

Ein  $L$ -Term  $t$  hat erst dann einen Wert in einer  $L$ -Struktur, wenn man die Variablen von  $t$  mit Elementen von  $A$  belegt.

## Definition

Sei  $\mathfrak{A}$  eine  $L$ -Struktur. Eine *Belegung* ist eine Funktion

$$\beta : \{v_0, v_1 \dots\} \longrightarrow A$$

von der Menge der Variablen in die Grundmenge von  $\mathfrak{A}$ .

Diese Belegung der Variablen lässt sich auf alle Terme fortsetzen. Die folgende rekursive Definition ist wegen der eindeutigen Lesbarkeit von Termen sinnvoll.

## Definition

Für  $L$ -Terme  $t$ ,  $L$ -Strukturen  $\mathfrak{A}$  und Belegungen  $\beta$  definieren wir  $t^{\mathfrak{A}}[\beta]$  durch

$$v_i^{\mathfrak{A}}[\beta] = \beta(v_i), \quad \text{falls } t = v_i \quad (1)$$

$$c^{\mathfrak{A}}[\beta] = c^{\mathfrak{A}}, \quad \text{falls } t = c \quad (2)$$

$$f t_1 \dots t_n^{\mathfrak{A}}[\beta] = f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[\beta], \dots, t_n^{\mathfrak{A}}[\beta]), \quad \text{falls } t = f t_1 \dots t_n. \quad (3)$$

Sei  $\mathfrak{Q}$  der Körper der rationalen Zahlen und  $t = \cdot v_0 + v_1 v_2$ . Wenn  $\beta(v_i) = i + 2$ , ist  $t^{\mathfrak{Q}}[\beta] = 2(3 + 4) = 14$ .

Das folgende Lemma ist klar.

**Lemma** Wenn die Belegungen  $\beta$  und  $\gamma$  auf den Variablen, die in  $t$  vorkommen, übereinstimmen, ist  $t^{\mathfrak{A}}[\beta] = t^{\mathfrak{A}}[\gamma]$ . □

Wenn wir einen Term in der Form  $t(x_1, \dots, x_n)$  schreiben, meinen wir:

1. daß die  $x_i$  paarweise verschiedene Variablen sind,
2. daß in  $t$  nur Variablen aus  $\{x_1, \dots, x_n\}$  vorkommen.

Wenn dann  $a_1, \dots, a_n$  Elemente der Struktur  $\mathfrak{A}$  sind, ist wegen des Lemmas  $t^{\mathfrak{A}}[a_1, \dots, a_n]$  durch  $t^{\mathfrak{A}}[\beta]$  für eine Belegung  $\beta$  mit  $\beta(x_i) = a_i$  wohldefiniert.

Die folgende rekursive Definition der Semantik ist wiederum wegen der Eindeutigen Lesbarkeit von Formeln sinnvoll (siehe Kap. 1).

### Definition

Sei  $\mathfrak{A}$  eine  $L$ -Struktur. Wir definieren für Belegungen  $\beta$  und  $L$ -Formeln  $\varphi$  die Relation

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$$

–  $\varphi$  trifft in  $\mathfrak{A}$  auf  $\beta$  zu – durch Rekursion über den Aufbau von  $\varphi$ :

$$\mathfrak{A} \models t_1 \doteq t_2 [\beta] \Leftrightarrow t_1^{\mathfrak{A}}[\beta] = t_2^{\mathfrak{A}}[\beta] \quad (1)$$

$$\mathfrak{A} \models R t_1 \dots t_n [\beta] \Leftrightarrow R^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[\beta], \dots, t_n^{\mathfrak{A}}[\beta]) \quad (2)$$

$$\mathfrak{A} \models \neg \psi [\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \psi [\beta] \quad (3)$$

$$\mathfrak{A} \models (\psi_1 \wedge \psi_2) [\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi_1 [\beta] \text{ und } \mathfrak{A} \models \psi_2 [\beta] \quad (4)$$

$$\mathfrak{A} \models \exists x \psi [\beta] \Leftrightarrow \text{es gibt ein } a \in A \text{ mit } \mathfrak{A} \models \psi [\beta \frac{a}{x}]. \quad (5)$$

$$\text{Dabei ist } \beta \frac{a}{x}(y) = \begin{cases} \beta(y), & \text{wenn } y \neq x \\ a, & \text{wenn } y = x. \end{cases}$$

Es ist klar, daß unsere Abkürzungen die intendierte Interpretation haben. Also, daß z. B.

$$\mathfrak{A} \models (\psi_1 \rightarrow \psi_2) [\beta] \iff \text{wenn } \mathfrak{A} \models \psi_1 [\beta], \text{ dann } \mathfrak{A} \models \psi_2 [\beta].$$

Ob  $\varphi$  in  $\mathfrak{A}$  auf  $\beta$  zutrifft, hängt nur von den freien Variablen von  $\varphi$  ab:

### Definition

Die Variable  $x$  kommt *frei* in der Formel  $\varphi$  vor, wenn sie an einer Stelle vorkommt, die nicht im Wirkungsbereich eines Quantors  $\exists x$  liegt. Präzise definiert durch Rekursion nach dem Aufbau von  $\varphi$  bedeutet das:

$$x \text{ frei in } t_1 \doteq t_2 \Leftrightarrow x \text{ kommt in } t_1 \text{ oder in } t_2 \text{ vor.} \quad (1)$$

$$x \text{ frei in } R t_1 \dots t_n \Leftrightarrow x \text{ kommt in einem der } t_i \text{ vor.} \quad (2)$$

$$x \text{ frei in } \neg \psi \Leftrightarrow x \text{ frei in } \psi \quad (3)$$

$$x \text{ frei in } (\psi_1 \wedge \psi_2) \Leftrightarrow x \text{ frei in } \psi_1 \text{ oder } x \text{ frei in } \psi_2 \quad (4)$$

$$x \text{ frei in } \exists y \psi \Leftrightarrow x \neq y \text{ und } x \text{ frei in } \psi \quad (5)$$

Zum Beispiel kommt in  $\forall v_0(\exists v_1 R(v_0, v_1) \wedge P(v_1))$  die Variable  $v_0$  nicht frei vor. Die Variable  $v_1$  kommt gebunden und frei vor.

**Satz 2.1 (Koinzidenzatz)** Wenn  $\beta$  und  $\gamma$  an allen Variablen, die frei in  $\varphi$  vorkommen, übereinstimmen, ist

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[\gamma].$$

*Beweis* Wir führen den Beweis durch Induktion über den Aufbau von  $\varphi$ : Wenn  $\varphi$  eine Primformel ist, folgt die Behauptung aus dem letzten Lemma. Wenn  $\varphi$  eine Negation oder eine Konjunktion ist, ist der Induktionsschritt einfach. Sei also  $\varphi = \exists x \psi$ . Wenn  $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ , gibt es ein  $a$  mit  $\mathfrak{A} \models \psi[\beta_x^a]$ . Abgesehen von  $x$  hat  $\psi$  die gleichen freien Variablen wie  $\varphi$ . Also ist nach Induktionsvoraussetzung  $\mathfrak{A} \models \psi[\gamma_x^a]$ . Daraus folgt  $\mathfrak{A} \models \varphi[\gamma]$ .  $\square$

Wenn wir eine Formel in der Form  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  schreiben, meinen wir:

1. daß die  $x_i$  paarweise verschiedene Variablen sind,
2. daß in  $\varphi$  nur Variablen aus  $\{x_1, \dots, x_n\}$  frei vorkommen.

Wenn  $a_1, \dots, a_n$  Elemente der Struktur  $\mathfrak{A}$  sind, ist wegen Satz 2.1  $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$  durch  $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$  für eine Belegung  $\beta$  mit  $\beta(x_i) = a_i$  wohldefiniert. Auf diese Weise definiert  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  eine  $n$ -stellige Relation

$$\{(a_1, \dots, a_n) \mid \mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]\}.$$

Eine Menge der Form  $\{a_1 \mid \mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]\}$  für feste  $a_2, \dots, a_n$  heißt *mit Parametern definierbar*.

#### Definition

Eine *Aussage*  $\varphi$  ist eine Formel ohne freie Variable. Wir schreiben  $\mathfrak{A} \models \varphi$ , wenn  $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$  für ein (alle)  $\beta$  und benutzen die folgenden Sprechweisen:

- $\varphi$  gilt in  $\mathfrak{A}$ .
- $\varphi$  ist wahr in  $\mathfrak{A}$ .
- $\mathfrak{A}$  ist Modell von  $\varphi$ .
- $\mathfrak{A}$  erfüllt  $\varphi$ .

#### Beispiel

Eine  $L_R$ -Struktur  $\mathfrak{K} = (K, 0, 1, +, -, \cdot)$  ist genau dann ein Körper, wenn in  $\mathfrak{K}$  die Körperaxiome (Kap. 1) gelten.

Zwei  $L$ -Strukturen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  heißen *elementar äquivalent*,  $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ , wenn in ihnen die gleichen Aussagen gelten.

Sei  $x$  eine Variable und  $s$  ein Term.

- $t \frac{s}{x}$  entsteht aus  $t$  durch Ersetzen aller Vorkommen von  $x$  durch  $s$ .
- $\varphi \frac{s}{x}$  entsteht aus  $\varphi$  durch Ersetzen aller freien Vorkommen von  $x$  durch  $s$ .

Man sieht leicht, daß  $t \frac{s}{x}$  wieder ein Term und  $\varphi \frac{s}{x}$  eine Formel ist.

Die rekursive Definition von  $\varphi \frac{s}{x}$  ist

$$(t_1 \doteq t_2) \frac{s}{x} = t_1 \frac{s}{x} \doteq t_2 \frac{s}{x} \quad (1)$$

$$(Rt_1 \dots t_n) \frac{s}{x} = Rt_1 \frac{s}{x} \dots t_n \frac{s}{x} \quad (2)$$

$$(\neg \psi) \frac{s}{x} = \neg \left( \psi \frac{s}{x} \right) \quad (3)$$

$$(\psi_1 \wedge \psi_2) \frac{s}{x} = \left( \psi_1 \frac{s}{x} \wedge \psi_2 \frac{s}{x} \right) \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (\exists y \psi) \frac{s}{x} &= \exists y \left( \psi \frac{s}{x} \right), \text{ wenn } x \neq y \\ &= \exists y \psi, \text{ wenn } x = y. \end{aligned} \quad (5)$$

#### Definition

$x$  ist *frei für  $s$  in  $\varphi$* , falls in  $\varphi \frac{s}{x}$  (also nach dem Einsetzen von  $s$  in die freien Vorkommen von  $x$ ) keine Variable in den eingesetzten Termen  $s$  gebunden ist.

Rekursive Definition:  $x$  ist frei für  $s$  in  $\varphi$ , wenn  $x$  nicht frei in  $\varphi$  ist **oder** wenn  $x$  frei in  $\varphi$  ist und einer der folgenden Fälle zutrifft

$$\varphi = t_1 \doteq t_n, \quad (1)$$

$$\varphi = Rt_1 \dots t_n, \quad (2)$$

$$\varphi = \neg \psi \text{ und } x \text{ frei für } s \text{ in } \psi, \quad (3)$$

$$\varphi = (\psi_1 \wedge \psi_2) \text{ und } x \text{ frei für } s \text{ in } \psi_1 \text{ und } \psi_2, \quad (4)$$

$$\varphi = \exists y \psi, \text{ } x \text{ frei für } s \text{ in } \psi \text{ und } y \text{ kommt nicht in } s \text{ vor.} \quad (5)$$

**Lemma 2.2 (Substitutionslemma)** Sei  $x$  eine Variable,  $s$  ein Term und  $\beta$  eine Belegung mit Werten in der Struktur  $\mathfrak{A}$ .

1. Für jeden Term  $t$  ist

$$\left( t \frac{s}{x} \right)^{\mathfrak{A}}[\beta] = t^{\mathfrak{A}} \left[ \beta \frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x} \right].$$

2. Für jede Formel  $\varphi$  ist

$$\mathfrak{A} \models \varphi \frac{s}{x} [\beta] \iff \mathfrak{A} \models \varphi \left[ \beta \frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x} \right],$$

*falls  $x$  frei für  $s$  in  $\varphi$ .*

*Beweis* 1. Induktion über den Aufbau von  $t$ : Wenn  $t = x$ , sind beide Seiten der behaupteten Gleichung gleich  $s^{\mathfrak{A}}[\beta]$ . Wenn  $t$  eine Variable verschieden von  $x$  ist, sind beide Seiten gleich  $\beta(t)$ . Wenn  $t$  eine Konstante ist, steht  $t^{\mathfrak{A}}$  links und rechts. Wenn  $t$  ein zusammengesetzter Term  $f t_1 \dots t_n$  ist, schließen wir induktiv:

$$\left( t \frac{s}{x} \right)^{\mathfrak{A}} [\beta] = f^{\mathfrak{A}} \left( \left( t_1 \frac{s}{x} \right)^{\mathfrak{A}} [\beta] \dots \right) = f^{\mathfrak{A}} \left( t_1^{\mathfrak{A}} \left[ \beta \frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x} \right] \dots \right) = t^{\mathfrak{A}} \left[ \beta \frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x} \right].$$

2. Wenn  $x$  nicht frei in  $\varphi$  vorkommt, ist  $\varphi \frac{s}{x} = \varphi$ , und die Behauptung folgt aus Satz 2.1. Wir nehmen also an, daß  $x$  frei in  $\varphi$  vorkommt und schließen durch Induktion über den Aufbau von  $\varphi$ : Wenn  $\varphi$  eine Primformel ist, folgt die Behauptung aus dem ersten Teil. Wenn  $\varphi$  eine Negation oder eine Konjunktion ist, ist der Induktionsschritt trivial. Sei schließlich  $\varphi = \exists y \psi$ . Dann ist  $y$  verschieden von  $x$  und kommt, weil  $x$  frei für  $s$  in  $\varphi$  ist, in  $s$  nicht vor. Für  $b = s^{\mathfrak{A}}[\beta]$  haben wir dann

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models \varphi \frac{s}{x} [\beta] &\iff \mathfrak{A} \models \psi \frac{s}{x} \left[ \beta \frac{a}{y} \right] && \text{für ein } a \\ &\iff \mathfrak{A} \models \psi \left[ \beta \frac{a}{y} \frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta \frac{a}{y}]}{x} \right] && \text{für ein } a \text{ (Induktionsvoraussetzung)} \\ &\iff \mathfrak{A} \models \psi \left[ \beta \frac{a}{y} \frac{b}{x} \right] && \text{für ein } a \text{ (weil } b = s^{\mathfrak{A}}[\beta \frac{a}{y}]) \\ &\iff \mathfrak{A} \models \psi \left[ \beta \frac{b}{x} \frac{a}{y} \right] && \text{für ein } a \text{ (weil } x \neq y) \\ &\iff \mathfrak{A} \models \varphi \left[ \beta \frac{b}{x} \right]. && \square \end{aligned}$$

Sei  $t = t(x_1, \dots, x_n)$ ,  $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n)$  und  $s = s(x_1, \dots, x_n)$ . Dann kann man das Substitutionslemma schreiben als

$$t(s, x_2, \dots, x_n)^{\mathfrak{A}} [a_1, \dots, a_n] = t^{\mathfrak{A}} [s^{\mathfrak{A}} [a_1, \dots, a_n], a_2, \dots, a_n]$$

und

$$\mathfrak{A} \models \varphi(s, x_2, \dots, x_n) [a_1, \dots, a_n] \iff \mathfrak{A} \models \varphi [s^{\mathfrak{A}} [a_1, \dots, a_n], a_2, \dots, a_n].$$

Sei  $L_G$  die in Kap. 1 definierte Gruppensprache. Betrachte die Formel  $\varphi(x) = \forall y \ y \circ y \doteq x$  und den Term  $s = y$ . Sei  $\mathfrak{A}$  eine  $L_G$ -Struktur und  $\beta$  irgendeine Belegung. Dann bedeutet  $\mathfrak{A} \models \varphi_x[\beta]$ , daß alle Elemente von  $\mathfrak{A}$  idempotent sind.  $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta \frac{s_{\mathfrak{A}[\beta]}}{x}]$  bedeutet, daß alle Quadrate gleich  $\beta(y)$  sind. Auf die Voraussetzung, daß  $x$  frei für  $s$  in  $\varphi$  ist, kann man also im Substitutionslemma nicht verzichten.

## Übungsaufgaben

4. Sei  $\mathfrak{A}$  eine Unterstruktur und  $s_0, \dots, s_n \in A$ . Zeigen Sie: die von  $\{s_0, \dots, s_n\}$  erzeugte Unterstruktur besteht gerade aus allen  $t^{\mathfrak{A}}[s_0, \dots, s_n]$  für  $L$ -Terme  $t(x_0, \dots, x_n)$ .
5. Man zeige, daß es zu jedem Term  $t(x_1, \dots, x_n)$  der Ring-Sprache  $L_R$  ein eindeutig bestimmtes Polynom  $p(X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$  gibt, sodaß

$$t^R[a_1, \dots, a_n] = p(a_1, \dots, a_n)$$

für alle kommutativen Ringe  $R = (R, 0, 1, +, -, \cdot)$  und  $a_1, \dots, a_n \in R$ .

6. Beweisen Sie: Isomorphe Strukturen sind elementar äquivalent.  
*Hinweis:* Das ist eigentlich klar, weil  $L$ -Aussagen intrinsische Eigenschaften von  $L$ -Strukturen ausdrücken. Wenn man es beweisen will, muß man so vorgehen. Wir fixieren einen Isomorphismus  $F: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$  und zeigen für alle Belegungen  $\beta$ , Terme  $t$  und Formeln  $\varphi$ :

1.  $f(t^{\mathfrak{A}}[\beta]) = t^{\mathfrak{B}}[f \circ \beta]$
2.  $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] \iff \mathfrak{B} \models \varphi[f \circ \beta]$

jeweils durch Induktion über den Aufbau von  $t$  bzw.  $\varphi$ .

7. Sei  $\mathfrak{R}$  der angeordnete Körper der reellen Zahlen und  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit  $f(0) = 0$ . Betrachte die  $L_{AK} \cup \{\hat{f}\}$  Struktur  $(\mathfrak{R}, f)$ . Sei  $(\mathfrak{R}, f^*)$  zu  $(\mathfrak{R}, f)$  elementar äquivalent und nicht *archimedisch*, das heißt, daß es in  $\mathfrak{R}$  Elemente gibt, die größer sind als jede natürliche Zahl. (Die Existenz eines solchen  $(\mathfrak{R}, f^*)$  folgt aus dem Kompaktheitssatz, siehe Aufgabe 22.) Ein Element  $\epsilon$  aus  $\mathbb{R}^*$  heißt infinitesimal, wenn  $-\frac{1}{n} < \epsilon < \frac{1}{n}$  für alle positiven natürlichen Zahlen  $n$ .

Zeigen Sie:  $f$  ist genau dann stetig bei 0, wenn  $f^*$  Infinitesimale in Infinitesimale abbildet.



<http://www.springer.com/978-3-319-44180-1>

Mathematische Logik

Ziegler, M.

2017, X, 152 S. 5 Abb.,

ISBN: 978-3-319-44180-1

A product of Birkhäuser Basel