

In Analogie zum skalaren Fall betrachten wir in diesem Kapitel GDGn in expliziter Form:

$$\dot{x} = \Psi(t, x), \quad (t, x) \in U \quad (2.1)$$

Dies ist die **Vektordarstellung**. Hierbei ist die Abbildung $\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_n)^T : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ definiert und vektorwertig. Die unabhängige Variable $t \in \mathbb{R}$ ist weiterhin skalar, während die abhängigen Variablen $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ und $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)^T \in \mathbb{R}^n$ nun vektorwertig sind. Die **komponentenweise Darstellung** von (2.1) lautet wie folgt:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \Psi_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= \Psi_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Eine GDG erster Ordnung im $\mathbb{R}^n$ entspricht also einem System von n (im Allgemeinen) gekoppelten skalaren GDGn erster Ordnung.

Die in Kap. 1 eingeführten Begriffe und Sprechweisen gelten analog. Einige formulieren wir noch einmal explizit.

Definition (Lösungsbegriff für (2.1))

- Eine differenzierbare Funktion $\varphi : I = (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **Lösung** von (2.1), falls $(t, \varphi(t)) \in U$ und $\dot{\varphi}(t) = \frac{d}{dt}\varphi(t) = \Psi(t, \varphi(t))$ für alle $t \in I$ gilt, wobei $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Das offene Intervall I ist das zugehörige **Existenzintervall** bzw. das **maximale Existenzintervall**, falls φ nicht als Lösung von (2.1) über I hinaus fortgesetzt werden kann. Gilt $I = \mathbb{R}$, dann ist φ eine **globale Lösung**, sonst eine **lokale Lösung**. Der Graph $\text{graph}(\varphi)$ einer Lösungsfunktion φ im Produktraum $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ heißt **Integraleurve (Trajektorie)** der GDG (2.1).

- Eine Lösung φ von (2.1) erfüllt die Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$ zu gegebenen Anfangsdaten $t_0 \in I$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $(t_0, x_0) \in U$, falls $\varphi(t_0) = x_0$ gilt. Gegebenenfalls löst φ das AWP

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \Psi(t, x), \quad (t, x) \in U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Unter der Voraussetzung, dass dieses für beliebige Anfangsdaten $(t_0, x_0) \in U$ lokal eindeutig lösbar ist, definiert die Gesamtheit der Lösungsfunktionen $\varphi(t; t_0, x_0)$, jeweils im maximalen Existenzintervall bzgl. t , die **Fundamentallösung** der GDG (2.1).

► **Bemerkung** In Kap. 3 werden wir uns ausführlich mit Fragen der Existenz, Eindeutigkeit und Glattheit der Lösungen des AWP (2.2) befassen. Beispielsweise garantiert die (hinreichende) Bedingung, dass Ψ stetig differenzierbar (eine **C^1 -Funktion** bzw. **C^1 -glatt**) ist, nicht nur die Existenz der Fundamentallösung $\varphi(t; t_0, x_0)$ sondern auch deren stetige Differenzierbarkeit bzgl. t , t_0 und x_0 . Beides wird in Kap. 2 vorausgesetzt, sofern nichts anderes vermerkt ist. Unter dieser Voraussetzung führen wir in den folgenden Abschnitten dieses Kapitels grundlegende Begriffe und Konzepte der qualitativen Theorie von GDGn ein und erörtern diese gründlich.

Die Eindeutigkeit der Lösungen des AWP (2.2) impliziert zudem die grundlegende **Evolutionseigenschaft** der Fundamentallösung

$$\varphi(t; s, \varphi(s; t_0, x_0)) = \varphi(t; t_0, x_0).$$

Diese gilt überall, wo die Funktionen links und rechts vom Gleichheitszeichen erklärt sind. Denn als Funktionen von t lösen beide das AWP (2.2) mit der Anfangsbedingung $x(s) = \varphi(s; t_0, x_0)$.

Dieser Eigenschaft der Fundamentallösung entnehmen wir unter anderem, dass zur Darstellung der Gesamtheit aller Lösungen einer GDG der Form (2.1), also der **allgemeinen Lösung**, n unabhängige, skalare Parameter ausreichen. Enthalten die maximalen Existenzintervalle der Lösungen einen gemeinsamen Punkt $t = t^*$, dann kann man dazu die n Komponenten von x_0 verwenden und in der Fundamentallösung $t_0 = t^*$ setzen. Dies trifft beispielsweise im Fall einer linearen GDG zu, wie wir noch sehen werden.

Mit $\Psi(t, x) = A(t)x$, $(t, x) \in J \times \mathbb{R}^n$, wobei J eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ und

$$A : J \rightarrow \mathbb{R}^{(n,n)}; \quad t \mapsto A(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n}$$

eine Matrixfunktion (**Systemmatrix**) ist, hat man in (2.1) eine **homogene lineare GDG**. Gilt $\Psi(t, x) = A(t)x + h(t)$ mit einer von der Nullfunktion verschiedenen Funktion $h : J \rightarrow \mathbb{R}^n$, dann ist die lineare GDG **inhomogen**.

Wie in Kap. 1 unterscheidet man **nicht-autonome** und **autonome** GDGn des Typs (2.1). Eine autonome GDG erster Ordnung im $\mathbb{R}^n$ ist durch ein in einem offenen Teilbereich M des $\mathbb{R}^n$ definiertes **Vektorfeld** $v = (v_1, \dots, v_n)^T : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben:

$$\dot{x} = v(x), \quad (t, x) \in U = \mathbb{R} \times M \quad (2.3)$$

Entsprechend der vorigen Bemerkung sei v in diesem Kapitel stetig differenzierbar (ein **C^1 -Vektorfeld** bzw. **C^1 -glatt**). Somit gilt:

Lemma (Struktur der Fundamentallösung im autonomen Fall) *Für die Fundamentallösung $\varphi(t; t_0, x_0)$ von (2.3) gilt neben der obigen Evolutionseigenschaft die Struktureigenschaft*

$$\varphi(t; t_0, x_0) = \varphi(t - t_0; 0, x_0) =: \varphi(t - t_0; x_0)$$

und somit, soweit definiert,

$$\varphi(t; \varphi(s; x_0)) = \varphi(t + s; x_0).$$

Beweisskizze Wie man leicht nachrechnet, ist im autonomen Fall mit einer Lösung $\varphi(t)$, $t \in I$, auch jede bzgl. t verschobene Funktion $\varphi(\alpha + t)$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ fix, $\alpha + t \in I$, eine Lösung. Daher ist $\varphi(t - t_0; 0, x_0)$ für jede Wahl von $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times M$ und t in einem geeigneten Intervall I eine Lösung von (2.3), welche zudem die Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$ erfüllt. Die eindeutige Lösbarkeit des AWP impliziert also $\varphi(t - t_0; 0, x_0) = \varphi(t; t_0, x_0)$. Ferner $\varphi(t; \varphi(s; x_0)) = \varphi(t; 0, \varphi(s; 0, x_0)) = \varphi(t + s; s, \varphi(s; 0, x_0)) = \varphi(t + s; 0, x_0) = \varphi(t + s; x_0)$. $\square$

Zur Bestimmung der Fundamentallösung $\varphi(t - t_0; x_0)$ der autonomen GDG (2.3) reicht es also, das zugehörige AWP für $t_0 = 0$ zu lösen. Die spezielle Abhängigkeit der Fundamentallösung von t und t_0 im autonomen Fall hat wichtige Konsequenzen für die gesamte Lösungsstruktur einer solchen GDG:

Sei $\text{graph}(\varphi) \subset I \times M$ eine Integralkurve zu einer Lösung φ von (2.3) mit maximalem Existenzintervall I . Nach dem vorigen Lemma geht diese Integralkurve durch Parallelverschiebung in Richtung eines Vektors $(\alpha, 0) \in \mathbb{R} \times M$ wieder in eine Integralkurve der GDG (2.3) über. Aufgrund der eindeutigen Lösbarkeit des zugehörigen AWP sind diese beiden Integralkurven entweder disjunkt oder deckungsgleich. Im Fall der Disjunktheit für beliebige $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Lösungsfunktion $\varphi : I \rightarrow M$ injektiv. Im Fall der Deckungsgleichheit für beliebig kleine Werte von $\alpha > 0$ gilt für solche α -Werte und alle $t \in I$ die Identität $\varphi(t + \alpha) = \varphi(t)$. (Rechtsseitige) Differentiation dieser bzgl. α bei $\alpha = 0$ impliziert dann $\dot{\varphi}(t) = 0$, d. h. die Lösungsfunktion φ ist konstant und auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, $\varphi(t) = x_G$ ($t \in I = \mathbb{R}$, $x_G \in M$), und die betreffende Integralkurve ist eine zur t -Achse parallele Gerade.

In allen anderen Fällen existieren Werte $t = t_1$ und $t = t_2$ im Existenzintervall I mit minimalem positivem Abstand $\alpha = T = t_1 - t_2 > 0$, so dass $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ gilt.

Dann ist die betreffende Lösung φ ebenfalls auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und periodisch mit der (minimalen) Periode T (**T -periodische Lösung**), d. h. es gilt:

$$\varphi(t + T) = \varphi(t), \quad t \in I = \mathbb{R}$$

Mit $T > 0$ ist auch jedes ganzzahlige Vielfache kT , $2 \leq k \in \mathbb{N}$, eine Periode dieser Lösung. Ihr Graph ist eine T -periodische Integralkurve in $\mathbb{R} \times M$.

2.1 Konzept des Phasenraums

Der Definitionsbereich $M \subset \mathbb{R}^n$ des Vektorfelds v ist der **Phasenraum** (die **Phasemannigfaltigkeit**) der autonomen GDG (2.3). Die **Orbits (Phasenkurven)** einer solchen GDG sind Punktmengen in M , die sich ergeben, indem man die Integralkurven in $\mathbb{R} \times M$, welche zu den Lösungen mit maximalem Existenzintervall gehören, in Richtung der t -Achse auf den Phasenraum projiziert. Hierbei identifizieren wir den Unterraum (die Untermannigfaltigkeit) $\{0\} \times M$ in $\mathbb{R} \times M$ mit $M \subset \mathbb{R}^n$. Durch jeden festen Punkt x^* des Phasenraums M verläuft genau ein Orbit, den wir mit Γ_{x^*} bezeichnen. Denn gemäß der obigen Überlegungen gehen die Integralkurven durch die Punkte $(t, x^*) \in \mathbb{R} \times M$, $x^* \in M$ fix, paarweise durch Parallelverschiebung in t -Richtung ineinander über – jeweils ein maximales Existenzintervall der zugrunde liegenden Lösung vorausgesetzt – und führen daher alle auf ein und denselben Orbit $\Gamma_{x^*} \subset M$. Eine kanonische Parametrisierung von Γ_{x^*} mit $t \in I$ als Parameter ist durch die Fundamentallösung gegeben:

$$\Gamma_{x^*} = \{x = \varphi(t; x^*) \mid t \in I\} \subset M$$

Ein Orbit besteht genau dann aus einem einzigen Punkt $x_G \in M$, d. h. $\Gamma_{x_G} = \{x_G\}$, wenn die Lösung $\varphi(t; x_G) \equiv x_G$ konstant ist. Solche Punkte heißen **Gleichgewichtspunkte (Ruhelagen)** der GDG in (2.3) bzw. **singuläre Punkte** des Vektorfelds v und sind durch die Gleichung $v(x_G) = 0$ (als Nullstellen von v) charakterisiert. Alle anderen Orbits sind orientierte, glatte Kurven in M , wobei durch $v(x) \neq 0$ in jedem Orbitpunkt x ein Tangentenvektor gegeben ist. Dies folgt aus $\dot{\varphi}(t; x^*) = v(\varphi(t; x^*))$, da zur Parametrisierung des Orbits durch x^* die Lösung $\varphi(t; x^*)$ von (2.3) verwendet werden kann. Die Richtung von $v(x^*)$ bestimmt die **Orientierung** des Orbits durch x^* . Als Punktmenge in M ist ein Orbit Γ_{x_p} genau dann eine einfach geschlossene, orientierte Kurve, wenn die Lösung $\varphi(t; x_p)$ periodisch mit einer minimalen Periode $T > 0$ ist. Gesetztensfalls ist Γ_{x_p} ein so genannter **T -periodischer Orbit** und jeder Punkt von Γ_{x_p} ein **T -periodischer Punkt**. Orbits Γ_{x^*} durch Punkte $x^* \in M$, die weder Gleichgewichtspunkte noch periodische Punkte sind, sind doppeltpunktfreie, offene Kurven, die den Phasenraum M von Rand (bzw. von Unendlich) zu Rand (bzw. zu Unendlich) durchlaufen. Darüber hinaus ist keine Fortsetzung möglich, wie wir in Kap. 3 zeigen werden. Da die Lösungsfunktion $\varphi(\cdot; x^*) : I \rightarrow M$ in diesem Fall injektiv ist, ist eine Selbstdurchdringung eines solchen Orbits Γ_{x^*} ausgeschlossen. Die Orbits im Phasenraum M einer autonomen GDG vom Typ (2.3) beschreiben also die Lösungen unter Vernachlässigung der genauen t -Abhängigkeit.

Physikalisch kann man sie als Bewegungsbahnen eines Teilchens im Phasenraum M interpretieren, welches sich in einem Punkt $x \in M$ mit der Geschwindigkeit $v(x)$ bewegt. In einem Gleichgewichtspunkt ruht das Teilchen.

Vom Standpunkt der qualitativen Theorie von GDGn aus, ist man in erster Linie an den Orbits interessiert (**Phasenraumdiskussion**). Dabei spielen die Gleichgewichtspunkte, die man relativ leicht bestimmen kann, eine grundlegende Rolle. Auch der Verlauf der Orbits in der Nähe der Gleichgewichtspunkte ist von zentraler Bedeutung. Während die Orbits durch eine hinreichend kleine Umgebung jedes anderen Punkts im Phasenraum gewissermaßen parallel hindurchlaufen (siehe Abschn. 3.4, Satz [Begründungssatz, autonomer Fall]), kann sich ihr Verhalten nahe eines Gleichgewichtspunkts von Fall zu Fall qualitativ unterscheiden und sehr vielfältig sein. Dies führt zu einer Klassifikation der Gleichgewichtspunkte.

► **Bemerkung** Orbits darf man keinesfalls mit Integralkurven verwechseln. Allerdings ist es selbst im nicht-autonomen Fall mittels eines „Tricks“ möglich, Integralkurven (zu Lösungen mit maximalem Existenzintervall) als Orbits im so genannten **erweiterten Phasenraum** $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ aufzufassen. Dazu geht man von der GDG (2.1) durch Erweiterung mittels der trivialen skalaren GDG $\dot{\tau} = 1$ über zur autonomen GDG:

$$\begin{aligned}\dot{\tau} &= 1, & (\tau, x) &\in U \\ \dot{x} &= \Psi(\tau, x)\end{aligned}\tag{2.4}$$

Offenbar entsprechen die Lösungen von (2.1) in U der x -Komponente der Lösungen von (2.4) mit $\tau(t) = t$. Somit sind die Integralkurven zu Lösungen von (2.1) mit maximalen Existenzintervallen die Orbits der GDG (2.4). Tatsächlich ist (2.1) die Orbitgleichung von (2.4) bzgl. der Variablen τ , wenn man in (2.1) τ anstelle von t und $\frac{d}{d\tau}x$ anstelle von $\dot{x}$ schreibt (siehe Abschn. 2.3).

► **Bezeichnung** Eine schematische, graphische Darstellung von repräsentativen Orbits einer GDG im Phasenraum heißt **Phasenportrait (Phasendiagramm)**. Dabei wird die Orientierung eines Orbits durch eine angeheftete Pfeilspitze gekennzeichnet (vgl. Abb. 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 3.1, 3.2 und 5.1).

Wie erstellt man solch ein Phasenportrait? Eine elementare, rein graphische Methode besteht darin, in einer geeigneten Darstellung des Phasenraums bzw. von Teilbereichen des Phasenraums die Gleichgewichtspunkte zu markieren sowie dort, wo $v(x) \neq 0$ ist, eine repräsentative Auswahl an glatten Kurven zu skizzieren, welche dem Vektorfeld $v(x)$ tangential angepasst und entsprechend orientiert sind.

Beispiel

$$\dot{x} = x - x^3, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Der Phasenraum ist hier $M = \mathbb{R}$. Das Vektorfeld $v(x) = x - x^3$ ist ein Polynom und daher stetig differenzierbar. Die Nullstellen von $v(x)$ und damit die Gleichgewichtspunkte sind $x_G^1 = 0$ sowie

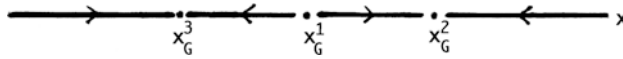


Abb. 2.1 Phasenportrait zur GDG $\dot{x} = x - x^3$ ($x \in \mathbb{R}$), bestehend aus dem einen instabilen und den zwei asymptotisch stabilen Gleichgewichtspunkten $x_G^1 = 0$ und $x_G^{2,3} = \pm 1$, den heteroklinen Orbits $(-1, 0)$ und $(0, 1)$ sowie den unbeschränkten Orbits $(-\infty, -1)$ und $(1, \infty)$

$x_G^{2,3} = \pm 1$. Die restlichen Orbits sind durch die vier offenen Intervalle $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ und $(1, \infty)$ mit der dem Vorzeichen von v im jeweiligen Intervall entsprechenden Orientierung gegeben. Die Intervalle $(-1, 0)$ und $(0, 1)$ sind so genannte **heterokline Orbits**, da sie je zwei verschiedene Gleichgewichtspunkte miteinander verbinden. In Abb. 2.1 ist das zugehörige Phasenportrait dargestellt. Neben der rein graphischen Methode hat man im vorliegenden Fall natürlich auch die Möglichkeit, eine Parametrisierung der Orbits durch analytische Lösungen der betreffenden GDG zu bestimmen.

Wir weisen noch darauf hin, dass so genannte **homokline Orbits** einen einzigen Gleichgewichtspunkt mit sich selbst verbinden (vgl. Abb. 2.2).

2.2 Stabilität von Gleichgewichtspunkten

Im Phasenportrait des vorigen Beispiels ist zu erkennen, dass die Nachbarorbits der Gleichgewichtspunkte $x_G^{2,3} = \pm 1$ im Sinne der Orientierung auf diese zulaufen, während sie von $x_G^1 = 0$ weglaufen. Derartige dynamische Stabilitäts- bzw. Instabilitätseigenschaften von Gleichgewichtspunkten sind im Hinblick auf Anwendungen genauso relevant wie ihre Existenz. In der Realität sind nämlich instabile Ruhelagen ohne Weiteres nicht zu beobachten.

Ein häufig verwendeter, mathematisch präziser Stabilitätsbegriff ist nach Lyapunov¹ benannt. Wir formulieren ihn in der folgenden Definition für Gleichgewichtspunkte. (Mit $\|\cdot\|$ bezeichnen wir irgendeine Norm des Vektorraums $\mathbb{R}^n$.)

Definition ((Asymptotische) Stabilität bzw. Instabilität von Gleichgewichtspunkten im Sinne von Lyapunov)

- Ein Gleichgewichtspunkt $x_G \in M$ der GDG (2.3), d. h. $v(x_G) = 0$, heißt **(Lyapunov-)stabil**, falls gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$\|x_0 - x_G\| < \delta \implies \varphi(t; x_0) \text{ existiert und } \|\varphi(t; x_0) - x_G\| < \varepsilon \text{ für alle } t \geq 0.$$

Andernfalls heißt er **(Lyapunov-)instabil**.

- Der Gleichgewichtspunkt x_G heißt **asymptotisch stabil (im Sinne von Lyapunov)**, falls er Lyapunov-stabil ist und ein $b > 0$ existiert, so dass gilt:

$$\|x_0 - x_G\| < b \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t; x_0) - x_G\| = 0.$$

¹ Alexander Michailovitsch Lyapunov (1857–1918); Charkov, St. Petersburg

Ein rein graphisches Vorgehen bei der Stabilitätsuntersuchung von Gleichgewichtspunkten analog zum vorigen Beispiel führt nur begrenzt zum Ziel, insbesondere wenn die Dimension n des Phasenraums relativ groß ist. Ein geeignetes algebraisches Hilfsmittel sind die Eigenwerte der **Jacobi²-Matrix** $Jv(x_G) = \left(\frac{\partial v}{\partial x_k}(x_G) \right)_{1 \leq j, k \leq n}$ des Vektorfelds v an der Stelle x_G .

Satz (Lyapunovs indirekte Methode) *Das Vektorfeld v in (2.3) sei stetig differenzierbar, und $x_G \in M$ sei ein Gleichgewichtspunkt. Dann gilt:*

- $\operatorname{Re} \lambda < 0$ für alle Eigenwerte λ von $Jv(x_G) \implies x_G$ ist asymptotisch stabil
- $\operatorname{Re} \lambda > 0$ für (wenigstens) einen Eigenwert λ von $Jv(x_G) \implies x_G$ ist instabil

Im skalaren Fall sind diese Aussagen offensichtlich. Denn dann hat die betreffende Jacobi-Matrix nur ein Element, und dieses ist gleich dem einzigen Eigenwert $\lambda = v'(x_G)$. Somit impliziert $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$, dass für x hinreichend nahe bei x_G gilt: $\dot{x} = v(x) \geq 0$ für $x < x_G$ und $\dot{x} = v(x) \leq 0$ für $x > x_G$. Ein Beweis für den allgemeinen Fall findet sich im Anhang; vgl. auch Übungsaufgaben 4.12 und 4.13.

Der Gleichgewichtspunkt x_G heißt **hyperbolisch**, falls für alle Eigenwerte λ von $Jv(x_G)$ gilt: $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$. Ein solcher Gleichgewichtspunkt ist also genau dann instabil, wenn er nicht asymptotisch stabil ist. Die jeweiligen Bedingungen des vorigen Satzes sind dann nicht nur hinreichend sondern auch notwendig. Andererseits ist Lyapunovs indirekte Methode nicht anwendbar, um einen Stabilitätsnachweis für **nicht-hyperbolische** Gleichgewichtspunkte zu erbringen. Dies zeigt das Beispiel der skalaren GDG $\dot{x} = ax^3, a \neq 0$. Der Gleichgewichtspunkt $x_G = 0$ ist hier asymptotisch stabil für $a < 0$ und instabil für $a > 0$, während die Jacobi-Matrix an der Stelle $x_G = 0$ in beiden Fällen die Null-Matrix ist. Dagegen ist die Anwendung von Lyapunovs direkter Methode zum Nachweis der Stabilität von Gleichgewichtspunkten auch im nicht-hyperbolischen Fall möglich. Diese Methode beschreiben wir im Folgenden.

Definition ((Strikte) Lyapunov-Funktion)

Sei $Q \subset M$ eine offene Umgebung des Gleichgewichtspunkts x_G von (2.3). Dann heißt eine C^1 -Funktion $F : Q \rightarrow \mathbb{R}$ **Lyapunov-Funktion** bzw. **strikte Lyapunov-Funktion** zu x_G in Q , falls für $x \in Q$ gilt:

- i) $F(x_G) = 0$
- ii) $F(x) > 0, \quad x \neq x_G$
- iii) $\dot{F}(x) := \langle \nabla F(x), v(x) \rangle \leq 0$ bzw. < 0 ($x \neq x_G$)

² Carl Gustav Jacobi (1804–1851); Königsberg, Berlin

Satz (Lyapunovs direkte Methode) *Zum Gleichgewichtspunkt x_G von (2.3) existiere in einer offenen Umgebung Q eine (strikte) Lyapunov-Funktion. Dann ist x_G (asymptotisch) stabil.*

► **Bemerkung** $\dot{F}(x)$ bezeichnet die Richtungsableitung der Funktion F in Richtung $v(x)$ im Punkt x und somit, nach der Kettenregel, die Ableitung von $F(\varphi(t; x))$ nach t an der Stelle $t = 0$. Die Eigenschaft iii) hat daher zur Folge, dass der Wert von F längs der Lösungen von (2.3) in $Q \setminus \{x_G\}$ nicht zunimmt bzw. streng monoton abnimmt. Dies macht die Aussage des Satzes plausibel. Ein strenger Beweis wird im Anhang geliefert. Zum Beweis der asymptotischen Stabilität benutzen wir dort lediglich die Eigenschaft, dass $F : Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine (nicht notwendig strikte) Lyapunov-Funktion ist, welche innerhalb von Q längs keiner Lösung $\varphi(t; x_0)$ von (2.3) mit $x_0 \in Q \setminus \{x_G\}$ für $t \geq 0$ konstant ist (vgl. Übungsaufgaben 2.13 c) und 2.14). Die Bedeutung von Lyapunovs direkter Methode beruht darauf, eine (strikte) Lyapunov-Funktion zu finden, ohne die betreffende GDG zu lösen. Eine mögliche Wahl für Lyapunov-Funktionen sind Erhaltungsgrößen bzgl. (2.3) (**erste Integrale**) F , die längs sämtlicher Lösungen konstant sind, d. h. $\dot{F}(x) = 0$ für alle $x \in Q$. Im Fall physikalischer Modellgleichungen sind die Gesamtenergie (**konservative Systeme von GDGn**) oder die Komponenten des Gesamtimpulses bzw. des Gesamtdrehimpulses typische Beispiele (vgl. Übungsaufgabe 2.3).

Kennt man für die GDG (2.3) $n - 1$ erste Integrale, die außerhalb der Gleichgewichtspunkte funktional unabhängig sind, dann lassen sich dort sämtliche Orbits als Schnittpunkte von $n - 1$ Niveauflächen dieser ersten Integrale darstellen und lokal durch jeweils eine der abhängigen Variablen parametrisieren. In diesem Fall ist die GDG (2.3) elementar (analytisch) lösbar. Man spricht daher von einer **vollständig integrierbaren GDG**.

Es stellt sich nun die Frage, wie sich die eingeführten Stabilitätsbegriffe von Gleichgewichtspunkten auf andere Typen von Orbits Γ_{x^*} übertragen lassen. Auf den ersten Blick ist dies einfach zu erreichen, indem man in der Definition x_G vor dem Implikationspfeil durch x^* und dahinter durch $\varphi(t; x^*)$ ersetzt. Allerdings stellt sich heraus, dass Orbits, die keine Ruhelagen sind, im Sinne von Lyapunov in der Regel instabil sind. Der folgende Stabilitätsbegriff ist schwächer. Dabei ist die **Abstandsfunktion** eines Punktes x von einer Teilmenge $N \neq \emptyset$ des $\mathbb{R}^n$ wie folgt erklärt:

$$\text{dist}(x, N) := \inf_{y \in N} \|x - y\|$$

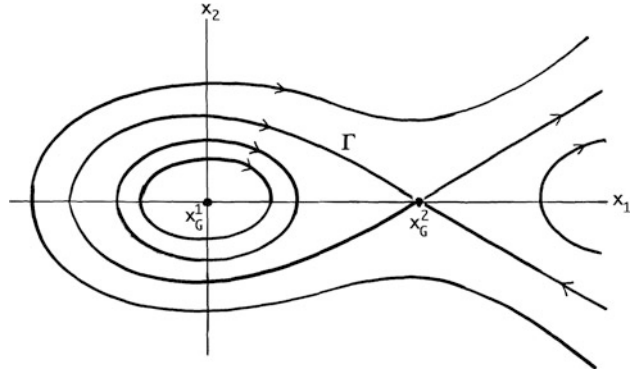
Definition (Orbitale (asymptotische) Stabilität bzw. Instabilität)

- Ein Orbit Γ_{x^*} der GDG (2.3) heißt **orbital stabil** falls gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$\|x_0 - x^*\| < \delta \implies \varphi(t; x_0) \text{ existiert und } \text{dist}(\varphi(t; x_0), \Gamma_{x^*}) < \varepsilon \text{ für alle } t \geq 0.$$

Andernfalls heißt er **orbital instabil**.

Abb. 2.2 Phasenportrait zur GDG $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -x_1 + x_1^2$ ($x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$) mit dem stabilen und dem instabilen Gleichgewichtspunkt $x_G^1 = (0, 0)^T$ bzw. $x_G^2 = (1, 0)^T$, dem bzgl. x_G^2 homoklinen Orbit Γ und orbital stabilen periodischen Orbits, welche x_G^1 umschließen



- Der Orbit Γ_{x^*} heißt **orbital asymptotisch stabil**, falls er orbital stabil ist und ein $b > 0$ existiert, so dass gilt:

$$\|x_0 - x^*\| < b \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\varphi(t; x_0), \Gamma_{x^*}) = 0.$$

Im Fall eines Gleichgewichtspunkts x_G sind diese Begriffe äquivalent zu den entsprechenden im Sinne von Lyapunov, weshalb man in diesem Fall auf den Zusatz „orbital“ bzw. „Lyapunov-“ verzichten kann. Die Äquivalenz soll in der Übungsaufgabe 2.15 a) bestätigt werden. Generell kann ein Orbit Γ_{x^*} jedoch orbital (asymptotisch) stabil sein, obwohl ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass für alle $\delta > 0$ ein $x_0 \in M$ und ein $t \geq 0$ existieren mit $\|x_0 - x^*\| < \delta$ sowie $\|\varphi(t; x_0) - \varphi(t; x^*)\| \geq \varepsilon$ (siehe Übungsaufgabe 2.15 b)).

Beispiel (Nichtlinearer Oszillator; $t \in \mathbb{R}, x^T = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_1^2\end{aligned}$$

Der Phasenraum ist hier $M = \mathbb{R}^2$. Das Vektorfeld

$$v(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 + x_1^2 \end{pmatrix}$$

ist komponentenweise polynomial und daher stetig differenzierbar. Die Gleichgewichtspunkte $x_G^1 = 0$ und $x_G^2 = (1, 0)^T$ sind durch Nullstellen von $v(x)$ gegeben. Die Eigenwerte der Jacobi-Matrizen $Jv(x_G^1)$ und $Jv(x_G^2)$ sind $\lambda_{1,2} = \pm i$ bzw. $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Mittels Lyapunovs indirekter Methode findet man also, dass x_G^2 instabil ist. Indem man die beiden Komponenten der gegebenen GDG mit x_1 bzw. $\dot{x}_1 = x_2$ multipliziert und die resultierenden Gleichungen addiert, ergibt sich

$$\dot{x}_1 x_1 + \dot{x}_2 x_2 = x_1^2 \dot{x}_1 \iff \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 - \frac{1}{3} x_1^3 \right) = 0.$$

Daher ist beispielsweise die Funktion

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto F(x) = x_1^2 + x_2^2 - \frac{2}{3} x_1^3$$

ein erstes Integral. Da diese Funktion bei $x = x_G^1 = 0$ ein striktes lokales Minimum besitzt, ist sie zugleich eine Lyapunov-Funktion zu diesem Gleichgewichtspunkt in einer hinreichend kleinen offenen Umgebung Q von x_G^1 , d. h. x_G^1 ist stabil. Außerhalb von $x = x_G^1$ und x_G^2 sind sämtliche Orbits durch die Niveaulinien $F(x) = C$, $C \in \mathbb{R}$, gegeben. Insbesondere findet man so für $0 < C < \frac{1}{3}$ eine Schar periodischer Orbits, welche $x_G^1 = 0$ umschließen. Diese variieren stetig mit C und sind daher alle orbital stabil. Für $C = \frac{1}{3}$ findet man einen homoklinen Orbit Γ , der den Gleichgewichtspunkt x_G^2 mit sich selbst verbindet. Alle anderen Orbits sind unbeschränkt. In Abb. 2.2 ist eine schematische Darstellung des zugehörigen Phasenportraits zu sehen.

2.3 Orbitgleichung

Es liegt nahe, zur Parametrisierung der Orbits der GDG in (2.3) anstelle von t eine der abhängigen Variablen x_i als Parameter zu verwenden. Dies hat den Vorteil, dass die entsprechende Parametrisierung durch eine GDG erster Ordnung mit einer reduzierten Anzahl abhängiger Variablen bestimmt ist. Obgleich die reduzierte GDG im Allgemeinen nicht-autonom ist, kann man sie gewinnbringend nutzen.

Im Folgenden betrachten wir die GDG (2.3) in komponentenweiser Darstellung außerhalb von den Gleichgewichtspunkten in M .

Lemma (Orbitgleichung) Sei $v : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Vektorfeld und $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})^T \in M$ mit $v_i(x_0) \neq 0$ für ein $i \in \{1, \dots, n\}$, d. h. x_0 ist kein Gleichgewichtspunkt. Dann ist $x_j = \varphi_j(t; x_0)$ genau dann Lösung von

$$\begin{aligned}\dot{x}_j &= v_j(x_1, \dots, x_n), \quad j = 1, \dots, n \\ x_j(0) &= x_{0j}\end{aligned}$$

für $|t|$ hinreichend klein, wenn $x_j = \tilde{\varphi}_j(x_i; x_0) := \varphi_j(\varphi_i^{-1}(x_i; x_0); x_0)$ die **Orbitgleichung** mit der unabhängigen Variablen x_i , $|x_i - x_{0i}|$ hinreichend klein,

$$\frac{dx_j}{dx_i} = \frac{v_j(x_1, \dots, x_n)}{v_i(x_1, \dots, x_n)}, \quad j \neq i \quad (2.5)$$

löst sowie die Anfangsbedingung $x_j(x_{0i}) = x_{0j}$ erfüllt ist. Hierbei existiert die Umkehrfunktion $t = \varphi_i^{-1}(x_i; x_0)$ von $\varphi_i(t; x_0)$ wegen $\frac{d\varphi_i}{dt}(0; x_0) = v_i(x_0) \neq 0$. Sie ist stetig differenzierbar, und zudem löst $x_i = \varphi_i(t; x_0)$ das AWP

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= v_i(\tilde{\varphi}_1(x_i; x_0), \dots, x_i, \dots, \tilde{\varphi}_n(x_i; x_0)) \\ x_i(0) &= x_{0i}.\end{aligned}$$

Beweisskizze Direktes Nachrechnen unter Verwendung des Satzes über die Umkehrfunktion bzw. des Satzes über implizite Funktionen. $\square$

Folgerung Jeder Orbit Γ_{x^*} von (2.3), der kein Gleichgewichtspunkt ist, lässt sich also abschnittsweise (lokal) durch eine der abhängigen Variablen x_i parametrisieren, indem man $t = \varphi_i^{-1}(x_i; x_0)$ substituiert in der entsprechenden Lösungsfunktion $x = \varphi(t; x_0)$, $x_0 \in \Gamma_{x^*}$. Die resultierende lokale Parametrisierung in einer Umgebung von x_0 kann insbesondere als Lösung der Orbitgleichung (2.5) gewonnen werden. Dies stellt einen Zusammenhang her zwischen den Orbits der autonomen GDG (2.3) und den Integralkurven der nicht-autonomen Orbitgleichung (2.5). Ausgehend von einer derartigen Parametrisierung lässt sich umgekehrt mittels der Lösung $x_i = \varphi_i(t; x_0)$ des AWP's am Ende des Lemmas, die Lösungsfunktion $x = \varphi(t; x_0)$ der GDG (2.3) lokal rekonstruieren.

Die **Methode der Orbitgleichung** ist besonders effizient, wenn die GDG (2.3) ein direktes Produkt skalarer GDGn ist.

Definition (Direktes Produkt von GDGn)

Unter dem **direkten Produkt** der m GDGn ($m \in \mathbb{N}; n_k \in \mathbb{N}$)

$$\dot{x}_k = v_k(x_k), \quad x_k \in M_k \subset \mathbb{R}^{n_k}, \quad k = 1, \dots, m \quad (2.6)$$

versteht man die GDG (2.3), wobei der Phasenraum die Produktmenge $M = \prod_{k=1}^m M_k \subset \prod_{k=1}^m \mathbb{R}^{n_k} \simeq \mathbb{R}^n$, $n = \sum_{k=1}^m n_k$, ist, und das Vektorfeld

$$v(x) = (v_1(x_1), \dots, v_m(x_m)), \quad x = (x_1, \dots, x_m) \in M$$

das **Produkt der Vektorfelder** v_k ist.

Sind alle GDGn in (2.6) skalar, d. h. $n_k = 1$ für alle k , dann kann man die zugehörige Orbitgleichung mittels der Methode der Trennung der Variablen komponentenweise elementar lösen.

Beispiele

- Wir bestimmen die Orbits des direkten Produkts der skalaren linearen GDGn

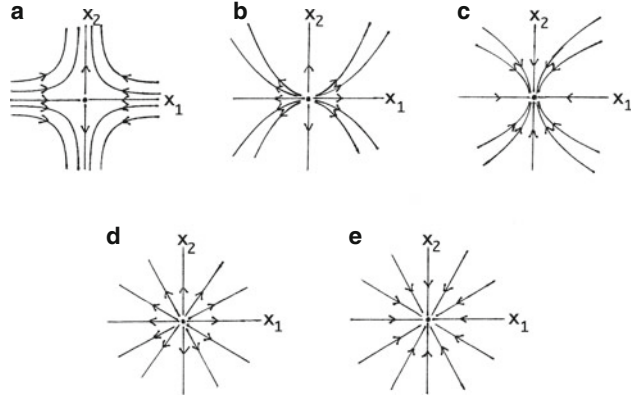
$$\dot{x}_j = \lambda_j x_j, \quad x_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2$$

in Abhängigkeit von den Parametern $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$; es sei $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$, $\lambda_1 \leq \lambda_2$. Dann ist offenbar $x_1 = x_2 = 0$ der einzige Gleichgewichtspunkt. Die Systemmatrix $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^{(2,2)}$ ist die Jacobi-Matrix des Vektorfelds $(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2)^T$ in diesem Punkt. Sie hat die Eigenwerte λ_1 und λ_2 . Gemäß Lyapunovs indirekter Methode ist jeder Gleichgewichtspunkt daher asymptotisch stabil, falls $\lambda_2 < 0$, und instabil, falls $\lambda_2 > 0$ gilt. Die Orbitgleichung für die anderen Orbits lautet

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dx_1} &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{x_2}{x_1}, \quad x_1 \neq 0 \quad \text{bzw.} \\ \frac{dx_1}{dx_2} &= \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{x_1}{x_2}, \quad x_2 \neq 0. \end{aligned}$$

Abb. 2.3 Phasenportrait zur GDG $\dot{x} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)x$ ($\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2$) und Klassifikation des Gleichgewichtspunktes bei $x = 0$:

- a** Sattelpunkt ($\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$),
b instabiler Knoten 2. Art ($0 < \lambda_1 < \lambda_2$), **c** stabiler Knoten 2. Art ($\lambda_1 < \lambda_2 < 0$),
d instabiler Knoten 1. Art ($0 < \lambda_1 = \lambda_2$), **e** stabiler Knoten 1. Art ($\lambda_1 = \lambda_2 < 0$)



Danach sind die positiven und negativen Koordinatenachsen in der (x_1, x_2) -Phasenebene jeweils Orbits, da $x_2 = \tilde{\varphi}_2(x_1) \equiv 0, x_1 \geq 0$, bzw. $x_1 = \tilde{\varphi}_1(x_2) \equiv 0, x_2 \geq 0$, Lösungen sind. (Im vorliegenden Fall hätte man dies ebenso leicht der ursprünglichen GDG entnehmen können.) Die restlichen Orbits liegen also strikt außerhalb der Koordinatenachsen. Daher reicht es, zu ihrer Bestimmung eine der obigen Versionen der Orbitgleichung heranzuziehen. Wir wählen die erste und finden mittels der Methode der Trennung der Variablen die Lösungen ($x_{01}, x_{02} \in \mathbb{R}$ mit $x_{01}x_{02} \neq 0$ beliebig)

$$x_2 = \tilde{\varphi}_2(x_1) = x_{02} \left(\frac{x_1}{x_{01}} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, \quad x_1 \geq 0.$$

Dies sind Hyperbelfunktionen für $\lambda_1\lambda_2 < 0$ und Parabelfunktionen für $\lambda_1\lambda_2 > 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$; in Abb. 2.3 sind die entsprechenden Phasenportraits schematisch skizziert. Dem geometrischen Verlauf der Orbits entsprechend nennt man den Gleichgewichtspunkt $x_1 = x_2 = 0$ im ersten Fall einen **Sattelpunkt** und im zweiten Fall einen **instabilen** bzw. **stabilen Knoten 2. Art**, (auch **Quelle** bzw. **Senke**), je nachdem ob $\lambda_2 > 0$ oder $\lambda_2 < 0$ gilt. Im Fall $\lambda_1 = \lambda_2$ ist dieser Gleichgewichtspunkt ein so genannter **instabiler** bzw. **stabiler Knoten 1. Art**. Die anderen Orbits sind hier Halbgeraden, welche vom Ursprung weg- bzw. auf ihn zulaufen. Ein Beispiel für einen **Knoten 3. Art** findet man in Übungsaufgabe 2.2 b).

- Analog findet man das Phasenportrait für die folgende lineare GDG im $\mathbb{R}^3$ (siehe Abb. 2.4)

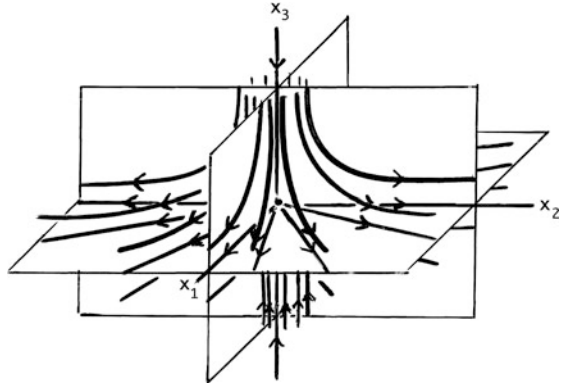
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_2, \quad x^T = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3. \\ \dot{x}_3 &= -x_3 \end{aligned}$$

Dabei entspricht die orthogonale Projektion auf eine der drei Koordinatenebenen jeweils einem der in Abb. 2.3 skizzierten Phasenportraits. Der Gleichgewichtspunkt $x = 0$ ist hier instabil.

- Im nächsten Beispiel führt die Methode der Orbitgleichung zum Ziel, obwohl kein direktes Produkt von GDGn vorliegt:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \omega x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega x_1, \quad (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Abb. 2.4 Phasenportrait zur GDG $\dot{x}_1 = x_1, \dot{x}_2 = x_2, \dot{x}_3 = -x_3$ ($x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$) mit dem instabilen, hyperbolischen Gleichgewichtspunkt bei $x_1 = x_2 = x_3 = 0$



Auch diese GDG ist linear. Hierbei sei $\omega > 0$ ein reeller Parameter. Der einzige Gleichgewichtspunkt $x_1 = x_2 = 0$ ist hier ein so genanntes **Zentrum (Wirbel)**. Es ist stabil. Die anderen Orbits sind periodisch und durch die konzentrischen Kreise $x_1^2 + x_2^2 = r^2$, $r > 0$, in der (x_1, x_2) -Phasenebene gegeben (vgl. Abb. 2.5). Offenbar stellen die Lösungen $x_2 = \tilde{\varphi}_2(x_1; r) = \pm \sqrt{r^2 - x_1^2}$, $-r < x_1 < r$, und $x_1 = \tilde{\varphi}_1(x_2; r) = \pm \sqrt{r^2 - x_2^2}$, $-r < x_2 < r$ der Orbitgleichung

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dx_1} &= -\frac{x_1}{x_2}, & x_2 &\neq 0 & \text{ bzw.} \\ \frac{dx_1}{dx_2} &= -\frac{x_2}{x_1}, & x_1 &\neq 0 \end{aligned}$$

Parametrisierungen jener periodischen Orbits in der oberen und unteren bzw. rechten und linken (x_1, x_2) -Halbebene dar. Um die Perioden zu bestimmen, betrachten wir die GDG

$$\dot{x}_1 = \omega \tilde{\varphi}_2(x_1; r) = \pm \omega \sqrt{r^2 - x_1^2}, \quad -r < x_1 < r.$$

Trennung der Variablen liefert

$$\int_{-r}^r \frac{dx_1}{\sqrt{r^2 - x_1^2}} = \pm \omega \int_0^{T_{\pm}} dt,$$

und somit $|T_{\pm}| = \frac{\pi}{\omega}$ für alle $r > 0$. Also haben alle periodischen Orbits dieselbe Periode $T = |T_+| + |T_-| = \frac{2\pi}{\omega}$.

2.4 Transformation von GDGn und Vektorfeldern (Koordinatenwechsel)

Das Schlüsselprinzip der mathematischen Behandlung von GDGn ist ihre Darstellung in einer Form, welche einen relativ bequemen Zugang mittels der verfügbaren Konzepte und Methoden erlaubt. Wir bleiben zunächst bei autonomen GDGn. Hier stellt sich beispiels-

weise die Frage nach Koordinaten im Phasenraum, bzgl. derer die GDG die Gestalt eines direkten Produkts hat, so dass sich die Methode der Orbitgleichung bequem anwenden lässt. Abstrakt lässt sich ein Koordinatenwechsel beschreiben durch einen Diffeomorphismus im Phasenraum und dessen Operation auf dem mit der GDG assoziierten Vektorfeld.

Definition (Operation von C^r -Diffeomorphismen auf Vektorfeldern, $1 \leq r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$)

Seien $M, N \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi : M \rightarrow N$ ein **C^r -Diffeomorphismus**, d. h. eine bijektive Abbildung, die samt ihrer Umkehrabbildung Φ^{-1} r -fach bzw. im Fall $r = \infty$ beliebig oft stetig differenzierbar (C^r -glatt) ist. Dann versteht man unter dem **Bild des Vektorfeldes** $v : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ unter (bzgl.) dem Diffeomorphismus Φ das Vektorfeld $\Phi_* v$, dessen Wert an der Stelle $\xi = \Phi(x) \in N$ sich aus dem Wert von v an der Stelle $x \in M$ folgendermaßen ergibt:

$$\begin{aligned} (\Phi_* v)(\Phi(x)) &= J\Phi(x)v(x) \\ \iff (\Phi_* v)(\xi) &= J\Phi(\Phi^{-1}(\xi))v(\Phi^{-1}(\xi)) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Satz Sei $\Phi : M \rightarrow N$ ein C^{r+1} -Diffeomorphismus, $0 \leq r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ ($\infty + 1 = \infty$). Dann definiert (2.7) eine lineare Operation auf C^r -Vektorfeldern, d. h. die Abbildung

$$\Phi : C^r(M, \mathbb{R}^n) \rightarrow C^r(N, \mathbb{R}^n); \quad v \mapsto \Phi_* v$$

ist wohl definiert und linear.

Beweisskizze Die Multiplikation von Vektoren mit einer Matrix ist eine lineare Operation, und die Abbildungen, welche in die Definition von $(\Phi_* v)$ eingehen, sind alle r -fach stetig differenzierbar. $\square$

► **Bemerkung** Einen C^1 -Diffeomorphismus nennt man in der Regel kurz **Diffeomorphismus**. Sind M und N Koordinatenbereiche in $\mathbb{R}^n$, dann definiert jeder Diffeomorphismus $\Phi : M \rightarrow N$; $x \mapsto \xi = \Phi(x)$ eine Koordinatentransformation von x - auf ξ -Koordinaten. Man beachte, dass die Jacobi-Matrix $J\Phi(x)$ für alle $x \in M$ regulär ist, und dass für einen Diffeomorphismus Φ gilt: $(J\Phi^{-1})(\Phi(x)) = (J\Phi)^{-1}(x)$.

Satz (Koordinatenwechsel bei GDGn der Form (2.3)) Sei $\Phi : M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus. Dann ist die GDG $\dot{x} = v(x)$, $x \in M$, **äquivalent** zur GDG

$$\dot{\xi} = (\Phi_* v)(\xi), \quad \xi = \Phi(x) \in N, \quad (2.3\star)$$

d. h. $\varphi : I \rightarrow M$ ist Lösung von (2.3) genau dann, wenn $\tilde{\varphi} = \Phi \circ \varphi : I \rightarrow N$ Lösung von (2.3 $\star$) ist.

Beweis Da die Jacobi-Matrix $J\Phi(x)$ für alle $x \in M$ regulär ist, gilt:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}(t) &= v(\varphi(t)), \quad t \in I && \Longleftrightarrow \\ \frac{d}{dt}(\Phi \circ \varphi)(t) &= \frac{d}{dt}\Phi(\varphi(t)) = J\Phi(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) = J\Phi(\varphi(t))v(\varphi(t)) \\ &= J\Phi(\Phi^{-1}((\Phi \circ \varphi)(t)))v(\Phi^{-1}((\Phi \circ \varphi)(t))) \\ &= (\Phi_*v)((\Phi \circ \varphi)(t)), \quad t \in I\end{aligned}$$

□

Folgerung Existiert die Fundamentallösung einer der beiden äquivalenten GDGn (2.3) und (2.3*), dann existiert auch die der anderen. Der Diffeomorphismus $\Phi : M \rightarrow N$ bildet dann einen Orbit Γ_{x^*} , $x^* \in M$, von (2.3) punktweise, umkehrbar eindeutig auf den Orbit $\Gamma_{\Phi(x^*)}$, $\Phi(x^*) \in N$, von (2.3*) ab. Dabei bleibt die Orientierung der Orbits erhalten. Gleichgewichtspunkte gehen über in Gleichgewichtspunkte, periodische Orbits in periodische Orbits mit derselben Periode, und auch Orbits jedes sonstigen Typs in Orbits des gleichen Typs. Aufgrund der Orientierungserhaltung ändern sich die Stabilitätseigenschaften der Orbits nicht. In anderen Worten: Die Phasenportraits der GDGn (2.3) und (2.3*) sind dann in dem Sinne äquivalent, dass sie **bis auf einen Diffeomorphismus (qualitativ) gleich** sind (vgl. Übungsaufgabe 2.5).

Der eingeführte Äquivalenzbegriff eignet sich insbesondere zur Klassifikation von GDGn, die sich durch einen entsprechenden Koordinatenwechsel aus einer elementar lösbaren ergeben. Vom qualitativen Standpunkt aus reicht es sogar zu wissen, dass ein solcher Koordinatenwechsel bzw. ein entsprechender Diffeomorphismus des Phasenraums existiert. Dieser muss nicht notwendigerweise explizit gegeben sein, um wichtige Erkenntnisse über das Lösungsverhalten der betreffenden GDG gewinnen zu können. Dies schließt Fragen zur Existenz, Eindeutigkeit und stetigen Abhängigkeit der Lösungen von den Anfangsdaten ebenso ein, wie die Suche nach speziellen Typen von Orbits inklusive deren Stabilitätseigenschaften.

Beispiele (Klassifikation ebener linearer GDGn der Form (2.3))

Im ersten der Beispiele zuvor haben wir das direkte Produkt $\dot{x} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)x = v(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, zweier linearer GDGn studiert und die Orbits in Abhängigkeit von den Eigenwerten λ_1 und λ_2 der Diagonalmatrix $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ untersucht. Wir betrachten nun den linearen Diffeomorphismus

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad \xi = \Phi(x) := Tx,$$

wobei die Matrix $T \in \mathbb{R}^{(2,2)}$ regulär sei. Nach der unteren Formel in (2.7) ist das Bild des Vektorfelds v bzgl. dieser Transformation

$$(\Phi_*v)(\xi) = T \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)T^{-1}\xi.$$

Somit lautet die obige GDG in den ξ -Koordinaten

$$\dot{\xi} = A\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^2$$

mit $A = T \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) T^{-1} \in \mathbb{R}^{(2,2)}$. Dies führt auf eine Klassifikation ebener linearer GDGn, in Abhängigkeit von den Eigenwerten λ_1 und λ_2 der Systemmatrix A . Im vorliegenden Fall stimmt das Phasenportrait bis auf eine lineare Transformation mit demjenigen in Abb. 2.3 für die entsprechenden Werte von λ_1 und λ_2 überein. Die dortigen Bezeichnungen für den Gleichgewichtspunkt $x = 0$ gelten entsprechend für $\xi = 0$.

Offenbar ist $\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ hier die Jordan³-Normalform der Matrix A , und T ist die zugehörige Transformationsmatrix. Wie man Letztere zu einer gegebenen Matrix A explizit bestimmt, ist aus der Linearen Algebra bekannt. Insbesondere ergibt sich aus der elementar konstruierbaren Fundamentallösung $x = \varphi(t - t_0; x_0)$ der GDG $\dot{x} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)x$ die Existenz und folgende Darstellung der Fundamentallösung der GDG $\dot{\xi} = A\xi$:

$$\xi = T\varphi(t - t_0; T^{-1}\xi_0), \quad (t_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}$$

Dies gilt analog im Fall jeder anderen Art von reellen Eigenwerten der Systemmatrix $A \in \mathbb{R}^{(2,2)}$. Besitzt A einen algebraisch doppelten und geometrisch einfachen reellen Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \geq 0$, dann nennt man den Gleichgewichtspunkt $\xi = 0$ einen **instabilen** bzw. **stabilen Knoten 3. Art**.

Ebenso ist das Phasenportrait einer ebenen, linearen GDG bis auf eine lineare Transformation $\xi = Tx \in \mathbb{R}^2$ gleich dem der GDG

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha x_1 - \omega x_2 \\ \dot{x}_2 &= \omega x_1 + \alpha x_2 \end{aligned}, \quad x^T = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

falls die Systemmatrix $A \in \mathbb{R}^{(2,2)}$ ein Paar komplex konjugierte Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$, $\omega > 0$, besitzt. Dabei ist die Systemmatrix der transformierten GDG die reelle Jordan-Normalform von A , und T die zugehörige Transformationsmatrix. Nach Lyapunovs indirekter Methode ist der einzige Gleichgewichtspunkt $\xi = 0$ bzw. $x = 0$ asymptotisch stabil, falls $\alpha < 0$, und instabil, falls $\alpha > 0$. Es wird sich zeigen, dass er für $\alpha = 0$ stabil ist. Zur Bestimmung der übrigen Orbits stellen wir uns vor, dass die (x_1, x_2) -Ebene längs der nicht-negativen bzw. nicht-positiven x_1 -Achse aufgeschlitzt ist, und machen uns zu Nutzen, dass dort die obige GDG äquivalent ist zur GDG:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \alpha r \\ \dot{\theta} &= \omega \end{aligned}, \quad 0 < r < \infty, \quad 0 < \theta < 2\pi \quad \text{bzw.} \quad -\pi < \theta < \pi$$

Denn die Polarkoordinaten-Transformation

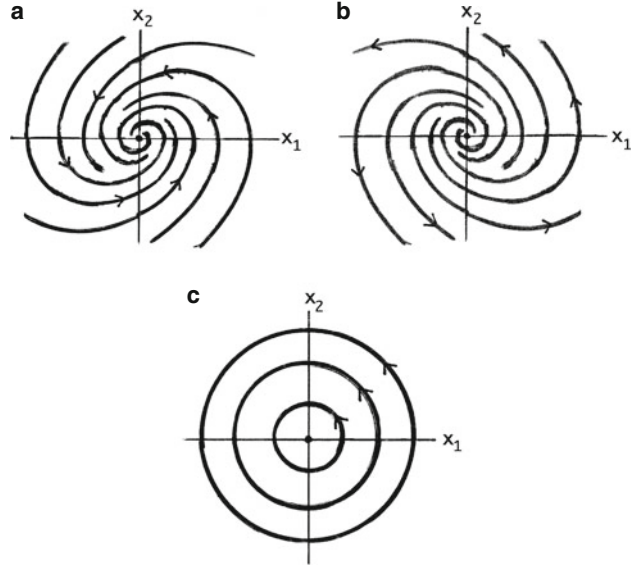
$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta \\ x_2 &= r \sin \theta \end{aligned}$$

stellt einen Diffeomorphismus Φ zwischen den angegebenen Bereichen der (r, θ) - und (x_1, x_2) -Ebene dar und führt gemäß der Formeln in (2.7) auf jene Darstellung der betrachteten GDG in Polarkoordinaten (r, θ) . Diese ist ein direktes Produkt von GDGn. Die zugehörige Orbitgleichung bzgl. θ

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\alpha}{\omega} r$$

³ Camille Jordan (1838–1922); Paris

Abb. 2.5 Phasenportrait zur GDG $\dot{x}_1 = \alpha x_1 - \omega x_2$, $\dot{x}_2 = \omega x_1 + \alpha x_2$ ($\omega > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$) und Klassifikation des Gleichgewichtspunktes bei $x = 0$: **a** stabiler Strudel (Fokus) ($\alpha < 0$), **b** instabiler Strudel (Fokus) ($\alpha > 0$), **c** Zentrum (Wirbel) ($\alpha = 0$)



hat die Fundamentallösung

$$r(\theta; r_0, \theta_0) = r_0 e^{\frac{\alpha}{\omega}(\theta - \theta_0)}, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

mit Anfangsdaten $0 \leq r_0 < \infty$, $\theta_0 \in \mathbb{R}$. Dies liefert die folgende Parametrisierung der Orbits in den betrachteten Bereichen der (x_1, x_2) -Ebene:

$$\begin{aligned} x_1 &= r(\theta; r_0, \theta_0) \cos \theta \\ x_2 &= r(\theta; r_0, \theta_0) \sin \theta, \quad r_0 > 0, \quad 0 < \theta - \theta_0 < 2\pi \text{ bzw. } -\pi < \theta - \theta_0 < \pi \end{aligned}$$

Die Orbits verlaufen also für $\alpha \leq 0$ spiralförmig auf den Ursprung zu bzw. von ihm weg und sind Kreise mit Mittelpunkt im Ursprung, also periodisch, für $\alpha = 0$. Der Gleichgewichtspunkt im Ursprung ist entsprechend ein **stabiler** bzw. **instabiler Strudel (Fokus)** für $\alpha \leq 0$ und ein **Zentrum (Wirbel)** für $\alpha = 0$ (siehe Abb. 2.5). Wie man sieht, ist ein Zentrum stabil, aber nicht asymptotisch stabil. Lineare Transformationen verformen die kreisförmigen, periodischen Orbits in der Regel zu Ellipsen.

Zur Transformation nicht-autonomer GDGn der Form (2.1) benutzen wir den im Abschn. 2.1 erwähnten Trick und betrachten die zugeordnete autonome GDG (2.4) im erweiterten Phasenraum $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Der spezifischen Struktur der τ -Komponente des erweiterten Vektorfelds $\tilde{v}$ tragen wir folgendermaßen Rechnung: Wir schränken die zugelassenen Diffeomorphismen (Koordinatenwechsel) auf die Klasse derjenigen ein, bei welchen die τ -Komponente gleich der Identität ist:

$$\tilde{\Phi} : U \rightarrow \tilde{\Phi}(U) = V \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \quad (\tau, x) \mapsto (\tau, \xi) = (\tau, \Phi(\tau, x))$$

Offensichtlich ist $\tilde{\Phi}$ ein C^r -Diffeomorphismus ($r \geq 1$) genau dann, wenn Φ eine C^r -Abbildung ist und $\Phi(\tau, \cdot)$ für die entsprechenden Werte von τ ein C^r -Diffeomorphismus von $U \cap \{\tau\} \times \mathbb{R}^n$ auf $V \cap \{\tau\} \times \mathbb{R}^n$ ist. Das Bild des Vektorfeldes $\tilde{v}$ unter einem solchen Diffeomorphismus ist das Vektorfeld $\tilde{\Phi}_* \tilde{v}$, dessen Wert an der Stelle $(\tau, \xi) \in V$ sich aus dem Wert von $\tilde{v}$ an der Stelle $(\tau, x) \in U$ gemäß der Formeln in (2.7) ergibt. Die ξ -Komponente von $\tilde{\Phi}_* \tilde{v}$ stellt dann die rechte Seite der nicht-autonomen GDG in transformierter Form dar. Letztere lautet somit $((t, \xi) \in V)$:

$$\dot{\xi} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \Phi \right)(t, \Phi(t, \cdot)^{-1}(\xi)) + J_x \Phi(t, \Phi(t, \cdot)^{-1}(\xi)) \Psi(t, \Phi(t, \cdot)^{-1}(\xi)) \quad (2.1\star)$$

Nach dem Satz [Koordinatenwechsel bei GDGn der Form (2.3)] sind die nicht-autonomen GDGn (2.1) und (2.1 $\star$) in dem Sinne äquivalent, dass ihre Integralkurven in den erweiterten Phasenräumen bis auf den Diffeomorphismus $\tilde{\Phi}$ übereinstimmen. Selbstverständlich kann man die GDG (2.1) auch direkt auf die Gestalt der GDG (2.1 $\star$) transformieren, ohne jenen Trick zu verwenden.

2.5 Konzept des Phasenflusses

Das Konzept des Phasenflusses ist eine mathematische Formalisierung der Fundamentallösung $\varphi(t; x_0)$ einer autonomen GDG der Form (2.3). In diesem Abschnitt führen wir dieses Konzept ein. Die spezielle Abhängigkeit der Fundamentallösung $\varphi(t - t_0; x_0)$ von t und t_0 im autonomen Fall hat neben den bereits erwähnten Konsequenzen eine weitere, die im folgenden Lemma formuliert ist. Dazu nehmen wir an, dass die Fundamentallösung $\varphi(t; x_0)$ überall auf $\mathbb{R} \times M$, d. h. global bzgl. t , definiert ist. Neben Bedingungen für die lokale Existenz und für die Glattheit der Fundamentallösung werden wir in Kap. 3 auch Bedingungen für die globale Existenz bereitstellen (Satz [Picard-Lindelöf, globale Version]). Die stetige Differenzierbarkeit des Vektorfeldes v ist hierfür nicht hinreichend.

Lemma (Flusseigenschaften der Fundamentallösung) *Die Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ sei stetig differenzierbar und stelle die Fundamentallösung der GDG (2.3) dar. Dann ist die Abbildung (Zeit- t -Abbildung)*

$$g^t : M \rightarrow M ; \quad x \mapsto g^t x = \varphi(t; x)$$

für jedes $t \in \mathbb{R}$ ein Diffeomorphismus. Ferner bildet die Menge $\{g^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ eine kommutative, ein-parametrische Diffeomorphismengruppe mit der Abbildungskomposition „ $\circ$ “ als Verknüpfung. Es sind die Flusseigenschaften (Gruppenaxiome)

- i) $g^0 = \text{id}$ (Identität)
- ii) $(g^t)^{-1} = g^{-t}$
- iii) $g^t \circ g^s = g^{t+s} = g^s \circ g^t$

sowie die zusätzliche Eigenschaft, dass $g^t x$ in beiden Argumenten stetig differenzierbar ist, erfüllt ($s, t \in \mathbb{R}$ und $x \in M$). Diese ein-parametrische Diffeomorphismengruppe heißt **Phasenfluss der GDG (2.3)**, wobei v das zugehörige **Phasengeschwindigkeitsfeld** ist.

Beweis Wir beweisen zunächst die Flusseigenschaften. Dazu seien $x \in M$ und $s, t \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt. Nach Definition gilt $g^0 x = \varphi(0, x) = x$ und somit $g^0 = id$, also i).

Aufgrund des Lemmas [Struktur der Fundamentallösung im autonomen Fall] gilt $(g^t \circ g^s)x = g^t(g^s x) = \varphi(t; \varphi(s; x)) = \varphi(t + s; x) = g^{t+s}x = g^{s+t}x = (g^s \circ g^t)x$, also iii).

Um ii) zu beweisen, setzen wir $s = -t$ in iii) und erhalten $g^t \circ g^{-t} = id = g^{-t} \circ g^t$. Also ist die Abbildung g^t bijektiv und für die Umkehrabbildung gilt ii).

Die behauptete C^1 -Glattheit von $g^t x$ folgt aus der von $\varphi(t; x)$. Somit ist g^t ein Diffeomorphismus. $\square$

► **Bemerkung** Falls die Fundamentallösung $\varphi(t; x_0)$ nicht global existiert, gelten die Aussagen des Lemmas für alle $s, t \in \mathbb{R}$ und $x \in M$, für welche sie trotz der eingeschränkten Definitionsbereiche der Abbildungen g^t Sinn machen.

Definition (Phasenfluss)

Allgemein nennen wir eine (kommutative) ein-parametrische Gruppe $\{g^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ von bijektiven Abbildungen (Transformationen) $g^t : M \rightarrow M$, $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, welche die obigen Flusseigenschaften i) - iii) besitzen, einen **Phasenfluss mit Phasenraum M** . Wenn wir auf einen festen Punkt $x^* \in M$ alle Transformationen g^t anwenden, dann erhalten wir den **Orbit** $\Gamma_{x^*} = \{g^t x^* | t \in \mathbb{R}\} \subset M$ durch x^* bzgl. des gegebenen Phasenflusses. Die Funktion $\varphi(t; x^*) = g^t x^*$, $t \in \mathbb{R}$, heißt **Bewegung des Punktes $x^* \in M$** unter diesem Phasenfluss. Die Richtung der Bewegung im Sinne wachsender Werte von t legt die Orientierung von Γ_{x^*} fest. Falls $g^t x$ bzgl. t bei $t = 0$ differenzierbar ist, dann ist durch

$$v(x) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} g^t x$$

die **Phasengeschwindigkeit des Flusses** $\{g^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ im Punkt $x \in M$ gegeben. Das dadurch definierte Vektorfeld $v(x)$ ist das zugehörige **Phasengeschwindigkeitsfeld** auf dem Phasenraum M . Physikalisch kann man sich den Phasenraum mit einer Flüssigkeit gefüllt denken, wobei sich zu einem beliebigen Zeitpunkt t das sich am Ort x befindende Flüssigkeitsteilchen mit der Geschwindigkeit $v(x)$ bewegt.

► **Bemerkung** Wie im Fall autonomer GDGn der Form (2.3) geht durch jeden Punkt x^* des Phasenraums M eines allgemeinen Phasenflusses genau ein Orbit. Denn $g^{t_1} x^* = g^{t_2} y^*$

für $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ und $x^*, y^* \in M$ impliziert $y^* = g^{t_2-t_1} x^*$ und somit $g^t y^* = g^t (g^{t_2-t_1} x^*) = g^{t+t_2-t_1} x^*$ für alle $t \in \mathbb{R}$, d. h. $\Gamma_{x^*} = \Gamma_{y^*}$.

Ferner existieren auch hier genau drei grundlegende Typen von Orbits. Für einen Punkt $x^* \in M$ gibt es drei Möglichkeiten. Entweder es gilt $g^\alpha x^* = x^*$ für beliebig kleine $\alpha > 0$. Dann folgt $x^* = g^{k\alpha} x^*$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und somit $x^* = g^t x^*$ für alle $t \in \mathbb{R}$, d. h. der Punkt $x^* = x_G$ ist ein Gleichgewichtspunkt (Ruhelage) bzgl. des Flusses $\{g^t\}_{t \in \mathbb{R}}$. Oder es existiert ein minimales $\alpha = T > 0$, so dass $g^T x^* = x^*$. Dies impliziert $g^{t+T} x^* = g^t x^*$ für alle $t \in \mathbb{R}$, d. h. der Punkt $x^* = x_p$ ist ein T -periodischer Punkt und Γ_{x_p} ein T -periodischer Orbit in M . Schließlich bleibt noch der Fall, dass $g^\alpha x^* \neq x^*$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist die Funktion $\varphi(\cdot; x^*) : \mathbb{R} \rightarrow M; t \mapsto g^t x^*$ injektiv, d. h. Γ_{x^*} ist eine doppeltpunktfreie Punktmenge in M . Ist diese Funktion stetig, dann auch die Umkehrfunktion, d. h. dann ist Γ_{x^*} zusammenhängend und offen.

Nach dem vorigen Lemma definiert die Fundamentallösung der GDG (2.3) unter geeigneten Voraussetzungen einen Phasenfluss mit Phasenraum M im Sinne der allgemeinen Definition. Umgekehrt gilt:

Satz (Assoziierte GDG) Sei $\{g^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ ein Phasenfluss mit Phasenraum $M \subset \mathbb{R}^n$, so dass $g^t x$ für alle $x \in M$ bzgl. t bei $t = 0$ und somit auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist. Sei v das zugehörige Phasengeschwindigkeitsfeld. Wir betrachten die GDG in (2.3) mit diesem Vektorfeld v (**assoziierte GDG zum gegebenen Phasenfluss**). Dann ist $\varphi(t; x_0) = g^t x_0$, $t \in \mathbb{R}$, eine globale, nicht notwendig eindeutige Lösung des zugehörigen AWP's zu den Anfangsdaten $t_0 = 0$ und $x(0) = x_0 \in M$. Ist v z. B. ein C^1 -Vektorfeld, also $g^t x$ bzgl. beider Argumente hinreichend glatt, dann ist dieses AWP für beliebige $x_0 \in M$ eindeutig lösbar, und der Phasenfluss $\{g^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ definiert die Fundamentallösung φ der assoziierten GDG:

$$\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M; \quad (t, x_0) \mapsto \varphi(t; x_0) = g^t x_0$$

Beweis Für alle $x_0 \in M$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt $\varphi(0; x_0) = g^0 x_0 = x_0$ sowie

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \varphi(t; x_0) &= \frac{\partial}{\partial t} g^t x_0 = \frac{\partial}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} g^{\tau+t} x_0 \\ &= \frac{\partial}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} g^\tau (g^t x_0) = v(g^t x_0) = v(\varphi(t; x_0)). \end{aligned} \quad \square$$

Beispiel

Sei $\{g^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ eine ein-parametrische Gruppe linearer Transformationen in $\mathbb{R}$, so dass $g^t x$ bzgl. t bei $t = 0$ differenzierbar ist. Jede solche Gruppe ist Phasenfluss einer linearen GDG der Form $\dot{x} = ax$, $x \in M = \mathbb{R}$, für ein gewisses $a \in \mathbb{R}$, und es gilt: $g^t x = x e^{at}$, d. h. für $a \neq 0$, $t \neq 0$ ist g^t eine Stauchung bzw. Streckung in $\mathbb{R}$.

Denn $\{g^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ ist ein Phasenfluss mit Phasenraum M . Dessen Phasengeschwindigkeitsfeld v ist linear und somit C^1 -glatt, da für beliebige $\lambda, \mu, x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} v(\lambda x + \mu y) &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} g^t(\lambda x + \mu y) = \lambda \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} g^t x + \mu \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} g^t y \\ &= \lambda v(x) + \mu v(y) \end{aligned}$$

Somit existiert ein $a \in \mathbb{R}$, so dass $v(x) = ax$, $x \in \mathbb{R}$. Nach dem vorigen Satz ist $\varphi(t; x_0) = g^t x_0$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ die Fundamentallösung der GDG $\dot{x} = v(x) = ax$. Dies ist eine skalare lineare GDG erster Ordnung, deren Fundamentallösung $\varphi(t; x_0) = x_0 e^{at}$ ist (vgl. (1.6)). Somit folgt die Behauptung.

► **Bemerkung (Arnold⁴ [3], S. 64)** Im Sinne einer abstrakten Sichtweise besteht das Grundproblem der Theorie von GDGn in der mathematischen Behandlung der Relation zwischen Phasenflüssen und assoziierten GDGn. Beschreibt ein Phasenfluss beispielsweise den Verlauf eines deterministischen zeitlichen Evolutionsprozesses mit beliebigen Anfangsdaten, dann bestimmt die durch das Phasengeschwindigkeitsfeld definierte GDG das lokale Gesetz der Evolution des Prozesses. Die Theorie von GDGn ermöglicht es in diesem Zusammenhang, bei Kenntnis dieses Evolutionsgesetzes einerseits die vergangene Entwicklung des Prozesses zu rekonstruieren und andererseits die künftige Entwicklung vorherzusagen. Die Formulierung eines Evolutionsgesetzes in Form einer autonomen GDG reduziert Fragen zum betreffenden Prozess auf das geometrische Problem des Studiums von Orbits dieser GDG im Phasenraum.

Wir haben gesehen, dass die äquivalente Umformung von GDGn bzw. Vektorfeldern mittels Diffeomorphismen des Phasenraums ein nützliches Hilfsmittel zur Analyse ist. Dabei ist das transformierte Vektorfeld in der Regel nicht so glatt wie der Diffeomorphismus. Im Gegensatz dazu lassen sich Phasenflüsse ohne Glattheitsverlust und sogar mittels nicht-glatte Transformationen des Phasenraums äquivalent umformen.

Definition (Operation von Transformationen auf Phasenflüssen)

Das **Bild des Phasenflusses** $\{g^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ mit Phasenraum M **unter der Transformation** $\Phi : M \rightarrow N$; $x \mapsto \xi = \Phi(x)$ ($M, N \subset \mathbb{R}^n$ offen), ist der Phasenfluss $\{h^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ mit Phasenraum N , gegeben durch

$$h^t = \Phi \circ g^t \circ \Phi^{-1}.$$

Man sagt, $\{h^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ ist zu $\{g^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ **unter (bzgl.) der Transformation Φ konjugiert**.

Wie man direkt nachrechnet, besitzt mit $\{g^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ auch $\{h^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ die Flusseigenschaften, was diese Definition rechtfertigt. Ferner ist $\{h^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ zu $\{g^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ bzgl. Φ konjugiert genau dann, wenn $\{g^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ zu $\{h^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ bzgl. Φ^{-1} konjugiert ist. Die Konjugation von

⁴ Wladimir Igorewitsch Arnold (1937–2010); Moskau, Paris

Phasenflüssen ist offensichtlich eine Äquivalenzrelation. Ist Φ ein C^r -Diffeomorphismus, $0 \leq r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, dann ist $h^t \xi$ in einem bzw. in beiden Argumenten C^r -glatt genau dann, wenn dies für $g^t x$ gilt. Ebenso sieht man leicht, dass Φ die Bewegung $g^t x^*$, $t \in \mathbb{R}$, des Punktes $x^* \in M$ punktweise bzgl. t auf die Bewegung $h^t(\Phi(x^*))$, $t \in \mathbb{R}$, des Punktes $\Phi(x^*) \in N$ abbildet. Entsprechend wird der Orbit $\Gamma_{x^*} \subset M$ punktweise und orientierungserhaltend auf den Orbit $\Gamma_{\Phi(x^*)} \subset N$ abgebildet. Somit liegt eine vollständige Analogie zu äquivalenten Vektorfeldern bzw. GDGn vor. Dies wirft die Frage nach dem Zusammenhang zwischen der Konjugation von Phasenflüssen und der Äquivalenz der assoziierten Vektorfelder bzw. GDGn auf.

Lemma

- a) Der Phasenfluss $\{h^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ mit Phasenraum $N \subset \mathbb{R}^n$ sei zum Phasenfluss $\{g^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ mit Phasenraum $M \subset \mathbb{R}^n$ unter einem Diffeomorphismus $\Phi : M \rightarrow N$, $x \mapsto \xi = \Phi(x)$ konjugiert. Für alle $x \in M$ bzw. $\xi \in N$ sei $g^t x$ oder $h^t \xi$ bei $t = 0$ bzgl. t differenzierbar. Dann existieren die zugehörigen Phasengeschwindigkeitsfelder, und für diese gilt $w = \Phi_* v$, d. h. die assoziierten GDGn sind äquivalent.
- b) Existieren umgekehrt die Phasengeschwindigkeitsfelder der Phasenflüsse in a), und gilt für diese $w = \Phi_* v$, wobei v oder w C^1 -glatt ist, dann sind die Phasenflüsse $\{h^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ und $\{g^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ konjugiert unter Φ .

Beweis

- a) Mittels der Flusseigenschaft iii) und der Kettenregel folgt, dass sowohl $g^t x$ als auch $h^t \xi$ bzgl. t auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist. Somit gilt für alle $\xi \in N$

$$\begin{aligned} w(\xi) &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} h^t \xi = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} (\Phi \circ g^t \circ \Phi^{-1})(\xi) \\ &= J\Phi(\Phi^{-1}(\xi)) \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} g^t(\Phi^{-1}(\xi)) = J\Phi(\Phi^{-1}(\xi)) v(\Phi^{-1}(\xi)), \end{aligned}$$

also nach Definition: $w = \Phi_* v$.

- b) Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass w C^1 -glatt ist. Sonst ersetze man im Folgenden Φ durch Φ^{-1} . Somit definiert $\{h^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ nach dem Satz [Assoziierte GDG] die Fundamentallösung der zu w gehörenden GDG. Andererseits rechnet man unter Verwendung von $w = \Phi_* v$ direkt nach, dass $(\Phi \circ g^t \circ \Phi^{-1})(\xi_0)$, $t \in \mathbb{R}$, das zugehörige AWP mit Anfangsdaten $t = t_0 = 0$ und $\xi(0) = \xi_0$, $\xi_0 \in N$ beliebig, löst. In der Tat gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\Phi \circ g^t \circ \Phi^{-1})(\xi_0) &= \left. \frac{\partial}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} (\Phi \circ g^{t+\tau} \circ \Phi^{-1})(\xi_0) \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} (\Phi \circ g^\tau \circ \Phi^{-1} \circ \Phi \circ g^t \circ \Phi^{-1})(\xi) \\ &= (\Phi_* v)((\Phi \circ g^t \circ \Phi^{-1})(x_0)) = w((\Phi \circ g^t \circ \Phi^{-1})(\xi_0)) \end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit dieser Lösung impliziert $h^t = \Phi \circ g^t \circ \Phi^{-1}$. $\square$

Folgerung *Zwei Phasenflüsse, die bzgl. beider Argumente hinreichend glatt sind, sind konjugiert unter einem Diffeomorphismus Φ genau dann, wenn die assoziierten GDGn äquivalent sind.*

Der Äquivalenzbegriff für GDGn erzwingt die Voraussetzung dieser Folgerung, dass die Transformation Φ ein Diffeomorphismus ist. Ein bemerkenswertes Resultat ist in dem Zusammenhang der folgende Satz. Zum Beweis verweisen wir auf [14], [17], [18].

Satz (Hartman⁵-Grobman⁶) *Sei v ein C^1 -Vektorfeld und x_G ein hyperbolischer Gleichgewichtspunkt der zugehörigen GDG. Sei ferner $\{g^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ der Phasenfluss dieser GDG und $\{h^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ derjenige der um $x = x_G$ linearisierten GDG $\dot{\xi} = Jv(x_G)\xi$, $\xi = x - x_G$. Dann existiert eine offene Umgebung $M \subset \mathbb{R}^n$ von x_G und ein Homöomorphismus $\Phi : M \rightarrow \Phi(M) \subset \mathbb{R}^n$; $x \mapsto \xi = \Phi(x)$ mit $\Phi(x_G) = 0$, d. h. eine Transformation, die samt der Umkehrtransformation Φ^{-1} stetig ist, so dass $\{h^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ zu $\{g^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ bzgl. Φ konjugiert ist.*

Dabei ist Φ im Allgemeinen kein Diffeomorphismus. Daher sind die betreffenden GDGn im Allgemeinen nicht äquivalent. Äquivalenzresultate dazu findet man beispielsweise in [35]. Die (lokalen) Phasenportraits jener GDGn in M bzw. $\Phi(M)$ stimmen jedoch bis auf Transformation unter dem Homöomorphismus Φ überein. Insbesondere klassifizieren und bezeichnen wir daher hyperbolische Gleichgewichtspunkte x_G ebener, nicht-linearer GDGn entsprechend der Klassifikation des Gleichgewichtspunktes $\xi = 0$ ihrer Linearisierung um $x = x_G$. Wir sprechen auch im nicht-linearen Fall von (in)stabilen Knoten und Strudeln bzw. von Sattelpunkten. Die Begründung von Lyapunovs indirekter Methode zur Stabilitätsanalyse lässt sich mit dem Satz [Hartman-Grobman] im Fall hyperbolischer Gleichgewichtspunkte auf lineare GDGn zurückführen (siehe Übungsaufgabe 4.13).

Für nicht-hyperbolische Gleichgewichtspunkte gilt der Satz [Hartman-Grobman] in der obigen Form im Allgemeinen nicht, d. h. hier unterscheiden sich die lokalen Phasenportraits der nicht-linearen und der linearisierten GDG in der Regel qualitativ (vgl. Verallgemeinerung des Satzes [Hartman-Grobman], z. B. in [6]).

Dagegen sind autonome GDGn mit C^1 -Vektorfeldern nach dem Satz [Begradigungssatz, autonomer Fall] außerhalb ihrer Gleichgewichtspunkte lokal äquivalent zur GDG $\dot{\xi} = e_1$, wobei $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$ konstant ist. Die GDG $\dot{\xi} = e_1$ ist eine lokale Normalform. In den so genannten Flussschachtelkoordinaten ξ wird der Phasenfluss also begradigt. Orbits sind bzgl. dieser Koordinaten geradlinig und parallel zum Vektor e_1 .

⁵ Philip Hartman (1915–2015); Baltimore, New York

⁶ David Grobman (geb. 1922); Moskau

2.6 Übungsaufgaben

2.1 Man skizziere alle Orbits der folgenden GDGn ($t, x \in \mathbb{R}$):

- a) $\dot{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \cos x$
- b) $\dot{x} = 4 \cos x \sin x$
- c) $\dot{x} = (x^2 - 3x + 2)(x^2 - 2x - 3)$
- d) $\dot{x} = x^3 - 7x^2 + 12x$
- e) $\dot{x} = x^4 - 4x^2 - 5$

2.2 Bestimmen Sie sämtliche Orbits und skizzieren Sie das Phasenportrait für die folgenden Gleichungssysteme ($x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}; k \in \mathbb{R}$ ein Parameter):

- a) $\dot{x}_1 = -x_1$
 $\dot{x}_2 = kx_2$
- b) $\dot{x}_1 = x_1 + x_2$
 $\dot{x}_2 = x_2$
- c) $\dot{x}_1 = x_2$
 $\dot{x}_2 = -x_1$
 $\dot{x}_3 = -x_3$

Für welche dieser Gleichungssysteme ist der Gleichgewichtspunkt im Koordinatenursprung (asymptotisch) stabil, für welche ist er instabil? Welchen Typs ist dieser Gleichgewichtspunkt für $k \neq 0$ im Fall a)?

2.3 (**Kanonische**) **Hamiltonsche**⁷ Systeme im $\mathbb{R}^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, sind GDGn 1. Ordnung folgender Form ($p, q \in \mathbb{R}^n$):

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p).\end{aligned}$$

Sie bilden eine bedeutende Klasse konservativer Systeme von GDGn. Dabei ist $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ die zugehörige **Hamilton-Funktion**. In der Mechanik bezeichnen die Komponenten von q (verallgemeinerte) Konfigurationsvariablen und die Komponenten von p entsprechende Impulsvariablen. Die Hamilton-Funktion stellt die Gesamtenergie eines mechanischen Systems dar und ist im einfachsten Fall als Summe $H = T + U$ der kinetischen Energie $T = T(q, p)$ und der potenziellen Energie $U = U(q)$ definiert. Im Folgenden sei H 2-fach stetig differenzierbar. Man zeige:

- a) H ist ein erstes Integral des entsprechenden Hamiltonschen Systems von GDGn.
- b) Im Fall $n = 1$ ist ein Hamiltonsches System von GDGn vollständig integrierbar.
- c) Man skizziere das Phasenportrait des Hamiltonschen Systems zu folgender Hamilton-Funktion ($p, q \in \mathbb{R}$):

$$H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 - \cos q$$

Dieses beschreibt die Bewegungen des ungedämpften mathematischen Pendels in dimensionslosen Variablen (vgl. Beispiel im Abschn. 5.1). Dabei bezeichnet $q = \varphi$ den Auslenkungswinkel des Pendels aus der in Richtung der Gravitationskraft weisenden Ruhelage und $p = \omega$ die zugehörige Impulsvariable.

⁷ William Rowan Hamilton (1805–1865); Dublin

- d) Besitzt das Hamiltonsche System zur Hamilton-Funktion aus Aufgabenteil c) Gleichgewichtspunkte, periodische Orbits oder homo- und heterokline Orbits? Man begründe die Antwort.

2.4 Gegeben sei das System von Differentialgleichungen ($t \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)\end{aligned}$$

- a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung und skizzieren Sie das Phasenportrait. Welchen Typs ist der Gleichgewichtspunkt im Koordinatenursprung?
Hinweis: Schreiben Sie das gegebene Gleichungssystem in Polarkoordinaten r, θ gemäß $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$.
- b) Seien $x = \varphi(t)$ und $x = \hat{\varphi}(t)$ zwei Lösungen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Sind dann immer auch $x = \varphi(t) + \hat{\varphi}(t)$ und $x = \lambda\varphi(t)$ Lösungen? Begründen Sie Ihre Antwort.
- 2.5 a) Die Gleichungen $\dot{x} = v(x)$ und $\dot{x} = \tilde{v}(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, seien äquivalent unter dem Diffeomorphismus $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, v oder $\tilde{v}$ sei C^1 -glatt.
 Zeigen Sie, dass Φ Orbits der einen Gleichung umkehrbar eindeutig auf Orbits der anderen Gleichung abbildet. Insbesondere gehen dabei Gleichgewichtspunkte in Gleichgewichtspunkte und periodische Orbits in periodische Orbits über.
- b) Man zeige: Ein Gleichgewichtspunkt x_G der einen Gleichung ist genau dann stabil (asymptotisch stabil, instabil), wenn dies für den Bildgleichgewichtspunkt $\Phi(x_G)$ bezüglich der anderen Gleichung der Fall ist.
- 2.6 a) Sei A eine reelle symmetrische (n, n) -Matrix. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der linearen Gleichung $\dot{x} = Ax$, $x \in \mathbb{R}^n$, in Abhängigkeit von den Eigenwerten und zugehörigen Eigenvektoren von A .
- b) Sei A eine reelle symmetrische (n, n) -Matrix derart, dass $\lambda \leq 0$ für jeden Eigenwert λ von A gilt. Zeigen Sie mithilfe der direkten Methode von Lyapunov, dass $0 \in \mathbb{R}^n$ ein stabiler Gleichgewichtspunkt der Differentialgleichung

$$\dot{x} = Ax$$

ist.

Hinweis: Die Matrix A lässt sich durch eine lineare Transformation des $\mathbb{R}^n$ diagonalisieren.

2.7 Ein nichtlinearer Oszillator werde beschrieben durch das System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -cx_2 - ax_1 - bx_1^3,\end{aligned}$$

wobei $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ und $c \geq 0$.

- a) Zeigen Sie, dass $x_G := (0, 0)^T$ der einzige Gleichgewichtspunkt ist.
- b) Zeigen Sie, dass der Gleichgewichtspunkt x_G für $c = 0$ stabil und für $c > 0$ asymptotisch stabil ist.
- c) Zeigen Sie, dass im Fall $c = 0$ der Gleichgewichtspunkt x_G nicht asymptotisch stabil ist.
- d) Welchen Typs ist der Gleichgewichtspunkt x_G in Abhängigkeit von a und b für $c > 0$?
- e) Skizzieren Sie das Phasenportrait des nichtlinearen Oszillators im Fall $a = 1, b = 1$ und $c = 0$.

Hinweis: Verwenden Sie, dass die Funktion $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $H(x_1, x_2) := \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{a}{2}x_1^2 + \frac{b}{4}x_1^4$ im Fall $c > 0$ für $x_2 \neq 0$ strikt monoton fallend ist entlang von Lösungen und dass gilt

$H(x_G) = 0$, $H(x_1, x_2) > 0$ für $(x_1, x_2)^T \neq x_G$. Beachten Sie weiterhin, dass im Fall $c = 0$ die Funktion H konstant ist entlang von Lösungen. H lässt sich in diesem Fall physikalisch als Gesamtenergie des Oszillators interpretieren.

2.8 Das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$v(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1(7 - x_1^2 - x_2^2) + 3x_2 \\ -3x_1 + x_2(7 - x_1^2 - x_2^2) \\ x_3^2 \end{pmatrix}.$$

Sei

$$U = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r > 0, 0 < \theta < 2\pi, z \in \mathbb{R}\},$$

und sei die Abbildung $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\Phi(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z).$$

- Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Phi : U \rightarrow \Phi(U)$ ein Diffeomorphismus ist.
- Bestimmen Sie das Bild $\tilde{v}$ des Vektorfeldes $v|_{\Phi(U)}$ unter dem Diffeomorphismus Φ^{-1} .
- Bestimmen Sie sämtliche Gleichgewichtspunkte einschließlich der Stabilitätseigenschaften und sämtliche periodische Orbits der zu v gehörenden gewöhnlichen Differentialgleichung 1. Ordnung im Phasenraum $\mathbb{R}^3$.

Hinweis: Man betrachte die zu $\tilde{v}$ gehörende GDG 1. Ordnung im Phasenraum U .

- Skizzieren Sie das Phasenportrait der zu v gehörenden GDG 1. Ordnung.

2.9 a) Gegeben sei das Gleichungssystem in kartesischen Koordinaten im $\mathbb{R}^3$:

$$\dot{x}_1 = -x_1 - x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2$$

$$\dot{x}_3 = -x_3$$

Man transformiere dieses System auf Zylinderkoordinaten (r, θ, z) , $r > 0$, $0 < \theta < 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$, gegeben durch $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$, $x_3 = z$ und benutze das resultierende System, um das Phasenportrait des ursprünglichen Gleichungssystems zu skizzieren.

- Man bestimme alle Gleichgewichtspunkte des obigen Gleichungssystems und deren Stabilitätseigenschaften.

2.10 Gegeben sei das Gleichungssystem ($x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}$):

$$\dot{x}_1 = -x_1^7 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2$$

- Bestimmen Sie alle Gleichgewichtspunkte.
- Zeigen Sie, dass der Gleichgewichtspunkt $(0, 0)$ stabil ist.
- Ist der Gleichgewichtspunkt $(0, 0)$ auch asymptotisch stabil? Begründen Sie Ihre Antwort!

Hinweis zu b) und c): Bestimmen Sie $c_1, c_2 > 0$ so, dass die Funktion $f(x_1, x_2) = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2$ entlang von Lösungen des Gleichungssystems monoton fallend ist.

2.11 a) Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems $(t, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R})$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(1 - x_1^2 - x_3^2) - x_3 \\ \dot{x}_2 &= \cos t + 4 \sin t \\ \dot{x}_3 &= x_1 + x_3(1 - x_1^2 - x_3^2).\end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie alle periodischen Lösungen des obigen Gleichungssystems. (Begründen Sie insbesondere, warum es keine weiteren als die von Ihnen angegebenen gibt.)

2.12 Gegeben sei das System von Differentialgleichungen $(t, x_1, x_2 \in \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - \frac{1}{8} \sin(4x_1)\end{aligned} \quad (\star)$$

- a) Zeigen Sie, dass $x_G := (0, 0)^T$ ein Gleichgewichtspunkt von $(\star)$ ist.
 b) Gibt es weitere Gleichgewichtspunkte von $(\star)$? Begründen Sie Ihre Antwort.
 c) Zeigen Sie, dass die Funktion $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$H(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{32} \cos(4x_1),$$

konstant ist entlang der Lösungen von $(\star)$.

- d) Zeigen Sie unter Verwendung der direkten Methode von Lyapunov, dass der Gleichgewichtspunkt $x_G = (0, 0)^T$ von $(\star)$ stabil ist. Ist er auch asymptotisch stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

2.13* a) Man zeige: Sei $V \subset M$ eine kompakte Teilmenge des Phasenraums M der GDG (2.3) und $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Funktion, $\dot{F}(x) = \langle \nabla F(x), v(x) \rangle \leq 0$ für alle $x \in V$. Dann gilt für alle $x_0 \in V : \varphi(t; x_0) \notin V$ für ein $t > 0$, oder

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\varphi(t; x_0), S) = 0$$

mit $S = \{x \in V \mid \dot{F}(x) = 0\}$, wobei $\varphi(t; x_0)$ die Fundamentallösung der GDG (2.3) ist.

- b) Man beweise die folgende Version des **Invarianzprinzips von La Salle**⁸ (vgl. [25]): Zusätzlich zu den Voraussetzungen des Aufgabenteils a) gelte $\varphi(t; x_0) \in V$ für alle $x_0 \in V$ und $t \geq 0$, d. h. V ist eine **positiv invariante Teilmenge** des Phasenraums der GDG (2.3). Mit N bezeichnen wir die Menge aller ω -**Limespunkte** zu den Punkten $x_0 \in V$, d. h. die Menge der Punkte $x^* = x^*(x_0) \in V$, so dass ein $x_0 \in V$ sowie eine Folge $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ existieren mit $t_k \rightarrow \infty$ und $\varphi(t_k; x_0) \rightarrow x^*$ für $k \rightarrow \infty$. Dann ist N eine invariante Teilmenge des Phasenraums der GDG (2.3), also $\varphi(t; N) = N$ für alle $t \in \mathbb{R}$, und es gilt $N \subset S$ sowie

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\varphi(t; x_0), N) = 0$$

für alle $x_0 \in V$.

- c) Zusätzlich zu den Voraussetzungen des Aufgabenteils b) gelte $\overset{\circ}{V} \neq \emptyset$ und die maximale (im Sinne der Mengeninklusion), in S enthaltene invariante Teilmenge des Phasenraums

⁸ Joseph Pierre (Joe) La Salle (1916–1983); Notre Dame, Baltimore, Providence

der GDG (2.3) umfasse außer einem Gleichgewichtspunkt (bzw. einem periodischen Orbit) $x_G \in \mathring{V}$ (bzw. $\Gamma_{x_p} \subset \mathring{V}$) der GDG (2.3) keinen weiteren Punkt. Dann ist x_G (bzw. Γ_{x_p}) asymptotisch stabil (bzw. orbital asymptotisch stabil).

Hinweis: Diese Aussagen verallgemeinern Lyapunovs direkte Methode zum Nachweis der asymptotischen Stabilität von Gleichgewichtspunkten und können mithilfe ähnlicher Argumente wie der Satz [Lyapunovs direkte Methode] bewiesen werden (siehe Anhang). Zum Beweis der Mengeninklusion $N \subset S$ sowie für Aufgabenteil c) verwende man die grundlegende Evolutionseigenschaft der Fundamentallösung $\varphi(t; x_0)$.

- 2.14 Man zeige: Sei $F : Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine 2-fach stetig differenzierbare Lyapunov-Funktion zum Gleichgewichtspunkt $x_G \in Q$ der GDG (2.3). Zusätzlich gelte für alle $x \in Q \setminus \{x_G\}$ mit $\dot{F}(x) = 0$:

$$\ddot{F}(x) = \nabla F(x)^T (Jv(x))v(x) + v(x)^T (HF(x))v(x) < 0,$$

wobei

$$HF(x) = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_k}(x) \right)_{1 \leq j, k \leq n}$$

die **Hesse⁹-Matrix** von F an der Stelle $x \in Q$ bezeichne. Dann ist x_G asymptotisch stabil.

Hinweis: $\ddot{F}(x)$ ist die Ableitung 2. Ordnung von $F(\varphi(t; x))$ bzgl. t an der Stelle $t = 0$, wobei $\varphi(t; x)$ die Fundamentallösung der GDG (2.3) ist.

- 2.15 a) Man zeige: Ein Gleichgewichtspunkt $x_G \in M$ der GDG (2.3) ist genau dann (asymptotisch) stabil im Sinne von Lyapunov, wenn der entsprechende Orbit $\Gamma_{x_G} = \{x_G\}$ orbital (asymptotisch) stabil ist.
- b)* Eine zur Aussage im Aufgabenteil a) analoge Aussage gilt für sonstige Typen von Orbits i. Allg. nicht. Dazu zeige man für die Pendelgleichung aus Übungsaufgabe 2.3c): Die Periode der periodischen Orbits (Pendelschwingungen) nahe der Ruhelage bei $q = p = 0$ variiert mit dem Abstand zu dieser Ruhelage im Phasenraum $\mathbb{R}^2$. Man schließe daraus, dass es für einen solchen Orbit $\Gamma_{\binom{q^*}{p^*}}$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass für alle $\delta > 0$ ein $\binom{q_0}{p_0} \in \mathbb{R}^2$ und ein $t \geq 0$ existieren mit $\|\binom{q_0}{p_0} - \binom{q^*}{p^*}\| < \delta$ sowie $\|\varphi(t; \binom{q_0}{p_0}) - \varphi(t; \binom{q^*}{p^*})\| \geq \varepsilon$, obwohl jene periodischen Orbits orbital stabil sind.
- c) Man zeige: Sei $\Gamma_p : x = \varphi(t; x_p), 0 \leq t \leq T$, ein T -periodischer Orbit der GDG $\dot{x} = v(x)$ in (2.3). Dann ist $v(x_p)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 der Jacobi-Matrix $J_x \varphi(T; x_p)$ bzgl. der Variablen x .

⁹ Ludwig Otto Hesse (1811–1874); Königsberg, Halle, Heidelberg, München

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Eine Symbiose von klassischer und qualitativer Theorie

Scheurle, J.

2017, VII, 125 S. 11 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-319-55603-1

A product of Birkhäuser Basel