di p ;
3. tutti i punti fissi di N_p sono localmente asintoticamente stabili per il s.d.d. $\{I, N_p\}$;
4. gli zeri semplici di p sono superattrattivi per il s.d.d. $\{I, N_p\}$.

Dimostrazione Diamo un cenno della dimostrazione. Sia α una radice complessa di p di molteplicità m . Allora $p(z) = (z - \alpha)^m q(z)$ con $q(\alpha) \neq 0$ e

$$N_p(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)} = z - \frac{(z - \alpha)q(z)}{(z - \alpha)q'(z) + mq(z)},$$

$$N_p(\alpha) = \alpha.$$

Viceversa, se $N_p(\alpha) = \alpha$, allora $\alpha - \frac{p(\alpha)}{p'(\alpha)} = \alpha$ cioè $p(\alpha) = 0$. Infine

$$(N_p)'(z) = 1 - \frac{(p'(z))^2 - p(z)p''(z)}{(p'(z))^2} = \frac{p(z)p''(z)}{(p'(z))^2}.$$

Dunque, se α è uno zero semplice di p , ossia se $p(\alpha) = 0$ e $p'(\alpha) \neq 0$, allora $(N_p)'(\alpha) = 0$ cioè α è stabile e superattrattivo. Se α non è uno zero semplice, cioè

$p(\alpha) = p'(\alpha) = 0$, allora esiste $m \geq 2$ tale che $p(z) = (z - \alpha)^m q(z)$ e $q(\alpha) \neq 0$ e segue che

$$\begin{aligned} (N_p)'(z) &= \frac{(z - \alpha)^m q(z)(m(m-1)(z - \alpha)^{m-2} q(z))}{(m(z - \alpha)^{m-1} q(z) + (z - \alpha)^m q'(z))^2} \\ &\quad + \frac{2m(z - \alpha)^{m-1} q'(z) + (z - \alpha)^m q''(z)}{(m(z - \alpha)^{m-1} q(z) + (z - \alpha)^m q'(z))^2} \\ &= \frac{q(z)(m(m-1)q(z) + 2m(z - \alpha)q'(z) + (z - \alpha)^2 q''(z))}{(mq(z) + (z - \alpha)q'(z))^2} \end{aligned}$$

da cui

$$(N_p)'(\alpha) = \frac{m(m-1)q(\alpha)^2}{m^2 q(\alpha)^2} = \frac{m-1}{m} < 1$$

cioè α è attrattivo e stabile. $\square$

Ricordiamo il significato di omeomorfismo e funzione topologicamente coniugata ad un'altra.

Definizione 3.19 Definiamo omeomorfismo fra due spazi topologici D ed E una funzione continua τ invertibile e con l'inversa τ^{-1} continua.

In pratica, un omeomorfismo preserva la topologia tra D ed E .

Definizione 3.20 Siano $f : D \rightarrow D$ e $g : E \rightarrow E$ due funzioni. Allora f è topologicamente coniugata con g se esiste un omeomorfismo $\tau : D \rightarrow E$ tale che

$$\tau \circ f = g \circ \tau.$$

Analizziamo il metodo di Newton per funzioni quadratiche con un esempio.

3.4.1 Il caso quadratico ed il Teorema di Cayley

Sia $f(z) = z^2 - 1$. Le sue radici sono 1 e -1 , pertanto dal teorema 3.18 sappiamo che sono entrambe punti fissi attrattivi della mappa

$$N(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)} = \frac{z^2 + 1}{2z}.$$

Mostriamo che

- se $a + bi \in \mathbb{C}$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, allora $a + bi$ appartiene al bacino di attrazione di 1;

- se $a + bi \in \mathbb{C}$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < 0$, allora esso appartiene al bacino di attrazione di -1 ;
- la dinamica di N è caotica lungo l'asse immaginario.

Vogliamo provare queste congetture mostrando che $N(z)$ è topologicamente coniugata a $q(z) = z^2$ sul piano esteso, tramite una trasformazione di Möbius. Se esiste una trasformazione di Möbius, possiamo trovarla cercandone una che abbia le proprietà richieste. Poiché tre punti determinano un cerchio, e la trasformazione di Möbius mappa cerchi in cerchi, possiamo cercare tre punti significativi di N e i corrispondenti punti di q che sono stati mappati. I punti fissi attrattivi di N sono 1 e -1 , quindi li mappiamo attraverso 0 e ∞ , punti fissi attrattivi di q . L'altro punto fisso di N è ∞ , quindi dev'essere mappato attraverso il punto fisso repulsivo 1 di q . Se il coefficiente di z al numeratore nella trasformazione di Möbius che stiamo cercando è diverso da zero, possiamo dividere numeratore e denominatore della trasformazione per quel coefficiente. In questo caso la trasformazione ha la forma

$$T(z) = \frac{z + b}{cz + d}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Imponendo le condizioni

$$T(1) := 0, \quad T(-1) := \infty, \quad T(\infty) := 1,$$

e risolvendo per b, c, d , troviamo che

$$T(z) = \frac{z - 1}{z + 1}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Si può notare che $T \circ N = q \circ T$, dunque T è un omeomorfismo e q e N sono topologicamente coniugati. Poiché

$$T(0) = -1, \quad T(i) = i, \quad T(\infty) = 1,$$

l'immagine dell'asse immaginario dev'essere il cerchio unitario, come si verifica facilmente ($|T(\gamma i)| = 1$ per ogni valore di $\gamma \in \mathbb{R}$). D'altra parte il cerchio unitario è l'unico cerchio passante attraverso -1 , i e 1 , e T mappa cerchi e linee in cerchi e linee). Di conseguenza, poiché sappiamo dall'esempio 3.2.2 che q è caotico sul cerchio unitario e T rende q e N topologicamente coniugati, ne concludiamo che anche N è caotico lungo l'asse immaginario.

Si può dimostrare (vedi [18]) che se una funzione definita su uno spazio metrico è topologicamente coniugata rispetto ad una seconda funzione su uno spazio caotico, allora la prima funzione è anch'essa caotica. Per dare significato al concetto di sistema dinamico caotico (vedi definizione 3.7), si hanno due alternative.

La prima (punto 3 della definizione 3.7) si basa sul concetto di dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali e richiede una struttura di spazio metrico sulla sfera di Riemann. La distanza tra due punti $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$ su S^2 può

essere definita con la consueta metrica Euclidea usata in $\mathbb{R}^3$:

$$d[x, y] = \sqrt{\sum_{j=1}^3 (y_j - x_j)^2}.$$

È semplice dimostrare che il sottoinsieme U di S^2 è aperto (secondo le definizioni 3.12 e 3.13) se e solo se per ogni x in U esiste un numero reale positivo ε tale che se y sta in S^2 e $d[x, y] < \varepsilon$ allora y sta in U .

La seconda possibilità (punti 1 e 2 della definizione 3.7) è l'utilizzo della nozione topologica di caos, ossia una funzione continua su un insieme infinito è detta caotica se è topologicamente transitiva sull'insieme e le orbite periodiche sono dense sull'insieme. Questa definizione ha il vantaggio di non richiedere una metrica in quanto le proprietà rilevanti sono definite solo in termini di insiemi aperti e sono preservate dalla coniugazione topologica. Pertanto, siccome N sull'asse immaginario è topologicamente coniugato con q sul cerchio unitario, allora le orbite periodiche di N sono dense sull'asse immaginario e N è topologicamente transitiva. Questo mostra che N è caotica lungo l'asse immaginario.

Rimane da dimostrare che $a + bi$ appartiene al bacino di attrazione di 1 se e solo se $a > 0$, mentre appartiene al bacino di attrazione di -1 se e solo se $a < 0$. Ricordando l'espressione di $T(z) = (z - 1)/(z + 1)$, si ha $T(1) = 0$ e

$$T(\{a + bi : a > 0\}) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

che è il bacino di attrazione di 0 sotto l'iterazione di q . Poiché la mappa T preserva i bacini di attrazione, allora $a + bi$ appartiene al bacino di attrazione di 1 se e solo se $a > 0$. Similmente, siccome $T(-1) = \infty$ e $T(\{a + bi : a < 0\}) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$, si dimostra che $a + bi$ appartiene al bacino di attrazione di -1 se e solo se $a < 0$. Il fatto che la coniugazione topologica preservi gli insiemi stabili non dipende dall'esistenza di una metrica nello spazio.

Dal punto di vista geometrico, nell'esempio precedente l'asse immaginario è l'asse del segmento che ha per estremi le radici del polinomio $f(z) = z^2 - 1$. L'asse divide il piano complesso nei due bacini di attrazione degli zeri del polinomio e la funzione di Newton risulta caotica su di esso. Questo risultato è generale: nel 1879 il matematico inglese Arthur Cayley dimostrò il seguente

Teorema 3.21 *Se il polinomio quadratico complesso $q(z)$ ha due radici distinte z_1 e z_2 , allora $N_q(z)$ è caotico sull'asse del segmento che congiunge le due radici. Inoltre, tale asse separa due semipiani aperti che sono i bacini di attrazione di z_1 e z_2 .*

Il Teorema 3.21 è visualizzato graficamente in figura 3.5. La dimostrazione utilizza il fatto che il metodo di Newton per un generico polinomio quadratico complesso con radici distinte è topologicamente coniugato al metodo di Newton per la mappa $f(z) = z^2 - 1$. Nel caso il polinomio abbia esattamente una radice, vale il seguente

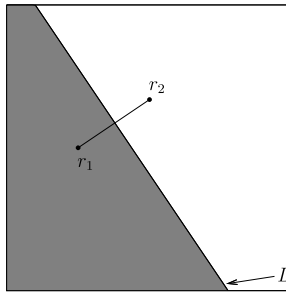


Fig. 3.5 Illustrazione del teorema di Cayley. Le radici del polinomio quadratico complesso sono rappresentate da r_1 e r_2 . Il bacino di attrazione di r_1 sotto l'iterazione di $N_q(x)$ è colorato in grigio. $N_q(x)$ è caotico sull'asse che congiunge r_1 e r_2 , indicata con L . I punti rimanenti appartengono al bacino di attrazione di r_2

Teorema 3.22 *Se un polinomio quadratico complesso q ha esattamente una radice (due radici coincidenti), allora tutti i punti di $\mathbb{C}$ appartengono al bacino di attrazione di tale radice, che risulta globalmente asintoticamente stabile.*

Il teorema si dimostra dapprima per $q(z) = z^2$ e poi si utilizza il fatto che il metodo di Newton per un polinomio quadratico complesso con una radice doppia è topologicamente coniugato con N_q . Il Teorema 3.22 si generalizza anche a polinomi complessi di grado più elevato e con radici multiple.

Riassumendo, nel caso di un polinomio quadratico $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definito da $p(z) = az^2 + bz + c$ con $a, b, c \in \mathbb{C}$ e $a \neq 0$, se $D = b^2 - 4ac$ si hanno i due casi:

- se $D = 0$, allora $N_p(z) = \frac{az^2 - c}{2az + b} = \frac{z}{2} - \frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{a}}$ e $\{\mathbb{C} \setminus \{0\}, N_p\}$ è un s.d.d. ben definito;
- se $D \neq 0$, vi sono una infinità di punti (insieme che denotiamo con Z) contenuti sulla retta r perpendicolare al segmento $[z_1, z_2]$ nel suo punto medio, a partire dai quali le iterate di N_p portano al valore vietato $-b/2a$ in un numero finito di passi; dunque in tal caso il s.d.d. definito correttamente è $\{\mathbb{C} \setminus Z, N_p\}$.

3.4.2 Il caso cubico

Consideriamo il polinomio cubico $f(z) = z^3 - 1$. Allora

$$N(z) = \frac{2z^3 + 1}{3z^2}, \quad z \in \mathbb{C},$$

e i punti attrattivi sono le radici di $f(z)$, ovvero

$$1, \quad e^{\frac{2\pi}{3}i}, \quad e^{\frac{4\pi}{3}i}.$$

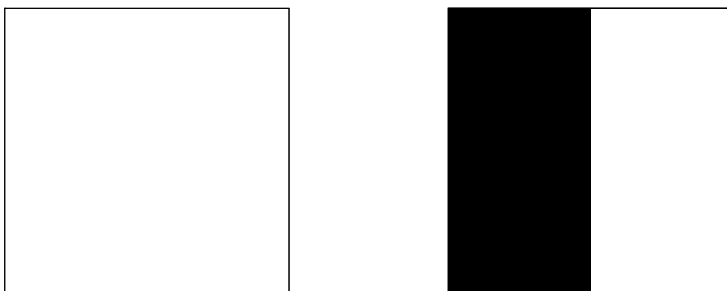


Fig. 3.6 Analisi della dinamica del Metodo di Newton per $f(z) = z - 1$ e $f(z) = z^2 - 1$. Come si vede nel secondo caso, la frontiera dei bacini di attrazione è una *curva regolare*

Per avere un'idea generale della dinamica di N , ci affidiamo al calcolo numerico. Selezioniamo una griglia di punti $N \times N$ che copre una regione quadrata. Partendo da ciascuno di questi punti viene applicata l'iterazione di Newton $z_{k+1} = \frac{2z_k^3 + 1}{3z_k^2}$ fino a che la distanza tra una delle radici dell'equazione complessa $z^3 - 1 = 0$ e il valore corrente z_{k+1} non è minore di una certa tolleranza. Se il punto iniziale porta alla radice $z_1 = 1$ allora il pixel corrispondente al punto iniziale viene colorato di blu, se porta a $z_2 = e^{2\pi i/3}$ il pixel iniziale viene colorato di rosso, mentre se porta a $z_2 = e^{4\pi i/3}$ di verde. Durante questo processo vengono contate il numero di iterazioni necessarie a raggiungere la radice complessa e vengono usate diverse tonalità di ciascun colore proporzionalmente al numero di iterazioni. Se il numero di queste iterazioni è basso il colore appare chiaro, più aumenta il numero di iterazioni più la tonalità diventa scura. Il risultato di questo esperimento è rappresentato nella figura 3.7. Possiamo notare come la dinamica del metodo di Newton per il polinomio cubico sia *molto* più complessa del caso quadratico (vedi immagine di destra in figura 3.6). Le dinamiche del metodo di Newton per molti polinomi di grado superiore al secondo non sono ancora completamente note.

3.4.3 Il caso generale $z^n - 1$

La figure 3.6 e 3.7 illustrano i bacini di attrazione per il metodo di Newton $N_{z^{n-1}}$ quando n varia da 1 a 3. Se $n = 1$ allora $z = 1$ è globalmente asintoticamente stabile e la dinamica è particolarmente semplice (ricordiamo che $N_{z-1}(z) = 1$). Tutte le traiettorie sono definitivamente costanti. Se $n = 2$, si conferma quanto detto in precedenza nello studio di N_{z^2-1} . Ricordiamo che la frontiera dei due bacini pur essendo geometricamente banale (è una retta), è sede di una dinamica caotica e contiene un insieme infinito e denso a partire dal quale le traiettorie sono definite solo per un numero finito di passi. Quando si passa a $n \geq 3$ la situazione si complica enormemente: tutti i bacini hanno una frontiera (comune ad ognuno di essi) che è necessariamente un oggetto topologicamente complicato e che presenta proprietà di

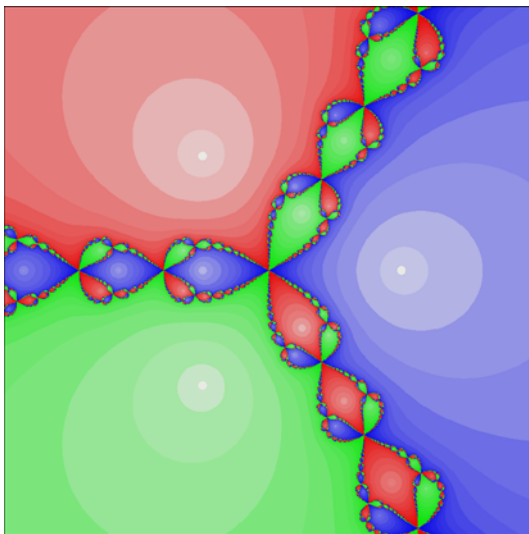


Fig. 3.7 Analisi della dinamica del Metodo di Newton per $f(z) = z^3 - 1$. La funzione N ammette tre punti fissi attrattivi: 1 , $e^{2\pi i/3}$ e $e^{4\pi i/3}$. I punti che appartengono al bacino di attrazione di 1 sono raffigurati in *blue*, i punti che appartengono al bacino di attrazione di $e^{2\pi i/3}$ sono raffigurati in *rosso*. Tutti gli altri punti che appartengono al bacino di attrazione di $e^{4\pi i/3}$ sono raffigurati in *verde*. Tonalità più scure dei colori menzionati indicano un maggior numero di iterazioni necessarie per convergere. Come si vede in questo caso le frontiere dei bacini di attrazione non sono insiemi regolari, ma *frattali*

simmetria e autosimilarità. Osserviamo che se il bordo che separa i bacini di attrazione non è una curva nel senso elementare, come evidente in figura 3.7, abbiamo una manifestazione di comportamento caotico. La *competizione tra più attrattori* può determinare l'esistenza di regioni di tipo frattale di dimensione maggiore di 1 nelle quali si ha una dipendenza sensibile dallo stato iniziale: collocando lo stato iniziale z_0 nel bordo di un bacino di attrazione, ci si trova automaticamente sul bordo di tutti i bacini. Inoltre la ramificazione di tale bordo rende problematiche le previsioni sulla dinamica asintotica per un generico dato iniziale, a meno di non essere ben all'interno di un dato bacino.

3.5 Insiemi di Mandelbrot e Julia

Consideriamo la famiglia di polinomi quadratici $q_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$q_c(z) = z^2 + c, \quad c \in \mathbb{C}.$$

Si può dimostrare [18] che tutti i polinomi *quadratici complessi* sono *topologicamente coniugati* con i polinomi della forma $q_c(z) = z^2 + c$ (per farlo occorre utilizzare il fatto che se $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è un omeomorfismo e $K \subset \mathbb{C}$ è limitato, allora $\phi(K)$ è limitato).

Definizione 3.23 Un'orbita si dice limitata se esiste un numero reale positivo ϱ tale che il modulo di ogni punto dell'orbita è minore di ϱ , ossia $|q_c^k(z_0)| \leq \varrho$, per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Proposizione 3.24 *L'orbita di un numero complesso sotto l'iterazione di un polinomio quadratico complesso o è limitata o appartiene al bacino di attrazione di infinito.*

Dimostrazione Poiché i polinomi quadratici complessi sono topologicamente coniugati con $q_c(z) = z^2 + c$, è sufficiente provare la proposizione per questa famiglia di mappe. Abbiamo già mostrato che la Proposizione 3.24 è valida per $q_c(z) = z^2$ (si veda la sezione 3.2.2). Dimostriamo che se w è un numero complesso che soddisfa $|w| > |c| + 1$, allora w appartiene al bacino di attrazione di infinito. Essendo $q_c(w) = w^2 + c$, si ha

$$|q_c(w)| = |w^2 + c| \geq |w^2| - |c| \geq (|c| + 1)^2 - |c| = |c|^2 + |c| + 1,$$

da cui

$$\begin{aligned} |q_c^2(w)| &= |q_c(q_c(w))| \\ &= |(q_c(w))^2 + c| \\ &\geq |q_c(w)|^2 - |c| \\ &\geq (|c|^2 + |c| + 1)^2 - |c| \\ &= |c|^4 + 2|c|^3 + 3|c|^2 + |c| + 1 \\ &\geq 3|c|^2 + |c| + 1. \end{aligned}$$

Continuando per induzione, arriviamo alla seguente espressione

$$|q_c^k(w)| \geq (2^k - 1)|c|^2 + |c| + 1, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Poiché il membro destro della disuguaglianza tende all'infinito per $k \rightarrow \infty$, concludiamo che se $|w| > |c| + 1$ allora w appartiene al bacino di attrazione di infinito. Da questo segue che l'orbita di un numero complesso assegnato w sotto l'iterazione di $q_c(z) = z^2 + c$ o è limitata (ed appartiene tutta al disco di raggio $|c| + 1$), oppure appartiene al bacino di attrazione di infinito. $\square$

L'insieme dei punti (dati iniziali) che corrispondono ad orbite *limitate* per la mappa q_c prende il nome di insieme di Julia¹. Prima di darne la definizione rigorosa, ricordiamo che il *bordo* di un insieme è l'insieme formato dai punti z tali che ogni intorno di z contiene un elemento dell'insieme e un elemento fuori dall'insieme.

¹Gli insiemi di Julia hanno preso il nome dal matematico francese *Gaston Julia* (1893–1978), che fu il primo, nel 1918, a compiere studi di questo genere mentre si trovava in un ospedale militare,

Fig. 3.8 L'insieme pieno di Julia per $c = 0$ e $c = 0.01 + 0.3i$

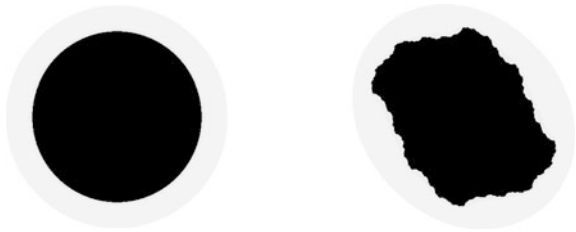


Fig. 3.9 L'insieme pieno di Julia per $c = -1$ e $c = -0.8 + 0.3i$

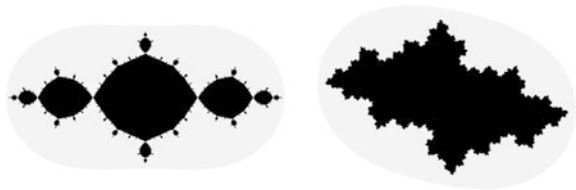


Fig. 3.10 L'insieme pieno di Julia $c = -0.8 + 0.75i$ e $c = -0.4 + 0.6i$ (insieme non connesso perchè zero non appartiene all'insieme)



Definizione 3.25 L'insieme dei punti (dati iniziali) z_0 le cui orbite (corrispondenti) sotto l'iterazione di $q_c(z) = z^2 + c$ sono limitate, è chiamato *insieme pieno di Julia* di q_c relativo al valore c del parametro e viene denotato con K_c , ossia

$$K_c = \{z_0 \in \mathbb{C} : \text{la successione } q_c^k(z_0) \text{ è limitata in } \mathbb{C}\}.$$

Il bordo J_c dell'insieme pieno di Julia K_c è chiamato *insieme di Julia*

$$J_c = \partial K_c$$

e consiste di tutti quei punti il cui comportamento dopo ripetute iterazioni della funzione è caotico, nel senso che può cambiare drasticamente in seguito ad una piccola perturbazione del dato iniziale.

Alcuni *insiemi pieni di Julia* sono visualizzati in nero nelle figure 3.8, 3.9 e 3.10 per vari valori di c . In figura 3.11, invece, è riportato l'insieme a colori multipli,

convalescente per le ferite riportate durante la prima guerra mondiale. Insieme col suo connazionale *Pierre Fatou* iniziarono ad erigere le fondamenta sulla dinamica delle funzioni complesse agli inizi del ventesimo secolo. I loro risultati sono stati notevoli, nonostante non avessero a disposizione i calcolatori per visualizzare i risultati.

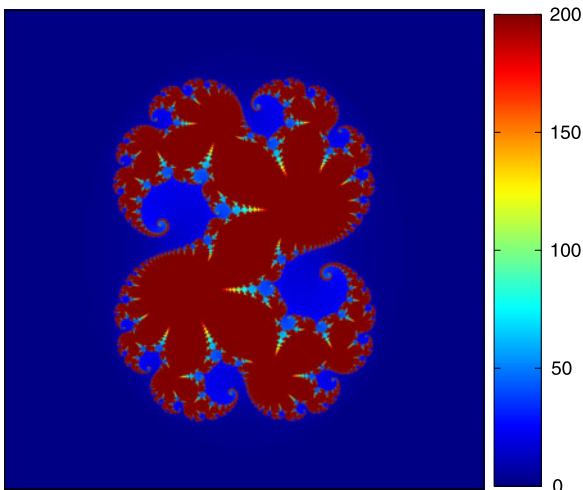


Fig. 3.11 Particolare di un insieme di Julia a *colori multipli*. Il *colore* di un dato pixel (si veda la legenda in figura) localizzato in z_0 è associato al numero di iterazioni necessarie affinché la corrispondente iterazione $q_c^k(z_0)$ diverga, ossia al *numero k di iterazioni* tali che $|q_c^k(z_0)| \geq M$ per un certo $M > 1$ assegnato, ad esempio $M = |c| + 1$, cf. Proposizione 3.24. Per generare questa figura è stata usata una griglia di 2000×2000 punti sul quadrato $[-1.5; 1.5] \times [-1.5; 1.5]$ con $c = 0.27334 - i0.00742$

dove il diverso colore tiene conto della velocità con cui le successioni non limitate divergono, come riportato nella didascalia.

Teorema 3.26 (Julia-Fatou, I) *Se un polinomio complesso p ha un'orbita periodica attrattiva, allora deve esistere un punto critico η del polinomio p (ossia un punto η tale che $p'(\eta) = 0$) nel bacino di attrazione dell'orbita.*

Osservazione 3.27 Siccome l'unico punto critico di $q_c(z) = z^2 + c$ è $z_0 = 0$, ciò implica che q_c può avere al più un'orbita periodica e che zero dev'essere attratto da essa. Questo risultato suggerisce che, per determinare le orbite periodiche di q_c , basta di iterare a partire da $z_0 = 0$. Inoltre assicura che esiste, al più, una sola orbita periodica e stabile.

Definizione 3.28 Diciamo che l'insieme $K \subseteq \mathbb{C}$ è *connesso* se, dati due punti qualunque $\eta_1, \eta_2 \in K$, esiste un cammino continuo γ interamente contenuto in K , $\gamma : [0, 1] \rightarrow K$, che congiunge i due punti (evidentemente, $\gamma(0) = \eta_1$ e $\gamma(1) = \eta_2$).

Definizione 3.29 Diciamo che l'insieme $K \subseteq \mathbb{C}$ è *totalmente disconnesso* se non esiste alcun cammino continuo, interamente contenuto nell'insieme, che collega due punti distinti $\eta_1, \eta_2 \in K$.

Definizione 3.30 Un insieme C di numeri complessi si dice *insieme di Cantor* se è chiuso, limitato, totalmente disconnesso, e ogni suo punto è di accumulazione per l'insieme stesso.

Teorema 3.31 (Julia-Fatou, II) Sia K_c l'insieme pieno di Julia di $q_c(z)$. Se $0 \in K_c$, allora K_c è connesso; se $0 \notin K_c$, allora K_c è un insieme di Cantor.

Osservazione 3.32 La Proposizione 3.24 e il Teorema 3.31 dividono in modo naturale l'insieme dei numeri complessi in due sottoinsiemi: il primo contiene i valori di c per cui l'insieme pieno di Julia è connesso e l'orbita di zero è limitata sotto l'iterazione $q_c(z) = z^2 + c$, il secondo contiene i valori del parametro c per i quali l'insieme pieno di Julia è totalmente disconnesso e zero appartiene al bacino di attrazione di infinito.

Definizione 3.33 L'insieme di numeri complessi

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} : \text{la successione } q_c^k(0) \text{ è limitata in } \mathbb{C}\}.$$

si dice insieme di Mandelbrot.

In altre parole, un punto $c \in \mathbb{C}$ del piano complesso appartiene all'insieme $\mathcal{M}$ se rimane limitata la successione definita ricorsivamente dalla formula

$$z_{k+1} = z_k^2 + c, \quad z_0 = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Questo insieme è interessante perché è connesso e la sua frontiera è una curva *frattale*. Se $|c| > 2$ allora zero non appartiene all'insieme pieno di Julia K_c e K_c è un insieme di Cantor. Questo implica che l'insieme $\mathcal{M}$ è contenuto nel disco di raggio 2. Se $|z_k| > 2$ allora la successione diverge ed il punto c è esterno all'insieme di Mandelbrot. Il minimo valore di k per cui $|z_k| > 2$ è un indice di quanto “lontano da bordo” si trovi un punto e viene spesso utilizzato per la visualizzazione a colori dell'insieme.

Un fatto interessante è che l'insieme dei valori del parametro c per i quali q_c ammette un punto fisso attrattivo è racchiuso all'interno della curva *cardioide* parametrizzata come

$$\varrho(\theta) = \frac{1}{2}e^{\theta i} - \frac{1}{4}e^{2\theta i}, \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Per dimostrarlo basta determinare per quali valori di c esiste $z_0 = \varrho e^{i\theta}$ tale che $z_0^2 + c = z_0$ e $|q'_c(z_0)| = 2|z_0| \leq 1$. Si ha $c = z_0 - z_0^2 = \varrho e^{i\theta} - \varrho^2 e^{2i\theta}$, e $|q'_c(z_0)| = 2|z_0| \leq 1 \implies 2\varrho \leq 1 \iff \varrho \leq 1/2 \implies c = \varrho e^{i\theta} - \varrho^2 e^{2i\theta} \leq \frac{1}{2}e^{\theta i} - \frac{1}{4}e^{2\theta i}$, pertanto l'insieme dei valori di c risulta contenuto nella cardioide.

Dal Teorema 3.26 troviamo che la cardioide è contenuta in $\mathcal{M}$ poiché 0 deve stare nel bacino di attrazione di un punto fisso attrattivo. Infatti, se definiamo

$$\mathcal{M}_k = \{c \in \mathbb{C} : q_c(z) \text{ ha un punto attrattivo di periodo } k\},$$

allora

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k \subset \mathcal{M}.$$

È possibile dimostrare che $\mathcal{M}_2$ è il disco di centro -1 e raggio $\frac{1}{4}$. Riassumendo, $\mathcal{M}$ è contenuto all'interno del cerchio di raggio 2, $\mathcal{M}$ contiene l'interno del cardiode $\varrho(\theta) = \frac{1}{2}e^{i\theta} - \frac{1}{4}e^{2i\theta}$ e $\mathcal{M}$ contiene l'interno del disco di centro -1 e raggio $\frac{1}{4}$.

3.5.1 Legame tra insiemi di Julia e Mandelbrot

Quale legame sussiste tra gli insiemi di Julia e di Mandelbrot? L'insieme di Mandelbrot permette di *indicizzare* gli insiemi di Julia. Ad ogni punto c del piano complesso corrisponde un diverso insieme di Julia K_c . Più precisamente, vale il seguente

Teorema 3.34 *Per ogni $c \in \mathbb{C}$ l'insieme K_c è connesso se e soltanto se $c \in \mathcal{M}$.*

Intuitivamente, gli insiemi di Julia più interessanti (ovvero quelli dalle forme meno elementari) corrispondono a punti c che si trovano vicino al bordo dell'insieme di Mandelbrot, mentre punti molto all'interno di $\mathcal{M}$ generano insiemi di Julia dalle forme geometriche semplici. I punti esterni, lontani dal bordo, generano insiemi di Julia formati da molti piccoli insiemi connessi.

3.5.2 Generare J_c e $\mathcal{M}$ al calcolatore

Si osservi che per generare l'insieme di Julia J_c e quello di Mandelbrot $\mathcal{M}$ si parte dalla stessa formula generale $z_{k+1} = z_k^2 + c$, ma si usano in modo diverso i valori iniziali di c e z_0 . Come visto in precedenza, per la generazione degli insiemi di Julia si tiene fisso c e si fa variare z_0 colorando in nero il punto iniziale che origina un'orbita limitata (si vedano le figure 3.8, 3.9 e 3.10). Se, al contrario, si mantiene fisso il dato iniziale $z_0 = 0$ e testano vari valori c , si può ottenere l'insieme di Mandelbrot: se, dopo un certo numero di iterazione, z_k fugge verso l'infinito, lo si colora di bianco, in caso contrario di *nero*. Il risultato è l'insieme di Mandelbrot in figura 3.12.

Per rendere il procedimento descritto più raffinato (e gradevole da un punto di vista estetico), e per meglio comprendere il comportamento dei vari punti del piano rispetto alla legge che genera l'insieme di Mandelbrot, può essere conveniente usare *più colori*, come fatto per la figura 3.11 nel caso dell'insieme di Julia. In quel caso, il *colore* di un dato pixel localizzato in punto z_0 di $\mathbb{C}$ è associato alla *velocità* con cui la corrispondente iterazione $q_c^k(z_0)$ diverge, ossia al *numero k di iterazioni* tali che $|q_c^k(z_0)| \geq M$ per un certo $M > 1$ assegnato (ad esempio $M = |c| + 1$, cf. Proposizione 3.24).

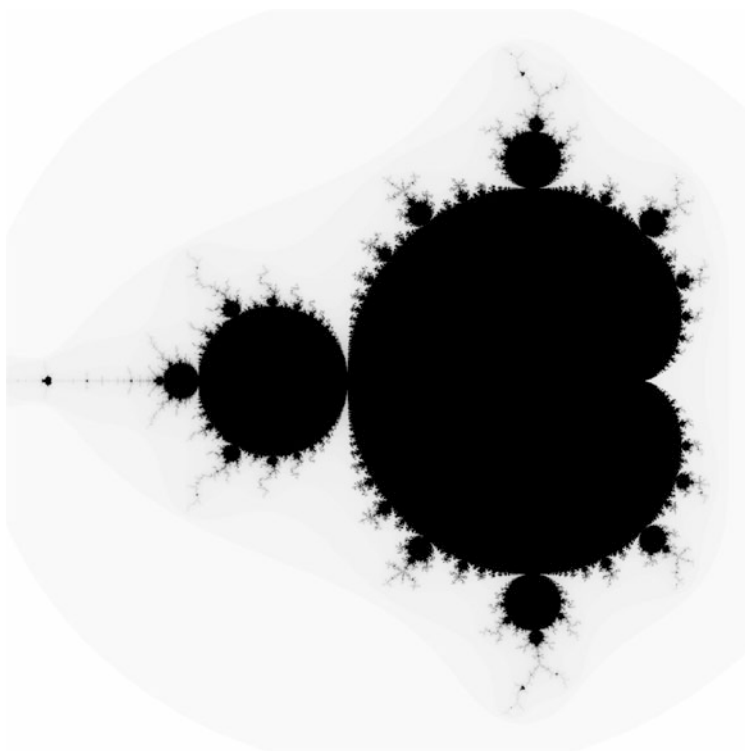


Fig. 3.12 Insieme di Mandelbrot $\mathcal{M}$. Si noti che $\mathcal{M}$, pur sembrando sconnesso, è connesso

Come si può *stabilire* se la successione diverge oppure no? Ragioniamo più attentamente sulla legge di Mandelbrot: $z_{k+1} = z_k^2 + c$, $z_0 = 0$, in cui compare il quadrato di z_k . Se un numero z_k ha modulo maggiore o uguale a 2, allora il suo quadrato avrà modulo ancora maggiore e quindi la successione è destinata a divergere per quel particolare valore di c . Se invece la successione, dopo un certo numero massimo di iterazioni, non accenna a divergere, si dà per scontato che non divergerà mai, e si *accetta quel valore di c come membro dell'insieme $\mathcal{M}$* . Ovviamente la procedura non è corretta dal punto di vista teorico, ma, se il numero di iterazioni è abbastanza elevato, allora la probabilità di commettere errori di attribuzione è ragionevolmente limitata. Questa idea è stata utilizzata per ottenere la figura 3.12.

Introduzione all'Analisi Qualitativa dei Sistemi Dinamici

Discreti e Continui

Squassina, M.; Zuccher, S.

2016, XII, 314 pagg. 211 figg., 2 figg. a colori.,

Softcover

ISBN: 978-88-470-5790-6