
Vorwort

Differentialgleichungen wurden von Newton (1642–1727) eingeführt. Nach dessen Vorstellung drücken Differentialgleichungen die Gesetze der Natur aus. Ihre Lösungen sind Funktionen, welche Phänomene bzw. Prozesse der Natur beschreiben, abhängig von zusätzlichen Bedingungen wie Anfangs- oder Randbedingungen. Spätestens mit den klassischen Arbeiten von J. Bernoulli (1667–1748), Euler (1707–1783), d’Alembert (1717–1783) und Lagrange (1736–1813) sowie später von Laplace (1749–1827), Gauß (1777–1855), Jacobi (1804–1851), Hamilton (1805–1865) und Liouville (1809–1892) etablierte sich die Verwendung von Differentialgleichungen als grundlegendes mathematisches Mittel zur Formulierung von Gesetzen der Physik und insbesondere der Mechanik (vgl. [5], [26]). Inzwischen spielen Differentialgleichungen in vielerlei Anwendungsgebieten der Mathematik eine bedeutende Rolle (siehe z. B. [3], [9], [10]). Dies gilt insbesondere für gewöhnliche Differentialgleichungen (GDGn), deren Lösungen Funktionen einer skalaren Variablen sind, im Kontext von Anwendungen häufig der Zeit- bzw. einer Ortsvariablen.

Mathematisch war das Bestreben lange Zeit, für spezielle Typen von GDGn Verfahren zur expliziten analytischen Darstellung der Lösungen bzw. von Approximationen der Lösungen – nach Möglichkeit in geschlossener Form – zu entwickeln. Ferner wurden allgemeine Existenz- und Eindeutigkeitssätze für Lösungen formuliert und bewiesen. Von den zahlreichen klassischen Lehrbüchern über GDGn sei in diesem Zusammenhang insbesondere auf die Bücher [1], [8], [9], [12], [19], [21], [23], [24] und [37] hingewiesen.

Eine neue Epoche der mathematischen Behandlung von GDGn begann mit Poincaré (1854–1912). Er begründete mit einer Reihe von Arbeiten ([32], [33], [34]) die so genannte *qualitative Theorie von GDGn* und somit die *Theorie dynamischer Systeme* [7]. Hierbei stehen geometrische Eigenschaften der Lösungen bzw. von Lösungsmengen im Fokus der Betrachtung. Diese Entwicklung wurde während der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts insbesondere durch russische Mathematiker wie A. M. Lyapunov (1857–1918), der die Stabilitätstheorie für Bewegungen begründete, wesentlich vorangetrieben (vgl. [27], [29], [31]). Der eigentliche Durchbruch setzte jedoch erst in den 1950er Jahren ein, eng verbunden mit bahnbrechenden Arbeiten u. a. von Kolmogorov (1903–1987), Arnold (1937–2010), Moser (1928–1999), Smale (geb. 1930) und Takens (1940–2010). Diese Entwicklung fand allerdings bislang kaum Eingang in die einführende Lehrbuchliteratur.

Das vorliegende Lehrbuch versucht, diese Lücke im Bereich der Mathematik-Ausbildung im Bachelor- bzw. zu Beginn des Masterstudiums zu schließen, ohne dabei den klassischen Stoff zu vernachlässigen. Es behandelt auf mathematisch sehr gründliche Weise die wichtigsten analytischen Methoden und Resultate der klassischen Theorie für Anfangswertprobleme zu GDGn (Kap. 1, 4 und 5), inklusive von Sätzen zur Existenz, Eindeutigkeit und Fortsetzbarkeit von Lösungen sowie zur stetigen, Lipschitz-stetigen und differenzierbaren Abhängigkeit der Lösungen von den Anfangsdaten und von den Parametern (Kap. 3). Auch ein Einblick in die klassische Lösungstheorie für Rand- und Eigenwertprobleme zu GDGn wird gegeben (Kap. 5). Darüber hinaus werden grundlegende Elemente der qualitativen Theorie eingeführt und ausführlich besprochen (Kap. 2). Damit bietet das Buch insbesondere einen idealen Einstieg in die Theorie dynamischer Systeme. Thematisch verwandte Bücher ([3], [4], [6], [15], [16], [17], [20], [28], [36]) dringen wesentlich tiefer in die qualitative Theorie von GDGn ein als dies im Rahmen einer einsemestrigen Vorlesung im Bachelorbereich möglich ist.

Dem Buch liegt eine Vorlesung über GDGn zugrunde, die an der TU München regelmäßig für Studierende im 4. Fachsemester der Bachelorstudiengänge Mathematik und Physik gehalten wird. Es wird lediglich Vertrautheit mit dem an Universitäten in Grundvorlesungen üblicherweise gelehrteten Stoff der Analysis und der Linearen Algebra vorausgesetzt.

Die Anordnung des Stoffes ist so gewählt, dass das Lehrbuch in Vorlesungen unterschiedlichen zeitlichen Umfangs und unterschiedlicher mathematischer Tiefe einsetzbar ist. In den Kap. 1, 4 und 5 liegt der Fokus auf konstruktiven analytischen Lösungsverfahren, wobei stets ein Bezug zu relevanten theoretischen Grundlagen aus den Kap. 2 und 3 hergestellt wird. Numerische Methoden werden nicht behandelt. Die Kenntnis des Inhalts von Kap. 3 sowie der relativ technischen Beweise einiger Sätze, welche in den Anhang (Kap. 6) ausgelagert sind, ist für ein angemessenes Verständnis des übrigen Stoffs nicht zwingend erforderlich. Daher kann beides je nach Format einer Vorlesung auch vollständig weggelassen oder abschnittsweise in die Behandlung des übrigen Stoffs integriert werden. Zahlreiche, detailliert ausgearbeitete Beispiele sowie eine umfangreiche Auswahl an Übungsaufgaben zu jedem Kapitel dienen einem besseren Verständnis bzw. zur Ergänzung des behandelten Stoffs. Bei den mit einem Stern * gekennzeichneten Übungsaufgaben ist der Schwierigkeitsgrad höher einzuschätzen als bei den übrigen. Wichtige Bezeichnungen und Begriffe sind an den Stellen im Buch, wo sie eingeführt bzw. erklärt werden, fett gedruckt. Als bekannt vorausgesetzte Sätze, die im Buch nicht formuliert sind, werden in kursiver Schrift zitiert.

Ich danke meiner Ehefrau Karin für die unschätzbare Hilfe, das Manuskript für das Buch zu $\text{\TeX}$ en. Hans-Peter Kruse habe ich die Auswahl und Formulierung vieler Übungsaufgaben zu verdanken. Bei den Herausgebern der Lehrbuchreihe *Mathematik Kompakt*, allen voran bei meinem Kollegen Martin Brokate, und beim Birkhäuser-Verlag bedanke ich mich vielmals für die Anregung bzw. für die Ermöglichung, dieses Buch zu schreiben.

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Eine Symbiose von klassischer und qualitativer Theorie

Scheurle, J.

2017, VII, 125 S. 11 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-319-55603-1

A product of Birkhäuser Basel