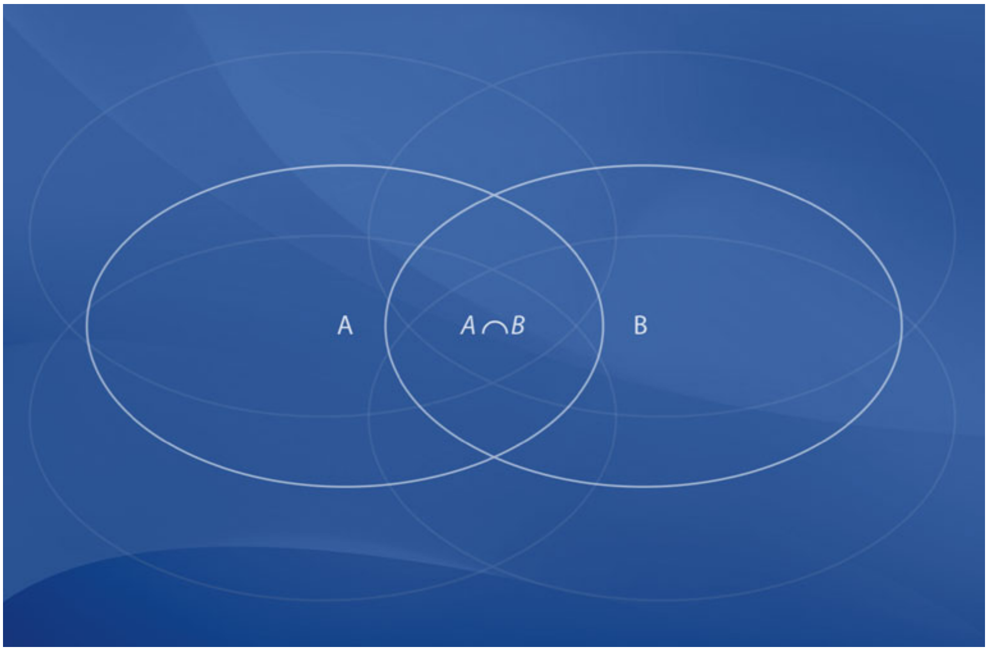
# Rechnen mit reellen Zahlen

# 2









B. Haack et al., *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler*, DOI 10.1007/978-3-642-55175-8_2

## Mathematischer Exkurs 2.1: Worum geht es hier?

Was verbinden Sie mit dem Wort „Mathematik“? Da fällt – unabhängig davon, ob man es in der Schule mochte oder nicht – jedem von uns bestimmt vieles ein. Zwei mögliche Beispiele könnten vielleicht die folgenden sein:

„Mathe? Das ist so schön ‚logisch‘: Entweder die Rechnung ist richtig oder falsch!“ Oder: „Mathematik? Da rechnet man doch die ganze Zeit mit Zahlen!“

Schon allein diese beiden Aussagen enthalten den Kern dessen, was in diesem einführenden Teil des Buches beschrieben wird:

- Mathematik hat etwas mit **Logik** zu tun: Wir werden hier in kurzer und knapper Form lernen, was wir unter Logik in diesem Fall verstehen und wofür sie gut ist.
- Mathematik hat etwas mit **Zahlen** zu tun: Was sind das eigentlich für komische Gebilde, die Zahlen? Welche unterschiedlichen Arten gibt es davon, was kann man mit ihnen machen bzw. wie geht man mit ihnen um?
- Mathematik hat etwas mit **Rechnen** zu tun: Zahlen können verknüpft werden, d. h., man kann mit ihnen in gewisser Weise arbeiten. Dieses Arbeiten ist das Rechnen, das wir schon von der Schule kennen und das nach bestimmten Regeln erfolgt! An diese müssen wir uns halten, ansonsten könnte es – speziell bei den praktischen Anwendungen – zu bösen Überraschungen kommen. Somit werden wir uns mit genau diesen Regeln befassen und sie üben.

## Mathematischer Exkurs 2.2: Was können Sie nach Abschluss dieses Kapitels?

Diese Frage hängt natürlich auch davon ab, wie viel Zeit man zum Üben aufwenden will, aber vorausgesetzt, Sie befassen sich ernsthaft mit dem Stoff, dann …

… wissen Sie, welche Logik hinter der Mathematik prinzipiell steht, und kennen die wichtigsten Eigenschaften von Aussagen und deren Verknüpfungen,

… können Sie erklären, was eine Menge im mathematischen Sinne ist, und wie Mengen dargestellt und untereinander verknüpft werden können,

… wissen Sie, was die sogenannten reellen Zahlen sind, welche unterschiedlichen Zahlentypen darin enthalten und welches die wichtigsten Gesetze bzw. Regeln für sie sind,

… können Sie die genannten Regeln anwenden.

Vielleicht hört sich das für den einen oder anderen Leser (bzw. die eine oder andere Leserin) sehr einfach an – so ganz nach dem Motto: „Hatte ich schon alles in der Schule – was soll das hier?“ Aber auch hier zeigt die Erfahrung aus jahrelanger Vorlesungspraxis, dass durchaus Wiederholungsbedarf besteht. Somit hat dieser Einführungsteil in jedem Fall seine Berechtigung.

## Mathematischer Exkurs 2.3: Müssen Sie dieses Kapitel überhaupt durcharbeiten?

Wenn Sie die folgenden Fragen bzw. Aufgaben sicher und richtig beantworten bzw. lösen können, beherrschen Sie die wesentlichen Inhalte dieses Kapitels und sind gut gewappnet für das, was anschließend kommt. Alle hier gestellten Aufgaben werden an den passenden Stellen innerhalb dieses Kapitels aufgegriffen und vorgerechnet, sodass stets eine Kontrollmöglichkeit besteht.

2.1 Es seien die folgenden Aussagen gegeben:

$p$: Es regnet.
$q$: Die Straße ist nass.
$r$: Ich habe sechs Richtige im Lotto.
$s$: Ich kaufe mir einen Sportwagen.

a. Formulieren Sie für jede Aussage die jeweilige Negation.
b. Welche sinnvollen (!) Aussagenverknüpfungen können mit $p$, $q$, $r$, $s$ und deren Negationen gebildet werden? Formulieren Sie diese.

2.2 Kann eine der beiden Relationen „$\subset$“ oder „$=$“ auf die jeweiligen Mengen angewendet werden? Wenn ja welche?

a. $M = \{1, 3, 5, 7\}$ und $N = \{7, 5, 3, 1\}$
b. $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ und $B = \{b, f\}$
c. $C = \{\mathit{Schmidt}, \mathit{Meier}, \mathit{Müller}\}$, $D = \{\mathit{Anne}, \mathit{Fred}, \mathit{Tom}\}$.

2.3 Bilden Sie anhand der Mengen in Aufgabe 2.2c das Kreuzprodukt $D \times C$. Wie kann man die Ergebnismenge in Worten interpretieren?

2.4 Es seien die Mengen $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{4, 5, 6\}$ gegeben. Berechnen Sie $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \cup B \cup C$.

2.5 Vereinfachen Sie die folgenden algebraischen Summen:
a. $a + b - 2a - 5c + 7b - c$
b. $2(2y - z) + (5y - z) - (2z + 7y)$
c. $4(y - z) + (5(y - z)) - 2(z + 7y)$
d. $-(x + 3 - y) - (2x + y)$

2.6 Berechnen Sie das Doppelte von $-5(2a + 3b - 4c)$

2.7 Multiplizieren Sie:
a. $(x + 3)(x + 8)$
b. $(3a + 2b)(9a - 2b + 3c)$

2.8 Wenden Sie bei der Berechnung der folgenden Ausdrücke eine der drei binomischen Formeln an:
a. $(5 - 3x)^2$
b. $(2y + 3)^2$
c. $(x - 3)(x + 3)$
d. $(9z - 11x)(9z + 11x)$
e. $(x + 3)^2 - (x - 1)^2$
f. $(a - b - c)^2$

2.9 Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke als Produkte („Faktorisieren"):
a. $\left(x^2 - y^2\right)$
b. $4 - 9x^2z^2$
c. $2x^2 - 18$

2.10 Vereinfachen Sie:
a. $(54x + 24y) : 6$
b. $\frac{(8uv + 4u^2 - 12uw)}{4u}$

2.11 Berechnen Sie die folgenden Potenzen bzw. vereinfachen/kürzen Sie:
a. $10^4 \cdot 10^3$
b. $\left(\frac{5}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2$
c. $x^5 \left(5x^4 - 2x^3\right)$
d. $\frac{a^{2n} - a^n}{a^{n-1} - a^n}$

2.12 Schreiben Sie den Bruch als Potenz mit negativem ganzem Exponenten:
a. $\frac{1}{9}$
b. $\frac{7}{100}$

2.13 In seinem „Abacus" hat Leonardo von Pisa (um 1220) folgende Gleichungen aufgestellt. Bitte prüfen Sie diese nach:
a. $\frac{20 - \sqrt{96}}{\sqrt{8}} = \sqrt{50} - \sqrt{12}$
b. $\frac{4\sqrt{200}}{3 + \sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{200}\left(3 - \sqrt{2}\right)}{7}$

2.14 Schreiben Sie als Wurzel: $3^{\frac{1}{2}}$, $b^{\frac{2}{5}}$, $a^{\frac{3}{4}}$

2.15 Schreiben Sie als Potenz: $\sqrt[4]{6^4}$, $\sqrt[3]{x^5}$, $\sqrt[6]{x^2}$

2.16 Bestimmen Sie die folgenden Logarithmen: $\log_2 64$, $\log_{10} 1000$, $\log_3 81$

Kapitel 2

## 2.1 Welche sind die logischen Grundlagen in der Mathematik?

Erinnern wir uns an den Satz „Mathe? Das ist so schön ‚logisch'!" aus Exkurs 2.1 und versuchen wir, diesen einmal ein wenig zu konkretisieren und zu erläutern. Was bedeutet es eigentlich, wenn etwas vermeintlich logisch ist, bzw.: Was ist **Logik**? Diese Frage ist nicht leicht zu beantworten, haben sich doch schon seit der Antike viele Philosophen damit beschäftigt. Spontan bzw. intuitiv ist man geneigt zu sagen, dass etwas logisch ist, wenn es schlüssig oder nachvollziehbar erscheint. Das heutzutage gerne zurate gezogene Onlinelexikon Wikipedia besagt u. a., dass man „... unter **Logik** (von altgriechisch λογικὴ τέχνη *logiké téchnē* ‚denkende Kunst', ‚Vorgehensweise') [...] die Lehre des vernünftigen Schlussfolgerns" (Wikipedia 2013) versteht. Nun wissen wir alle, dass Vernunft etwas ist, was abhängig von der Sichtweise durchaus unterschiedliche Ausprägungen haben kann und somit stark von den agierenden Personen abhängt.

Glücklicherweise müssen wir diese Diskussion hier nicht weiter vertiefen, sondern können uns in die – zumindest in dieser Hinsicht – etwas einfachere Welt der Mathematik zurückziehen. In dieser Welt ist es insofern leichter, als Sachverhalte lediglich in zwei Kategorien eingeteilt werden: entweder in die „Kategorie wahr" oder in die „Kategorie falsch". Diese Tatsache bewirkt, dass wir in der Mathematik von der „zweiwertigen Logik" sprechen: Es gibt in dieser mathematischen Welt nur wahr oder falsch – und nichts dazwischen.

Nun braucht es eigentlich nur noch eine Konkretisierung dessen, was wir in der Mathematik als wahr oder falsch charakterisieren möchten. Hierfür benötigen wir die sogenannten „Aussagen", die wir wie folgt definieren:

**Merksatz**

Unter Aussagen verstehen wir Sätze, die entweder wahr oder falsch sind.

Anhand folgender Beispiele wird deutlich, was eine Aussage im mathematischen Sinne ist bzw. was gegebenenfalls keine Aussage ist:

**Beispiel**

- „Die Zugspitze ist ein Berg in Schleswig-Holstein" ist eine falsche Aussage.
- „Diese weiße Lilie" ist keine Aussage, aber:
- „Diese Lilie ist weiß" ist eine Aussage. Ob sie wahr ist oder nicht, kann natürlich nur entschieden werden, wenn wir die Blume sehen.
- „25 ist eine ungerade Zahl" ist eine (wahre) Aussage. ◀

Um mit Aussagen besser umgehen zu können, werden Sie mit „Namen" versehen. Diese Namen sind oftmals kleine lateinische Buchstaben – gerne $p$, $q$, $r$ etc. –, sodass die Aussagen aus dem vorhergehenden Beispiel folgendermaßen geschrieben werden können:

**Beispiel**

- $p$: Die Zugspitze ist ein Berg in Schleswig-Holstein.
- $q$: Diese Lilie ist weiß.
- $r$: 25 ist eine ungerade Zahl. ◀

Da Mathematiker gerne Dinge und Sachverhalte kurz und knapp ausdrücken, gibt es auch für die Beschreibung, ob eine Aussage wahr oder falsch ist, eine Vereinbarung.

**Merksatz**

Jeder Aussage $p$ wird ihr zugehöriger Wahrheitswert $w(p)$ zugeordnet. Dieser kann die beiden Zustände W (für „wahr") und F (für „falsch") annehmen.

Betrachten wir z. B. die Aussage $p$: Ein Quadrat hat fünf Kanten. Diese Aussage ist falsch, und wir ordnen ihr den Wahrheitswert $w(p) = \text{F}$ zu. Wenden wir dieses Vorgehen auf das vorhergehende Beispiel an, so erhalten wir folgende Ergebnisse:

**Beispiel**

- Für die Aussage $p$: Die Zugspitze ist ein Berg in Schleswig Holstein, gilt: $w(p) = \text{F}$.
- Für die Aussage $r$: 25 ist eine ungerade Zahl, gilt $w(r) = \text{W}$. ◀

**Zusammenfassung**

- In der Mathematik werden sogenannte **Aussagen** betrachtet. Dabei handelt es sich um Sätze, die entweder **wahr** oder **falsch** sind („zweiwertige Logik").
- Aussagen werden mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet.
- Aussagen kann ihr zugehöriger **Wahrheitswert** zugeordnet werden. Dieser kann entweder W (für wahr) oder F (für falsch) sein.

**Was macht man nun mit diesen Aussagen, und wofür sind sie gut?**

Diese Aussagen und das, was man mit ihnen praktisch machen kann, sind eine fundamentale Voraussetzung jeglicher mathematischer Überlegungen und Beweise. Auch wenn dieses Buch gänzlich ohne klassische Beweise auskommen wird, so hilft die Beschäftigung mit den Grundlagen der Aussagenlogik sehr, um das mathematische Denken zu üben bzw. richtig zu trainieren. Darüber hinaus werden wir Parallelen zu den Mengen bzw. deren Darstellung und Verknüpfungen kennenlernen, und schlussendlich soll nicht unerwähnt bleiben, dass diese zweiwertige Logik die Grundlage in der Computerentwicklung darstellt (diese rechnet intern auch nur mit zwei Zahlen bzw. Zuständen: mit 0 und 1!).

So gesehen gibt es Gründe genug, um mit den **Verknüpfungen von Aussagen** weiterzumachen. Hierfür betrachten wir nun die beiden folgenden Aussagen $p$ und $q$:

$p$: Die Zahl 4 ist eine gerade Zahl.

$q$: Die Zahl 4 ist restlos durch 3 teilbar.

Jetzt fügen wir diese beiden Aussagen zusammen, indem wir beide Aussagen mit dem Wort „und“ verknüpfen. Dabei erhalten wir eine neue Aussage, die wir mit $r$ bezeichnen:

$r$: Die Zahl 4 ist eine gerade Zahl **und** sie ist restlos durch 3 teilbar.

Diese Art der Verknüpfung gibt Anlass für die folgende Definition:

**Merksatz**

Die Verknüpfung zweier Aussagen $p$ und $q$ mit dem Wort „und“ nennt man **Konjunktion**. Die symbolische Schreibweise lautet: $p \bigwedge q$, und man spricht sie als „$p$ und $q$“.

Jetzt, da wir wissen, was eine Konjunktion $r = p \bigwedge q$ ist, können wir uns der Frage nach dem Wahrheitswert von $r$ widmen. Im vorliegenden Beispiel ist durch die Konjunktion die Aussage „Die Zahl 4 ist eine gerade Zahl und sie ist restlos durch 3 teilbar.“ entstanden. Dies ist sicherlich falsch, d. h. $w(r) = \mathrm{F}$, denn 4 ist zwar eine gerade Zahl, aber sicher nicht (!) restlos durch 3 teilbar. Allgemein gilt für den Wahrheitswert der Konjunktion:

**Merksatz**

Die Konjunktion $p \bigwedge q$ ist nur dann wahr, wenn **beide** Aussagen $p$ und $q$ wahr sind.

Etwas anders, d. h. nicht gar so streng, verhält es sich, wenn wir die beiden Aussagen $p$ und $q$ mit dem Wort „oder“ verknüpfen:

$s$: Die Zahl 4 ist eine gerade Zahl **oder** sie ist restlos durch 3 teilbar.

Diese Art der Verknüpfung nennt man **Disjunktion**:

**Merksatz**

Die Verknüpfung zweier Aussagen $p$ und $q$ mit dem Wort „oder“ nennt man **Disjunktion**. Die symbolische Schreibweise lautet: $p \bigvee q$, und man spricht es als „$p$ oder $q$“.

Wichtig ist, dass die Disjunktion kein „entweder oder“ bedeutet, d. h., hinsichtlich des Wahrheitswertes gilt:

**Merksatz**

Die Konjunktion $p \bigvee q$ ist wahr, wenn **mindestens eine** der Aussagen $p$ und $q$ wahr ist.

In unserem Beispiel ist die Aussage $s$ wahr, denn 4 ist in der Tat eine gerade Zahl. Also ist eine der beiden Teilaussagen in der Verknüpfung wahr, und es gilt $w(s) = w(p \bigvee q) = \mathrm{W}$. (Es stört in diesem Fall nicht im Geringsten, dass 4 nicht restlos durch 3 teilbar ist.)

Nun haben wir schon zwei ganz wichtige Aussagenverknüpfungen kennengelernt, doch gibt es noch andere, die insbesondere beim mathematischen Schlussfolgern eine wesentliche Rolle spielen. Beginnen wir mit der „**Wenn** … **dann**“-Verknüpfung, auch **Implikation** genannt. Diese wird wie folgt genutzt: „**Wenn** die genannte Aussage (Voraussetzung) erfüllt ist, **dann** gilt auch die genannte zweite Aussage (Schlussfolgerung).“ Ein einfaches Beispiel ist das folgende: Wir betrachten die beiden Aussagen $p$ und $q$ mit

$p$: Der Student A ist an der TH Wildau immatrikuliert.

$q$: Der Student A hat ein Semesterticket.

(*Bemerkung*: Ein Semesterticket berechtigt in diesem Fall zur Nutzung aller Busse und Bahnen in Berlin-Brandenburg). Da jeder Student in Berlin-Brandenburg in der Tat automatisch ein derartiges Ticket erhält, hängen diese beiden Aussagen tatsächlich in der folgenden Art und Weise zusammen:

**Wenn** der Student A an der TH Wildau immatrikuliert ist, **dann** hat er ein Semesterticket.

Auch für die Implikation gibt es ein Symbol bzw. eine Kurzform:

**Merksatz**

Die **Implikation** wird mit dem Doppelpfeil gekennzeichnet: $p \Rightarrow q$ bedeutet „Wenn $p$ eintritt, dann tritt auch $q$ ein“ und wird kurz „wenn $q$, dann $p$“ oder auch „aus $p$ folgt $q$“ gesprochen.

Theoretisch kann man sich jetzt natürlich auch fragen, ob eine Implikation „andersherum“ gelesen bzw. formuliert immer noch seine Richtigkeit behält? In unserem Fall bedeutet die Umkehrung:

$q \Rightarrow p$: Wenn der Student A ein Semesterticket besitzt, dann ist er an der TH Wildau immatrikuliert.

Dies stimmt jedoch nicht, denn alle (!) Studierenden aus Berlin und Brandenburg haben dieses Ticket. Die Immatrikulation in Wildau lässt sich somit aus dem Besitz des Semestertickets keineswegs ableiten.

Halten wir also fest:

**Merksatz**

Die **Implikation** $p \Rightarrow q$ ist im Allgemeinen nicht umkehrbar.

Auch im täglichen Leben begegnen wir öfter einmal Situationen, in denen Implikationen nicht umkehrbar sind. Zum Beispiel können wir aus der Aussage „Wenn es regnet, dann ist die Straße nass." nicht zwingend umgekehrt schlussfolgern: „Wenn die Straße nass ist, dann regnet es." Es könnte ja durchaus ein Rohrbruch vorliegen oder ein Sprengwagen vorbeigefahren sein, sodass die Straße – trotz strahlenden Sonnenscheins – nass ist. Somit muss man bei den Implikationen wirklich sehr aufpassen, **in welche Richtung** man schließt.

Aber es gibt durchaus Fälle, in denen die Umkehrung doch gültig ist. Dies machen wir an folgendem Beispiel klar:

$p$: Die Zahlen $a$ und $b$ sind ungerade.

$q$: Das Produkt $ab$ ist ungerade.

Nehmen wir beispielsweise die Zahlen $a = 7$ und $b = 5$. Beide sind ungerade, deren Produkt $3 \cdot 5$ ebenso. Auch mit anderen ungeraden Zahlenpaaren erhalten wir nach der Multiplikation eine ungerade Zahl. Natürlich ist so eine Herangehensweise kein Beweis, doch lässt sich tatsächlich leicht beweisen, dass das Produkt zweier ungerader Zahlen ungerade ist. D. h. die Implikation $p \Rightarrow q$ gilt. Aber auch die Umkehrung ist nachweisbar: Wenn eine ungerade Zahl sich als Produkt zweier Zahlen $p$ und $q$ darstellen lässt, dann sind $p$ und $q$ ebenfalls immer ungerade.

In diesem Fall haben wir eine „Implikation in beide Richtungen". Diese Verknüpfung nennt man **Äquivalenz**:

**Merksatz**

Wenn für zwei Aussagen $p$ und $q$ gilt: $p \Rightarrow q$ **und** $q \Rightarrow p$, dann nennt man $p$ und $q$ **äquivalent**. Die Beziehung zwischen $p$ und $q$ heißt **Äquivalenz**.

Jetzt kennen wir schon einige Möglichkeiten, Aussagen zu „verknüpfen". Es bleibt nur noch ein Begriff, der in diesem Zusammenhang wichtig ist, das ist die sogenannte Negation (Verneinung):

Hierfür nehmen wir die Aussage $p$: Die Straße ist nass. Dann lautet die Negation „**non** $\boldsymbol{p}$" $\bar{p}$: Die Straße ist **nicht** nass. Die Negation wird mit einem Querbalken über der Aussage markiert und mit dem Wort „nicht" in der Aussage in das Gegenteil gekehrt. Insbesondere kehrt sich auch der Wahrheitswert um:

**Merksatz**

Wenn $p$ wahr ist, dann ist $\bar{p}$ falsch und umgekehrt.

Kombiniert man die Implikation und die Negation, erhält man zum Abschluss dieses Abschnitts noch einen interessanten Zusammenhang: Hierfür seien die beiden Aussagen $p$ und $q$ gegeben mit

$p$: Es regnet. $q$: Die Straße ist nass. (s. Aufgabe 2.1 aus Exkurs 2.3).

Es gilt, wie wir bereits festgestellt haben: $p \Rightarrow q$, d. h. „Wenn es regnet, dann ist die Straße nass." Wie wir auch wissen, gilt die Umkehrung $q \Rightarrow p$ nicht! Stattdessen gilt aber die folgende Aussage: „Wenn die Straße **nicht** nass ist (d. h. wenn sie trocken ist), dann regnet es **nicht**!" Symbolisch formuliert heißt das:

**Merksatz**

$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$, d. h. wenn aus der Aussage $p$ die Aussage $q$ folgt, dann folgt aus der Aussage „non $q$" die Aussage „non $p$".

Nun sind wir bereits mit unserem Teil „Logik" am Ende, d. h., unsere Bedarfe sind gedeckt. Obwohl wir in diesem Buch keine Beweise im mathematischen Sinn durchführen, so sei zumindest angemerkt, dass die hier bereits gelegten Merksätze die Basis für grundlegende Beweismethoden wie z. B. den direkten und indirekten Beweis darstellen. Wir können uns zum Abschluss mit den jetzt erworbenen Kenntnissen auf die **Aufgabe 2.1** konzentrieren. Sie werden sehen, es ist gar nicht mehr schwer:

### Aufgabe 2.1

Es seien die folgenden Aussagen gegeben:

$p$: Es regnet.

$q$: Die Straße ist nass.

$r$: Ich habe sechs Richtige im Lotto.

$s$: Ich kaufe mir einen Sportwagen.

a. Formulieren Sie für jede Aussage die jeweilige Negation:

   $\bar{p}$: Es regnet nicht.

   $\bar{q}$: Die Straße ist nicht nass. (Das heißt, die Straße ist trocken.)

   $\bar{r}$: Ich habe keine sechs Richtige im Lotto.

   $\bar{s}$: Ich kaufe mir keinen Sportwagen.

b. Welche sinnvollen (!) Aussagenverknüpfungen können mit $p$, $q$, $r$, $s$ und deren Negationen gebildet werden? Formulieren Sie diese:
   Wie wir bereits gesehen haben, macht die Aussage „Wenn es regnet, dann ist die Straße nass." durchaus Sinn ($p \Rightarrow q$). Ebenso könnte man sagen: „Wenn ich sechs Richtige im Lotto habe, dann kaufe ich mir einen Sportwagen." (symbolisch $r \Rightarrow s$). Auch könnte man gegebenenfalls davon ausgehen, dass man sich keinen Sportwagen kauft, wenn man keine sechs Richtige im Lotto hat ($\bar{s} \Rightarrow \bar{r}$). Das muss im realen Leben nicht wirklich der Fall sein, da es ja noch andere Möglichkeiten gibt, Geld zu verdienen bzw. zu bekommen, um sich einen Sportwagen zu kaufen. Diese Beispiele sind natürlich nicht zwingend abschließend. Vielleicht finden Sie noch andere für Sie sinnvoll erscheinende Verknüpfungen? Probieren Sie es ruhig!

## 2.2 Was sind Mengen im mathematischen Sinne?

Sie werden sicherlich das eine oder andere Mal von **Mengen** in der Mathematik gehört haben. Spätestens wenn wir es mit Zahlen zu tun haben, ist es einfach wichtig, dass wir alle zumindest einen „naiven" Mengenbegriff im Hinterkopf haben und wissen, wie man mit Mengen arbeitet bzw. diese darstellt: Denn es werden Mengen sein, die die Grundlage unseres mathematischen Handelns bilden und für die wir uns Werkzeuge und Instrumente zurechtlegen, mithilfe derer wir uns den „eigentlichen" angewandten Problemen zuwenden und diese angemessen modellieren können.

Nun definieren wir als Erstes, was wir fortan unter einer Menge verstehen. Dieser Begriff ist nicht so ganz einfach zu fassen, doch lassen wir die tiefgründigen mathematischen Hintergründe außer Acht und bedienen uns eines „naiven" Mengenbegriffs:

**Merksatz**

Unter einer Menge versteht man eine Zusammenfassung gewisser **wohlunterschiedener** „Dinge" (Objekte) zu einem neuen, einheitlichen Ganzen. Die dabei zusammengefassten Dinge heißen **Elemente** der betreffenden Menge. Es muss prinzipiell entscheidbar sein, ob ein Element zur Menge gehört oder nicht. Ist $a$ ein Element der Menge $M$, so schreibt man

$a \in M$ (in Worten: $a$ ist Element von $M$).

Ist $a$ nicht Element von $M$, so schreibt man $a \notin M$ (in Worten: $a$ ist nicht Element von $M$).

Das klingt vielleicht ein wenig merkwürdig: „Zusammenfassung gewisser **wohlunterschiedener** ‚Dinge' (Objekte) ..." – was bedeutet das praktisch? Wenn man genau liest, merkt man, dass wieder unsere bereits bekannte „zweiwertige Logik" im Hintergrund mitspielt. Zumindest insofern, als es offensichtlich für diese genannten Dinge genau zwei Zustände gibt: Entweder sie gehören zur Menge oder nicht. Es gibt kein „dazwischen", sondern nur ein „Ja" oder „Nein".

Eine typische Menge im mathematischen Sinn bilden z. B. die Studierenden an der TH Wildau, die zum WS 2012 ihr Studium in der Studienrichtung Betriebswirtschaft (Bachelor) begonnen haben. Die Elemente dieser Menge sind eindeutig identifizierbar. Wird jemand – egal wo und wer – willkürlich ausgewählt und gefragt: „Hast du im WS 2012 ein BWL-Studium (Bachelor) an der TH Wildau begonnen?", dann gibt es nur zwei mögliche Antworten: Ja oder Nein. Man kann somit klar festlegen, ob eine Person zu dieser ausgewählten Gruppe gehört oder nicht. Das heißt, es handelt sich in der Tat um eine Menge im mathematischen Sinn.

Wir werden in der Mathematik natürlich in erster Linie mit Zahlenmengen zu tun haben. Diese können **endlich** viele Elemente (z. B. die Menge aller geraden Zahlen, die kleiner als 10 sind), aber auch **unendlich viele** Elemente (z. B. alle positiven geraden Zahlen) enthalten. Um den Begriff der Menge etwas „handhabbarer" zu gestalten, befassen wir uns im nächsten Schritt mit der Frage, wie man Mengen überhaupt darstellen kann. Im Anschluss geht es um die verschiedenen Arten der **Verknüpfungen** von Mengen.

Um Mengen darzustellen, haben wir die folgenden Möglichkeiten:

Die Bezeichnung von Mengen erfolgt in der Regel mit großen lateinischen Buchstaben (z. B. $A$, $M$, $B$ etc.).

Um deutlich zu machen, welche Elemente in der jeweiligen Menge enthalten sind, kann man in einigen Fällen die „aufzählende Schreibweise" nutzen: Diese funktioniert prinzipiell bei endlichen Mengen (im besten Fall mit einer überschaubaren Anzahl von Elementen). Die Elemente werden mit einer geschweiften Klammer umschlossen, z. B. $A = \{2, 4, 6, 8\}$ oder $B = \{a, b, c, d\}$ oder $M = \{\text{Schmidt, Krause, Lehmann, Schulze}\}$.

- Bei einigen Mengen mit unendlich vielen Elementen kann man die aufzählende Schreibweise nutzen, wenn deutlich wird, welche weiteren Elemente noch dazu gehören. Ein Beispiel dafür ist die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Die Punkte in der Klammer machen deutlich, dass es „immer so weiter geht" und alle (unendlich viele natürliche Zahlen) Elemente dieser Menge sind.
- Insbesondere für Mengen mit unendlich vielen Elementen, bei denen die angedeutete „Aufzählung" nicht funktioniert, bleibt noch die Möglichkeit der „beschreibenden" **Darstellung**. Anhand der folgenden Beispiele wird deutlich, was darunter zu verstehen ist:
  - $B = \{\text{Studenten } x \mid x \text{ hat die Mathematikklausur im 1. Semester bestanden}\}$. Bei diesem Beispiel handelt es sich mit Sicherheit um eine endliche Menge, dennoch kann bei hinreichend großer Studierendenzahl die Menge derjenigen, die die Klausur bestanden haben, recht groß sein, sodass keiner Lust verspürt, alle Namen hintereinander aufzuzählen. Lesen müssen Sie die Schreibweise so: „Die Menge $B$ besteht aus allen Studenten $x$, für die gilt: $x$ hat die Mathematikklausur im 1. Semester bestanden." Das heißt, der senkrechte Strich in der Klammer steht für die drei Worte: „für die gilt ..."
  - $U = \{x \mid x \text{ ist eine natürliche und ungerade Zahl}\} = \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$. In diesem Fall hätte man – wie wir sehen – auch noch die angedeutete Aufzählung als Darstellung nutzen können, doch sollte hier demonstriert werden, wie man die beschreibende Darstellung einsetzen kann.
  - Des Weiteren haben wir noch eine grafische Möglichkeit, Mengen darzustellen: Hierfür nutzen wir das sogenannte **Venn-Diagramm** (s. Abb. 2.1). In diesem Fall wird eine Menge dargestellt, indem man sie umkreist, als wenn man die Elemente mit einer Art „Lasso" einfangen möchte.
- Zu guter Letzt definieren wir noch die sogenannte **leere Menge**. Das ist eine Menge, die keine Elemente enthält (z. B. ist die Menge aller Mädchen in einer Jungenschule eine leere Menge). Man bezeichnet die leere Menge mit $\{\ \}$ oder mit $\emptyset$.

Jetzt wissen wir, wie man Mengen darstellen kann und dass es auch so etwas wie eine leere Menge gibt. Bevor wir mit

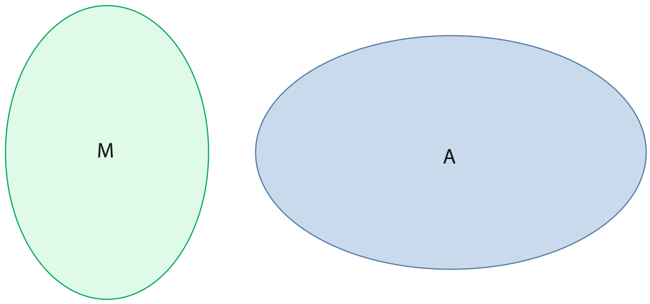



**Abb. 2.1** Darstellung zweier Mengen im Venn-Diagramm

den Verknüpfungen von Mengen beginnen, benötigen wir noch einen weiteren Begriff, nämlich den Begriff der **Teilmenge**. Hierfür betrachten wir zum Einstieg die beiden Mengen $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ und $A = \{2, 4\}$. Man erkennt, dass die Elemente der Menge $A$ auch Elemente der Menge $B$ sind. In einem solchen Fall sagt man, dass „$A$ eine Teilmenge von $B$“ ist:

**Merksatz**

Eine Menge $A$ heißt Teilmenge einer Menge $B$, wenn jedes Element von $A$ auch ein Element von $B$ ist, und man schreibt: $A \subset B$.

Grafisch kann man die Teilmengenbeziehung, wie in Abb. 2.2 gezeigt, darstellen.

Mithilfe des Begriffs der Teilmenge können wir nun auch festlegen, wann zwei Mengen gleich sind:

**Merksatz**

Zwei Mengen ***A* und *B* sind gleich**, wenn jedes Element von $A$ auch ein Element von $B$ ist und umgekehrt, symbolisch: $A = B \iff (A \subset B) \bigwedge (B \subset A)$. (Bitte beachten Sie, dass hier die Symbole für die Äquivalenz und die Konjunktion („und“) genutzt worden sind.)

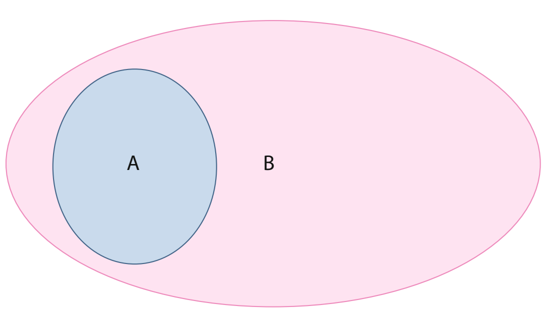



**Abb. 2.2** Teilmengenbeziehung $A \subset B$

**Zusammenfassung**

Wir wissen nun, was Mengen sind, wie man sie darstellt, kennen den Begriff der Teilmenge und wissen, wann Mengen „gleich“ sind. Jetzt sind wir gewappnet, um mit ihnen richtig zu arbeiten, sprich, mit ihnen im mathematischen Sinne zu „operieren“. Das heißt, wir verknüpfen jetzt Mengen so ähnlich wie wir im Abschnitt davor Aussagen miteinander verknüpft haben.

**Merksatz**

Der **Durchschnitt** $A \cap B$ (auch **Schnittmenge**) zweier Mengen $A$ und $B$ (s. Abb. 2.3) besteht aus denjenigen Elementen, die sowohl Elemente von $A$ als auch Elemente von $B$ sind, symbolisch: $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$.

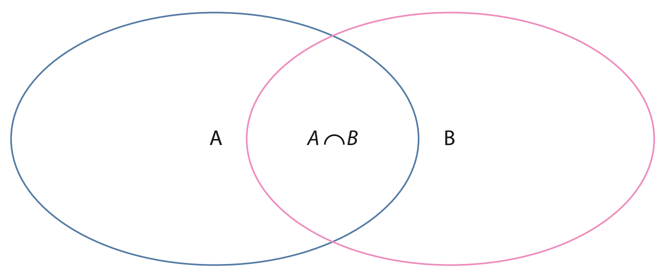



**Abb. 2.3** Grafische Veranschaulichung der Schnittmenge von $A$ und $B$

**Beispiel**

- Es seien $A = \{1, 2, 3, 4\}$ und $B = \{0, 1, 2\}$. Dann ist $A \cap B = \{1, 2\}$, da nur die 1 und die 2 in beiden Mengen $A$ und $B$ enthalten sind.
- Es seien $A = \{a, b, c, d\}$ und $B = \{x, y, z\}$. Dann ist $A \cap B = \{\,\}$, denn es gibt kein Element das sowohl in $A$ als auch in $B$ enthalten ist.

Für den Fall, dass $A$ eine Teilmenge von $B$ ist, stimmt die Schnittmenge von $A$ und $B$ mit $A$ überein (Abb. 2.4).

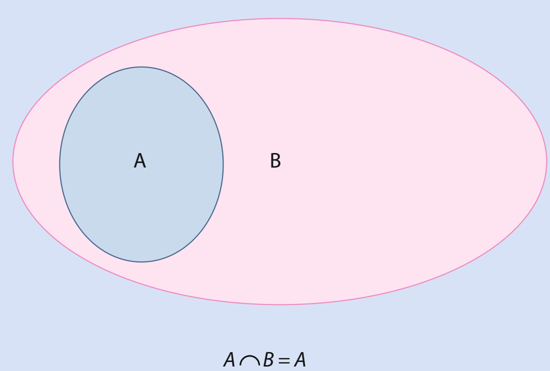



**Abb. 2.4** Durchschnitt von $A$ und $B$

**Merksatz**

Es kommt bei der Bildung des Durchschnitts zweier Mengen $A$ und $B$ nicht auf die Reihenfolge an, sondern es gilt: $A \cap B = B \cap A$. (Man sagt dazu auch, dass die Bildung des Durchschnitts **kommutativ**, d. h. vertauschbar ist. Diese Eigenschaft kennen wir auch von der Addition von Zahlen und wird uns zu gegebener Zeit dort wieder begegnen.)

Eine weitere Möglichkeit, mit Mengen zu operieren, ist, sie zusammenzufassen. Die Mathematiker sagen auch, dass man Mengen „vereinigt". Dies führt zum Begriff der **Vereinigungsmenge**:

**Merksatz**

Die **Vereinigungsmenge** zweier Mengen $A$ und $B$ ist die Menge derjenigen Elemente, die zu $A$ oder zu $B$ gehören, symbolisch: $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$.

**Beispiel**

Betrachten wir einmal die folgende Situation: An einer Hochschule haben die Studierenden die Möglichkeit, neben dem Pflichtmodul „Englisch" auf freiwilliger Basis weitere Fremdsprachen zu lernen. Im Angebot befinden sich derzeit Spanisch und Russisch. Nach Abschluss der Einschreibungsfrist haben sich 100 Studierende für Spanisch und 75 Studierende für Russisch entschieden. Einige ganz Engagierte haben sich in beide Kurse eingeschrieben: 23 Studierende möchten Spanisch und Russisch lernen.

In der Sprache der Mengenlehre ausgedrückt haben wir die beiden folgenden Mengen: $A = \{\text{Studierende(r) } x | x \text{ lernt Spanisch}\}$ sowie $B = \{\text{Studierende(r) } x | x \text{ lernt Russisch}\}$.

Die Vereinigungsmenge $A \cup B$ besteht nun aus denjenigen Studierenden, die Spanisch oder Russisch lernen, d. h., sie umfasst alle, die **mindestens eine** der beiden Sprachen zusätzlich lernen. Wenn also die Organisatoren eine Informationsveranstaltung durchführen wollen, in der sie Grundsätzliches über beide Lehrveranstaltungen vortragen möchten, bilden sie „mathematisch gesehen" die Vereinigungsmenge beider Mengen und laden alle Studierenden aus dieser Menge ein.

Anders verhält es sich mit dem Durchschnitt beider Mengen: $A \cap B$ enthält alle Studierenden, die **beide Sprachen** (d. h. Russisch **und** Spanisch) lernen bzw. sich für beide Kurse angemeldet haben. (In diesem Fall handelt es sich um die genannten 23 Personen.) Abbildung 2.5 stellt die soeben beschriebenen Sachverhalte noch einmal grafisch dar.

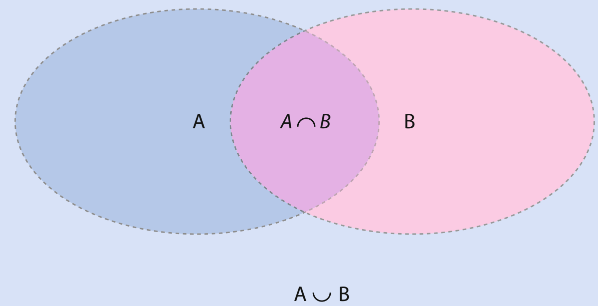



**Abb. 2.5** Vereinigung und Durchschnitt der Mengen $A$ und $B$

Bleiben wir bei unserem Beispiel mit den sprachinteressierten Studierenden. Wir können uns neben der Tatsache, dass man entweder alle beiden Gruppen einlädt (Vereinigungsmenge) oder nur mit denen zu tun haben will, die beide Sprachen lernen (Durchschnitt) auch noch eine bzw. zwei andere Konstellationen vorstellen:

Es besteht nicht nur im realen Leben, sondern auch mithilfe unserer Mengendarstellung die Möglichkeit, sich all den Studierenden zuzuwenden, die genau eine Sprache zusätzlich lernen. Das heißt, wir können uns diejenigen herauspicken, die *Spanisch, aber nicht Russisch* lernen, oder wir betrachten diejenigen, die *Russisch, aber nicht Spanisch* lernen. Offensichtlich sind das jeweils die Menge $A$ bzw. die Menge $B$, aus denen wir bestimmte Studierende (nämlich die aus der Schnittmenge $A \cap B$) **herausnehmen** bzw. **wegnehmen**. In beiden Fällen haben wir es also in gewisser Weise mit einer **Differenz** zu tun, und wir sprechen somit von den beiden **Differenzmengen** $A \setminus B$ („$A$ ohne $B$") bzw. $B \setminus A$ („$B$ ohne $A$"):

$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\} \quad \text{bzw.} \quad B \setminus A = \{x | x \in B \wedge x \notin A\}$$

Abbildung 2.6 verdeutlicht den Begriff der Differenzmenge für verschiedene Situationen.

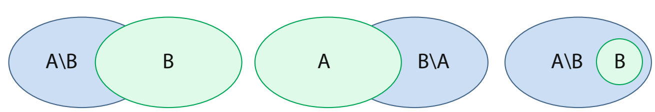



**Abb. 2.6** Darstellung von Differenzmengen

Offensichtlich können wir wirklich mit Mengen „rechnen" in dem Sinne, dass wir Mengen u. a.

- „zusammenfassen" (Vereinigung) oder
- „voneinander abziehen" (Differenz) können.

Das ist aber noch nicht alles: Wir können auch das Produkt von zwei (oder mehr) Mengen bilden. Das mag jetzt vielleicht etwas überraschend klingen, ist aber möglich. Wie das möglich ist, soll an folgendem Beispiel zunächst einmal veranschaulicht werden.

**Beispiel**

Nehmen wir an, wie betreiben eine Tanzschule und möchten unsere Schüler und Schülerinnen auch dahingehend trainieren, dass sie sich gut auf verschiedene Tanzpartner einstellen. Nehmen wir weiterhin an, dass wir in einer Gruppe (nur) fünf Männer und fünf Frauen haben. Dann haben wir zunächst einmal (mathematisch gesehen) zwei Mengen mit jeweils fünf Elementen:

$M = \{m1, m2, m3, m4, m5\}$ (Menge aller Männer mit den „Namen" $m1$ bis $m5$) sowie

$F = \{f1, f2, f3, f4, f5\}$ (Menge aller Frauen mit den „Namen" $f1$ bis $f5$).

Nun möchten wir eine Liste mit allen erdenklichen Tanzkombinationen erstellen, um im Verlaufe der Tanzstunden stets zu vermerken, wer mit wem gegebenenfalls auch was und wie lange getanzt hat. Für den Fall, dass sich gewisse „Einseitigkeiten" ergeben würden, könnten wir versuchen, frühzeitig gegenzusteuern.

Wie sieht eine solche Liste aber sinnvollerweise aus? Offensichtlich bilden wir **Paare**, die wir aus den beiden Mengen $M$ und $F$ zusammensetzen. Um eine gewisse Übersichtlichkeit zu bewahren, einigen wir uns vorab darüber, dass beim Auflisten der Paare stets der Name des Mannes zuerst genannt wird. Mit den zugrundeliegenden Mengen sowie dieser Vereinbarung können wir nun loslegen und mit der Pärchenbildung beginnen. Wir erhalten folgendes Ergebnis für die möglichen Tanzpaare:

$m1$ tanzt mit $f1$, $m1$ tanzt mit $f2$, … $m1$ tanzt mit $f5$

$m2$ tanzt mit $f1$, $m2$ tanzt mit $f2$, … $m2$ tanzt mit $f5$ …

$m5$ tanzt mit $f1$, …, … $m5$ tanzt mit $f5$.

Offensichtlich gibt es $5 \times 5 = 25$ mögliche Tanzpaare, die wir der Einfachheit halber nicht mehr mit den Worten „tanzt mit", sondern in runden Klammern darstellen:

$(m1, f1)$, $(m1, f2), \ldots,$ $(m1, f5), (m2, f1), \ldots (m2, f5),$ $\ldots (m5, f5)$.

Wir haben es mit insgesamt 25 möglichen Tanzpaaren zu tun, die in gewisser Weise „geordnet" sind. Dieser Ordnungsbegriff bezieht sich lediglich darauf, dass wir uns darauf geeinigt haben, den Mann zuerst zu nennen. Nun setzen wir um die „geordneten Paare" eine geschweifte Klammer und erhalten so eine neue Menge, die wir als **Produkt** bzw. **Kreuzprodukt** oder auch als **kartesisches Produkt** $M \times F$ von $M$ und $F$ bezeichnen:

$$M \times F = \{(m1, f1), (m1, f2), \ldots, (m1, f5), \ldots, (m5, f5)\}.$$

Bitte beachten Sie: Die Elemente dieser Menge sind jetzt die **geordneten** Paare, bei denen erst der Mann und dann die Frau aufgeführt werden. Diese wiederum entstammen den Mengen $M$ und $F$.

Natürlich hätten wir das auch anders machen können, indem wir vereinbaren, zuerst die Frau zu nennen und somit das Kriterium, wie man die Paare ordnet, einfach anders festzusetzen. Das Ergebnis wäre dann das folgende Kreuzprodukt:

$$F \times M = \{(f1, m1), (f1, m2), \ldots, (f1, fm), \ldots, (f5, m5)\}.$$

Für die Tanzschule und auch für die betroffenen Tänzer wäre die Reihenfolge der Nennung natürlich völlig egal. An dem Tanzpaar ändert sich natürlich nichts, egal, wen man zuerst benennt. Mathematisch handelt es sich bei diesen Mengen jedoch nicht um dieselben, sondern um grundsätzlich verschiedene Mengen, d. h. $F \times M \neq M \times F$. ◄

Die Tatsache, dass es bei der Bildung des kartesischen Produkts durchaus auf die Reihenfolge der Nennung innerhalb der Klammern ankommt, können wir uns gut an der folgenden Betrachtung verdeutlichen:

In einer Ebene mit (rechtwinkligem) $x$-$y$-Koordinatensystem (dieses ist Ihnen sicher von der Schule noch bekannt, wird aber im Folgenden auch noch näher erläutert) kann jeder Punkt $P$ durch ein Zahlenpaar $(a, b)$ – seine Koordinaten – beschrieben werden (s. Abb. 2.7). Dabei kommt es durchaus auf die Reihenfolge an, denn die **Zahlenpaare $(a, b)$ und $(b, a)$ beschreiben im Fall $a \neq b$ verschiedene Punkte**. Wir identifizieren die Punkte in der Ebene also nicht durch Zahlenpaare schlechthin, sondern durch **geordnete Zahlenpaare**, bei denen es auf die Reihenfolge der Komponenten sehr ankommt!

Das Zahlenpaar $(a, b)$ beschreibt den Punkt $P$, das Zahlenpaar $(b, a)$ beschreibt einen von $P$ verschiedenen Punkt $Q$, falls $a \neq b$ ist. In einer Ebene mit Koordinatensystem werden **Punkte durch geordnete Zahlenpaare** beschrieben.

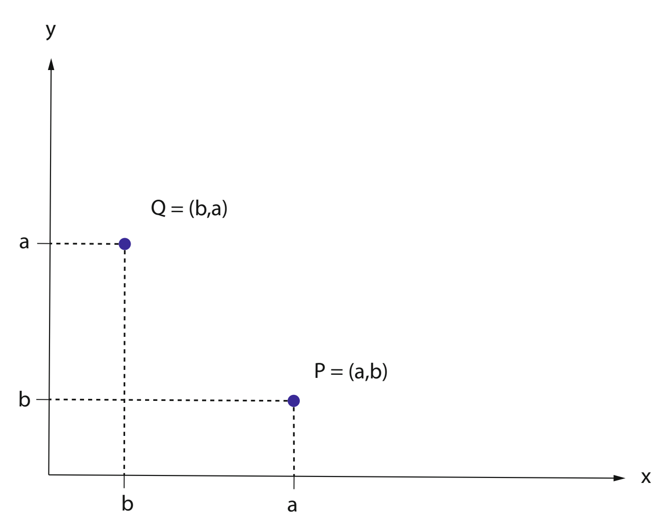



**Abb. 2.7** Punkte in einer Ebene mit Koordinatensystem

Analog lassen sich übrigens Punkte im dreidimensionalen Raum mit $x$-$y$-$z$-Koordinatensystem durch geordnete **Zahlentripel** $(a, b, c)$ beschreiben.

Damit können wir erklären:

**Merksatz**

Das kartesische Produkt $A \times B$ zweier Mengen $A$ und $B$ ist die Gesamtheit aller geordneten Paare $(a, b)$ mit $a \in A$ und $b \in B$, kurz:

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \bigwedge b \in B\}.$$

**Merksatz**

Die Bildung des kartesischen Produkts ist nicht vertauschbar, d. h. $A \times B \neq B \times A$.

Jetzt sind wir so weit, uns um die **Aufgaben 2.2–2.4** zu kümmern. (Für den Fall, dass Sie diese gerechnet haben, vergleichen Sie einfach Ihre Lösung mit dem unten stehenden Ergebnis.)

### Aufgabe 2.2

Kann eine der beiden Relationen „$\subset$" oder „$=$" auf die jeweiligen Mengen angewendet werden? Wenn ja, welche?

$M = \{1, 3, 5, 7\}$ und $N = \{7, 5, 3, 1\}$: Hier stellen wir fest, dass die Mengen $M$ und $N$ gleich sind ($M = N$). Die Reihenfolge der Aufzählung der Elemente spielt keine Rolle!

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$ und $B = \{b, f\}$: Hier gilt, dass $B$ eine Teilmenge von $A$ ist ($B \subset A$), denn jedes Element von $B$ ist auch Element von $A$. Die Umkehrung gilt allerdings nicht: Es gibt Elemente von $A$, die nicht in $B$ enthalten sind. Somit sind diese Mengen auch nicht gleich.

$C = \{\text{Schmidt}, \text{Meier}, \text{Müller}\}$, $D = \{\text{Anne}, \text{Fred}, \text{Tom}\}$: Diese beiden Mengen sind verschieden $C \neq D$.

Des Weiteren sollte als **Aufgabe 2.3** das Kreuzprodukt $D \times C$ gebildet und die Ergebnismenge in Worten interpretiert werden:

### Aufgabe 2.3

Das Kreuzprodukt ist

$$D \times C = \left\{ \begin{array}{l} (\text{Anne}, \text{Schmidt}), (\text{Anne}, \text{Meier}), (\text{Anne}, \text{Müller}), \\ \qquad (\text{Fred}, \text{Schmidt}), (\text{Fred}, \text{Meier}), \\ (\text{Fred}, \text{Müller}), (\text{Tom}, \text{Schmidt}), (\text{Tom}, \text{Meier}), \\ \qquad (\text{Tom}, \text{Müller}) \end{array} \right\}.$$

Interpretieren lässt sich das Ergebnis als „Menge aller denkbaren Kombinationen der Vornamen aus der Menge $D$ mit den Nachnamen der Menge $C$".

Fahren wir gleich fort mit der **Aufgabe 2.4** und fügen sie als Beispiel an dieser Stelle ein.

### Aufgabe 2.4

Es seien die Mengen $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{4, 5, 6\}$ gegeben. Berechnen Sie:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{-1, 0, 1, 2, 3\} = A \\ A \cap B &= \{1, 2, 3\} = B \\ A \setminus B &= \{-1, 0\} \\ B \cap C &= \{\} \\ A \cup B \cup C &= \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $B$ eine Teilmenge von $A$ und $C$ besitzt keinerlei gemeinsame Elemente mit $A$ bzw. mit $B$.

**Zusammenfassung**

Wir haben uns nach der Einleitung zur mathematischen Logik mit dem Begriff der „Menge" im mathematischen Sinne auseinandergesetzt und festgestellt, dass beides durchaus miteinander zusammenhängt: Ausgehend von der zweiwertigen Logik finden wir diese Zweiwertigkeit bei der Definition einer Menge wieder („entweder ein Element gehört zur Menge oder nicht"). Auch haben wir gelernt, dass wir logische Aussagen untereinander und auch Mengen miteinander verknüpfen können, d. h., wir können mit ihnen arbeiten bzw. rechnen. Uns werden diese Darstellungsformen und auch viele Verknüpfungen an verschiedenen Stellen in diesem Buch wieder begegnen, doch nur in dem Maße, wie es für die exakte Bearbeitung bzw. Lösung der dort auftretenden Fragestellungen notwendig ist. Wir verzichten daher ganz bewusst auf weitere Vertiefungen in Sachen Logik und Mengen und legen vielmehr Wert darauf, dass Sie das bis hierher Dargestellte verstanden und verinnerlicht haben.

## 2.3 Mit welchen Zahlen haben wir zu tun? (Aufbau des Zahlensystems)

Mathematik hat etwas mit Zahlen zu tun – das ist sicher das Erste, was jeder mit dieser Disziplin verbindet. Aber „Was sind und was sollen die Zahlen?" So lautet der Titel der berühmten Schrift des großen Mathematikers Richard Dedekind, der 1888 als erster die natürlichen Zahlen axiomatisch (d. h. nur auf Basis weniger nicht beweisbarer Annahmen, sogenannter Axiome) eingeführt hat. Für ihn sind Zahlen „freie Schöpfungen des menschlichen Geistes, sie dienen als ein Mittel, die Verschiedenheit der Dinge leichter aufzufassen." (s. Dedekind (2010), Vorwort zur 1. Aufl. 1888). Ohne sich zu sehr in diese grundlegenden Überlegungen zu vertiefen, werden wir uns in diesem Abschnitt dem Aufbau der reellen Zahlen widmen. Diese sind Ihnen sicher von der Schule in einem gewissen Maße bekannt, doch hat die Erfahrung gezeigt, dass ein grundlegendes Verständnis trotzdem häufig nicht mehr präsent ist. Dennoch ist dies wichtig und hilfreich, sodass wir diesem Thema einen ganzen (aber kompakten) Abschnitt widmen. Erst im daran anschließenden Abschn. 2.4 werden wir mit den Zahlen rechnen, d. h. uns dem Thema „Arithmetik“ zuwenden.

Zahlen haben etwas mit „zählen“ zu tun, und als wir als Kinder angefangen haben zu zählen, lernten wir, dass man mit der 1 beginnt und dann fortschreitet mit der 2, der 3, der 4 etc. Dies führt uns zu der ersten Zahlenmenge, den sogenannten natürlichen Zahlen:

**Merksatz**

Die natürlichen Zahlen werden durch einen **unendlichen Abzählungsprozess** erfasst. Ausgehend von der Zahl 1 wird immer „um 1 weitergezählt“ und dadurch jede (noch so große) natürliche Zahl erreicht. Bricht man diesen Prozess niemals ab, so erhält man alle natürlichen Zahlen.

Erinnern wir uns ruhig noch einmal an den vorhergehenden Abschnitt, in dem wir uns mit Mengen beschäftigt haben. Ganz offensichtlich haben wir es bei den natürlichen Zahlen mit einer Menge zu tun, die – und das ist der Unterschied zu den bisher bekannten Beispielen – unendlich viele Elemente hat. Das Thema „Unendlichkeit“ hat Mathematiker, Philosophen und Theologen Jahrhunderte, ja sogar Jahrtausende beschäftigt und bisweilen auch gequält. Hier taucht sie in Form einer (ersten) unendlichen Menge, der Menge der natürlichen Zahlen auf. Diese ist, so viel sei schon einmal vorweggenommen, noch ein Vertreter der „harmlosen“ Sorte von Unendlichkeit. Es gibt nämlich in der Tat verschiedene Unendlichkeiten im mathematischen Sinne. Wichtig für uns an dieser Stelle ist, dass die natürlichen Zahlen, da sie auf Basis des (Ab-)Zählens beruhen, abzählbar unendlich viele sind. Das heißt, hätten wir unendlich viel Zeit (was immer das tatsächlich bedeutet), so könnten wir schrittweise alle natürlichen Zahlen abzählen.

Nun aber zurück zu unserer ersten wichtigen Zahlenmenge, den **natürlichen Zahlen**. Man bezeichnet sie wie folgt:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Die Punkte deuten an, dass es sich um unendlich viele Elemente handelt und dass man auf die angedeutete Art des Zählens „alle Elemente erwischt“.

Mit den natürlichen Zahlen kann man jetzt bekanntermaßen anfangen zu rechnen. Beginnen wir mit der Addition: Diese ist innerhalb der natürlichen Zahlen leicht und stets ausführbar: **Addieren wir zwei natürliche Zahlen**, so erhalten wir stets **als Ergebnis eine natürliche Zahl**. Das beruhigt und gibt keinen Anlass dafür, sich mit anderen Zahlen zu beschäftigen. Doch wie verhält es sich mit der Subtraktion? Hier ist die Situation nur teilweise entspannt: Solange der Minuend größer ist als der Subtrahend haben wir keine Probleme (bei der Subtraktion $a-b$ ist $a$ der „Minuend“ und $b$ der „Subtrahend“). Dies ist z. B. bei der Rechnung $15-6$ oder $2899-2000$ u. a. der Fall. Doch was passiert, wenn der Subtrahend plötzlich größer als der Minuend ist? Zum Beispiel, wenn wir $5-8$ rechnen wollen? Das Ergebnis liefert plötzlich keine natürliche Zahl mehr, d. h., wir „fallen aus den natürlichen Zahlen heraus“ und können das Ergebnis mit den Zahlen, die wir bis jetzt kennen, nicht darstellen. Was nun?

In derartigen Fällen behelfen sich die Mathematiker wie folgt: Sie **erweitern den Zahlenbereich** derart, dass die Ausgangsmenge (hier die natürlichen Zahlen) eine Teilmenge der neuen Menge ist und die von der Ausgangsmenge bekannten Rechenregeln gültig bleiben. In unserem Falle wird eine neue Zahlenmenge definiert, nämlich die der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$. Wir erhalten $\mathbb{Z}$, indem wir die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ um **die Null und die negativen ganzen Zahlen** ergänzen:

$$\mathbb{Z} = \{\dots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Jetzt können wir ungehindert addieren und subtrahieren, ohne „aus der Menge $\mathbb{Z}$ herauszufallen“. Für den Zusammenhang zwischen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$ gilt:

**Merksatz**

Die natürlichen Zahlen sind eine Teilmenge der ganzen Zahlen: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Auch die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ enthalten abzählbar unendlich viele Zahlen, d. h., wenn wir unendlich viel Zeit hätten, könnten wir uns an die Arbeit machen und nach und nach die ganzen Zahlen nach folgendem Muster abzählen (s. Abb. 2.8).

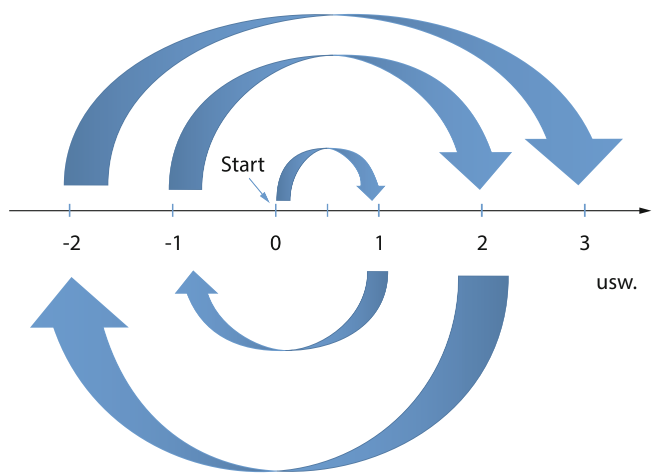



**Abb. 2.8** Abzählen der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

Als Nächstes fangen wir an zu multiplizieren und zu dividieren: Das Multiplizieren macht keine Probleme, da das Produkt zweier ganzer Zahlen stets wieder eine ganze Zahl ist. Ganz anders verhält es sich bei der Division. Hier stoßen wir immer dann an Grenzen, wenn die Division nicht restlos erfolgen kann, d. h. wenn der Quotient keine ganze Zahl mehr ergibt, wie z. B. bei der Division $2:3$. (Berechnet man $c = a : b$, dann bezeichnet man $a$ als „Dividend“, $b$ als „Divisor“ und $c$ als „Quotient“.)

Springer

http://www.springer.com/978-3-642-55174-1

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler
Intuitiv und praxisnah
Haack, B.; Tippe, U.; Stobernack, M.; Wendler, T.
2017, XVI, 559 S. 364 Abb. in Farbe., Hardcover
ISBN: 978-3-642-55174-1