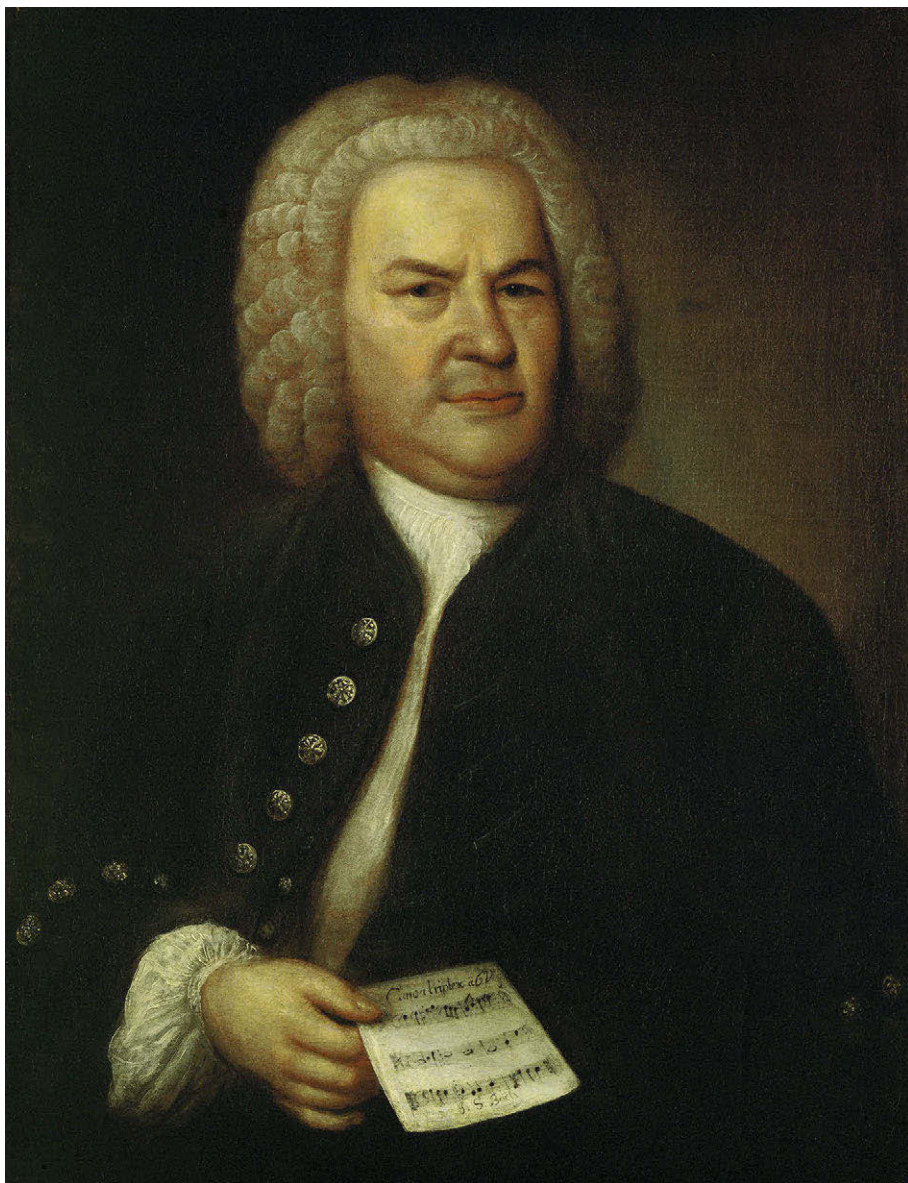




24 Johann Sebastian Bach

Erklingt eine der Kompositionen Mozarts, Haydns, Beethovens, Schuberts oder Johann Sebastian Bachs, sind wir von der Tiefe des musikalischen Ausdrucks, den genialen Einfällen, den kunstvollen Verarbeitungen hingerissen. Verändert man nur eine Note, hören wir den Misston; lässt man nur eine Phrase aus, bricht das Werk in sich zusammen. Es ist dem rational-analytischen Denken sicher nicht gegeben, die Schönheit der musikalischen Komposition eines Genies auszuloten, sachliche Begriffe kennzeichnen nur unzureichend den im Kunstwerk verborgenen Gehalt.

Vermögen nüchterne Zahlen eine Ahnung dessen zu vermitteln, was bewusst oder unbewusst den von tiefen religiösen Empfindungen getragenen Werken Bachs zugrunde liegt? Angesichts der Probleme bei der sachgerechten Deutung eines Kunstwerks sind Zweifel mehr als berechtigt. Dennoch spielen Zahlenbeziehungen im Schaffen Bachs eine nicht unwesentliche Rolle. Die kultisch-symbolische Bedeutung von Zahlen war zur Zeit Bachs sehr lebendig und allgemein geläufig. Man kann daher annehmen, dass Bach, der keine Note in den ihm bedeutsam scheinenden Werken unüberlegt oder zuviel schrieb, gerade mit den sich aus den Noten ergebenden Zahlenbeziehungen Aussagen vornehmlich religiöser Natur mit seinen Kompositionen verweben wollte.

Die Quelle, aus der Bach seine Kenntnisse und Antriebe zur Darlegung religiöser Gedanken in zahlensymbolischer Verkleidung bezog, war einerseits die Lutherbibel: In einer von Abraham Calov kommentierten Ausgabe hatte Bach jene Stellen besonders hervorgehoben, die von Personen und Ereignissen handeln, welche in Verbindung zu Zahlen stehen. So wie »Gott cirkelt«, also seine gesamte Schöpfung nach dem Gesetz der Zahlen errichtet und Moses die Zahlen für die Wohnstätte in der Wüste Sinai ins Herz gelegt hat, hat der göttliche Baumeister auch dem Johann Sebastian Bach die Zahlen für den musikalischen Tempel anheimgestellt, und Bach hat mit diesen göttlichen Zahlen »gecirkelt«. Andererseits beeinflusste die Philosophie der Aufklärung Bach, vor allem das rationalistische Denken von Leibniz, der zugleich ein begnadeter mathematischer Entdecker war. Insbesondere beim kunstvollen Versetzen wird Bach von der mathematischen *ars combinatoria*, der Kunst des Kombinierens, des Gottfried Wilhelm Leibniz geleitet: Man trifft oft auf die Versetzung der vier Töne a, b, c, h, wobei die Anordnung a-b-h-c einem *Aufstieg*, die Anordnung c-h-b-a einem *Abstieg* und die dem Kreuzmuster entsprechende Anordnung b-a-c-h dem *Kreuz* (und natürlich auch zugleich dem Namen Bachs) entspricht.



Ein berühmtes Beispiel ist der abschließende Kontrapunkt in der »Kunst der Fuge«, worin **b-a-c-h** das letzte Thema der Fuge darstellt. Dass daran die Noten **cis-d** anschließen, deutet auf eine *Erhöhung* hin gemäß des in der Calov-Bibel von Bach markierten Wortes: »So demütigt euch nun unter die gewaltige Hand Gottes, dass er euch erhöhe zu seiner Zeit.«

Ein anderes Beispiel findet sich im ersten Takt des a-moll Präludiums aus dem zweiten Teil des »Wohltemperierten Klaviers«:



Der Sopran beginnt mit einer Schmerz ausdrückenden Tonfolge, wobei er die 4 Stufen der absteigenden Halbtonfolge **c-h-b-a** einbindet, die der Bass mit den 6 Tönen der absteigenden Halbtonfolge **a-gis-g-fis-f-e** zur Zahl 10 der göttlichen Gebote ergänzt.

Auf die Zahlenbeziehungen, die man aus dem Thema der in h-moll geschriebenen letzten Fuge vom ersten Teil des »Wohltemperierten Klaviers« entnehmen kann, wollen wir ausführlicher eingehen:



Die Fuge besitzt klangliche Verwandtschaft mit dem Kyrie der h-moll-Messe: nach dem zerlegten h-moll-Dreiklang folgen, ein Seufzen imitierend, Sekundschritte, bis das Thema mit einem zerlegten fis-moll-Dreiklang und der Rückkehr zur Dominante **fis** endet. Ein sehr verwandtes Thema spielt die Gambe in dem bezeichnenderweise ebenfalls in der Tonart h-moll verfassten Präludium vor dem »Es ist vollbracht« in der Johannes-Passion. Es mag auch kein Zufall sein, dass dieses Präludium aus 19 Takten besteht, während die Fuge in h-moll des »Wohltemperierten Klaviers« genau $4 \cdot 19 = 76$ Takte umfasst. Schließlich ist anzumerken, dass die Fuge aus 14 Einsätzen des Themas besteht – die Zahl $14 = 2 + 1 + 3 + 8$ entspricht numerologisch **B+A+C+H**, wenn man jedem Buchstaben seine Ordnungszahl im Alphabet zuweist; auf diese Weise hat Bach in der letzten Fuge seines monumentalen Werks das »Wohltemperierte Klavier« mit seiner Unterschrift versehen.

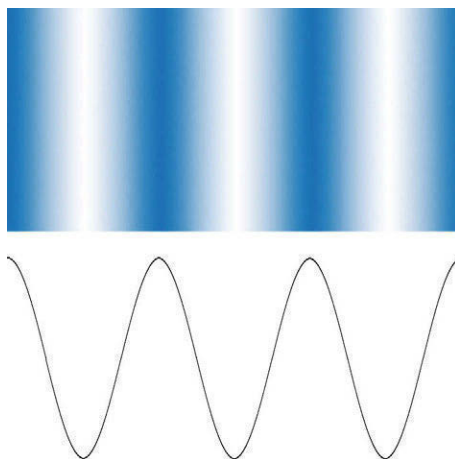
Zunächst ist bemerkenswert, dass das Fugenthema die gesamte Tonskala durchmisst: alle zwölf Töne erklingen. Die Zahl 12 symbolisiert nicht nur die gesamte Chromatik der Töne, sie steht überhaupt für die »Vollendung«, denn sie ist das Produkt $12 = 3 \cdot 4$ der Zahl 3 der Dimensionen des Raumes mit der Zahl 4 der

Himmelsrichtungen beziehungsweise der antiken Elemente Erde, Feuer, Wasser, Luft, zugleich ist sie die Zahl der Tierkreise am Himmel und der Monate des Jahres. Allerdings kommen im Fugenthema die zwölf Töne nicht wie in einer strengen Zwölftonreihe je einmal, sondern verschieden oft vor: am häufigsten, nämlich fünf mal ertönt *fi*s, die fünfte Stufe der Tonika *h*, fünf Töne erklingen tiefer als *fi*s und elf höher. In der Numerologie wurden die Zahlen 5 und 11 zumeist im tragischen Konnex gesehen: man denke an die fünf Wundmale des Gekreuzigten oder daran, dass 11 als »Übertretung« der Gesetzeszahl 10 die »Sünde« symbolisiert. In der Zahlensymbolik Bachs bedeutet eine Vertauschung der Ziffern oft die Umkehrung dessen, was das ursprüngliche Symbol darstellen wollte: steht 12 für die Vollendung der Welt, bedeutet 21 die Sehnsucht nach ihrer Erlösung – und aus 21 Noten besteht das Fugenthema ...

So reizvoll ein derartiges Hineinlesen symbolträchtiger Zahlen auch sein mag, es bleibt immer mehrdeutig, bezweifelbar, oberflächlich und gewinnt dem Zahlbegriff nur eine einzige, wenn auch schillernde Facette ab. Der Zusammenhang zwischen Zahl und Musik ist in Wahrheit viel tiefgründiger.

Beginnen wir mit der Feststellung, dass das Ohr beim Hören eines einzelnen Tons eine periodische Folge von Schwingungen wahrnimmt.

Wenn man eine Stimmgabel, oder mit modernen Mitteln noch besser: einen elektronischen Sinusgenerator tönen lässt, registriert unser Ohr die dabei erzeugte elementare *Sinusschwingung*: In der Einheit Hertz misst man ihre *Frequenz*, wie oft sich das Druckmaximum und Druckminimum in der Luft innerhalb einer Sekunde wiederholt. Der Oboist eines Orchesters teilt seinen Kollegen vor Eintritt des Dirigenten zum Beispiel die Frequenz 440 Hertz, also die Zahl von 440 Schwingungen in der Sekunde, als »Kammerton a« mit, indem er genau diesen Ton bläst, und die übrigen Musiker stimmen danach ihre Instrumente. Allerdings klingt selbst die näselnde Oboe angenehmer als der seltsam leere, »nackte«



25 Sinusschwingung: Bei der Ausbreitung eines Tones verdichtet sich die Luft sowohl zeitlich als auch räumlich periodisch.

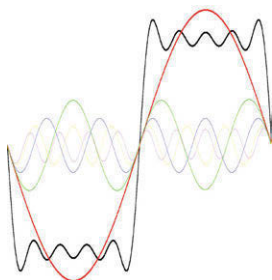
Ton einer Stimmgabel oder eines Sinusgenerators – dies liegt daran, dass im Klang eines Instruments, auch wenn sein Musiker nur einen einzigen Ton spielt, dieser eine Ton nicht als elementare Sinusschwingung mitgeteilt wird, sondern zusammen mit den Sinusschwingungen seiner *Obertöne*, das heißt mit den Tönen der doppelten, dreifachen, vierfachen, ... Frequenz verwoben ist. Bemerkenswerterweise waren die Obertöne der Antike noch unbekannt, sie wurden erst 1636 von Marin Mersenne entdeckt und 1702 von Joseph Sauveur genau erforscht; die physikalischen Zusammenhänge wurden schließlich 1878 in einer Schrift über »Die Theorie des Schalls« von Lord Rayleigh untersucht.



26 Joseph Fourier

Die Intensitäten, mit denen die Obertöne den Grundton bereichern, sind für die eigentümliche Klangfarbe jedes Instruments verantwortlich. Es war eine der bemerkenswertesten Entdeckungen der Mathematik des 19. Jahrhunderts, als Joseph Fourier feststellte, dass sich praktisch *jede* Schwingung durch eine Überlagerung ihres Grundtons mit seinen Obertönen realisieren lässt, die sich aus den ganzzahligen Frequenzen des Grundtons ergeben – die elektronischen Synthesizer nützen diese Einsicht Fouriers offensichtlich sehr erfolgreich aus.

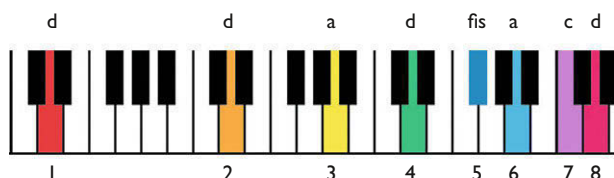
Es ist diese Einsicht, die den Zusammenhang von *Zahl* und *Klang* herstellt:



27 Die Summe von Grundschwingung und Oberschwingungen erzeugt einen Klang.

Spielt ein Pianist ein d mit 147 Hertz, hört das Ohr nicht nur den Grundton mit $1 \cdot 147 = 147$ Hertz, sondern auch das d in der Oktav mit $2 \cdot 147 = 294$ Hertz, das darauffolgende a mit $3 \cdot 147 = 441$ Hertz, das darauffolgende d mit $4 \cdot 147 = 588$ Hertz, das darauffolgende fis mit $5 \cdot 147 = 735$ Hertz, das darauffolgende a mit $6 \cdot 147 = 882$ Hertz, das darauffolgende c mit $7 \cdot 147 = 1029$ Hertz, das darauffolgende d mit $8 \cdot 147 = 1176$ Hertz, und so weiter. Nicht die Frequenzen der 147, 294, 441, 588, ... Hertz sind das für uns Maßgebliche – diese sind ja bloß durch die Übereinkunft des Kammertons festgelegt –, sondern die dabei aufscheinenden Faktoren: die *Zahlen* 1, 2, 3, 4, ...: sie teilen uns die *Verhältnisse* der Frequenzen aller je-

ner Sinusschwingungen mit, welche beim Spielen eines beliebigen Tons – in



28 Die Obertöne des Tones d auf der Tastatur des Klaviers

unserem Beispiel, an dem wir im folgenden festhalten wollen, des Tons d am Klavier – zusammen mit diesem Ton erklingen können.

Es sei gleich jetzt bemerkt, dass fast alles, was im vorigen Absatz geschrieben wurde, zwar vage, aber keineswegs völlig exakt stimmt. Im folgenden werden wir bald auf die Unkorrektheiten zu sprechen kommen, bis wir am Ende wieder zum Fugenthema vom »Wohltemperierten Klavier« zurückkehren. Halten wir zunächst fest:

Das Verhältnis der Frequenzen zweier Töne, eines ersten Tons oder Grundtons und eines zweiten Tons oder Zieltons, der zusammen mit oder unmittelbar nach dem Grundton gehört wird, nennen wir ein musikalisches Intervall. Ein Frequenzenverhältnis ist zugleich ein Zahlenverhältnis. Das elementarste der Intervalle ist die *Prim*, in der der Grundton mit sich selbst verglichen wird; ihr entspricht das Zahlenverhältnis $1 : 1 = 1$. Das nächstelementare Intervall ist die *Oktav*, in der der Ton mit der doppelten Frequenz, der erste Oberton, mit dem Grundton verglichen wird; ihr entspricht das Zahlenverhältnis $2 : 1 = 2$.

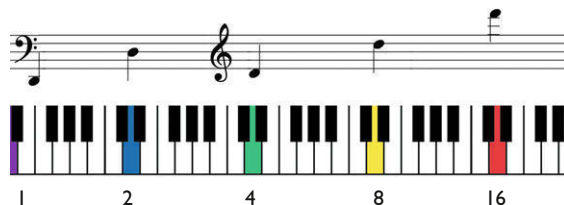
Was wir oben über die Oktav schrieben, stimmt uneingeschränkt. Es gilt sogar noch mehr: Würde man den höheren Ton der Oktav selbst wieder als Grundton spielen, kämen in seiner Obertonreihe – abgesehen vom ursprünglichen Grundton – *alle* Obertöne des ursprünglichen Grundtons wieder vor. Darum ist die Oktav, abgesehen von der Prim, das *konsonanteste* aller Intervalle, denn das Ohr hört die von diesen Tönen erzeugten Klänge als vollkommen zusammengehörig.

Die Zusammengehörigkeit der beiden Töne einer Oktav ist derart eng, dass unser Gehör um Oktaven verschobene Töne sogar als *gleich* empfindet. Anders ausgedrückt: Zwei Töne gelten als gleich, wenn die Frequenz des höheren durch fortgesetztes Verdoppeln aus der Frequenz des niedrigeren Tons gewonnen wird. Die Gleichwertigkeit sich bloß um Oktaven unterscheidender Töne spiegelt sich mathematisch in der folgenden *Übereinkunft* wieder:

Ein musikalisches Intervall ändert sich nicht, wenn man es mit 2 multipliziert (d. h. den zweiten Ton um eine Oktav höher spielt bzw. den ersten Ton um eine Oktav tiefer spielt); ein musikalisches Intervall ändert sich ebenfalls nicht, wenn man es durch 2 dividiert (d. h. den zweiten Ton um eine Oktav tiefer spielt bzw. den ersten Ton um eine Oktav höher spielt).

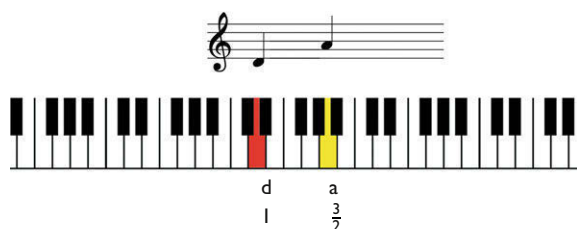
Diese Übereinkunft erlaubt, die Zahlenverhältnisse aller musikalischen Intervalle so zu beschränken, dass sie mindestens so groß wie 1, aber kleiner als 2

29 Die Oktaven erklingen in der doppelten, vierfachen, achtfachen, ... Frequenz des Grundtons.



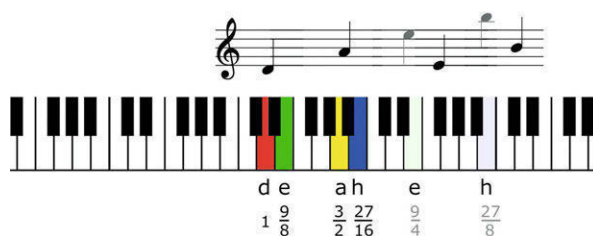
sind – musikalisch gesprochen: der zweite Ton eines Intervalls erklingt (nach geeignetem Oktavieren) stets mindestens so hoch wie der erste Ton, aber niedriger als dessen Oktav.

Betrachten wir als Beispiel die Obertonreihe des Grundtons **d**: Nach der Oktav folgt als nächstes der Oberton **a** mit der dreifachen Frequenz. Spielt man dieses **a** um eine Oktav tiefer, erhält man das Intervall **d-a**, dem das Zahlenverhältnis $3 : 2$ entspricht. Dies ist die *Quint*, ein ebenfalls konsonantes Intervall, weil jeder zweite Oberton von **a** mit jedem dritten Oberton von **d** übereinstimmt.



Es war die Idee des Pythagoras und seiner Schule, mit Hilfe der Quint zu weiteren Tönen zu gelangen: Nicht nur das Intervall **d-a**, auch das auf den Grundton **a** bezogene Intervall **a-e** ist Quint. Dies bedeutet, dass die Frequenz von **e** um den Faktor $3 : 2$ größer als jene von **a** ist, welche ihrerseits um den Faktor $3 : 2$ größer als jene des ursprünglichen Tons **d** war. Darum errechnet sich das Frequenzenverhältnis von **e** zu **d** als $(3 : 2) \cdot (3 : 2) = 9 : 4$. Spielt man dieses **e** eine Oktave tiefer, erhält man so mit **d** als Grundton die *Sekund* **d-e**, der das Zahlenverhältnis $9 : 8$ entspricht. Schließlich betrachten wir die auf den Grundton **e** bezogene Quint **e-h**: die Frequenz des Tones **h** ist um den Faktor $3 : 2$ größer als jene von **e**, folglich errechnet sich das Frequenzenverhältnis von **h** zu **d** als $(3 : 2) \cdot (9 : 8) = 27 : 16$, welches die *Sext* kennzeichnet.

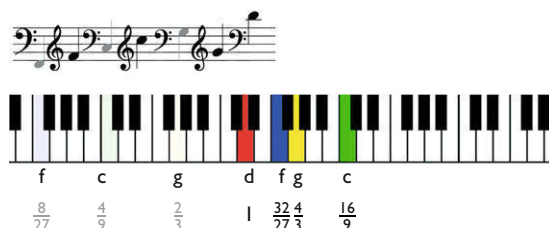
So kommen wir zu der folgenden Liste von Intervallen bzw. von Zahlenverhältnissen:



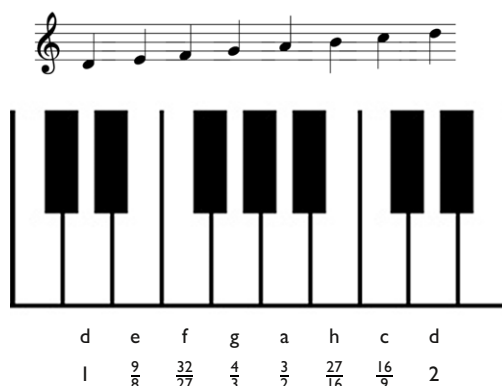
Ferner fragt Pythagoras nach jenem Grundton **g**, mit dem verglichen **d** eine Quint bildet: Weil das Frequenzenverhältnis **g-d** die Quint $3 : 2$ ist, muss das reziproke Frequenzenverhältnis **d-g** durch den Kehrwert $2 : 3$ gekennzeichnet sein; spielt man nun dieses **g** eine Oktav höher, bildet es zu **d** eine *Quart* **d-g**, der das Zahlenverhältnis $4 : 3$ entspricht. Wie schon zuvor kann man nun nach dem Grundton **c**

fragen, welcher mit *g* verglichen eine Quint bildet: Die Frequenz von *c* ist um den Faktor $2 : 3$ kleiner als jene von *g*, welche ihrerseits (nach der Oktavierung) um den Faktor $4 : 3$ größer als jene des ursprünglichen Tones *d* war. Das Verhältnis der Frequenz von *c* zu *d* beträgt folglich $(2 : 3) \cdot (4 : 3) = 8 : 9$; spielt man dieses *c* um eine Oktave höher, erhält man so mit *d* als Grundton die *Septim* *d-c*, der das Zahlenverhältnis $16 : 9$ entspricht. Schließlich betrachten wir den Grundton *f*, auf den sich die Quint *f-c* bezieht: die Frequenz des Tons *f* ist um den Faktor $2 : 3$ kleiner als jene von *c*, folglich errechnet sich das Frequenzenverhältnis von *f* zu *d* als $(2 : 3) \cdot (16 : 9) = 32 : 27$, welches die *Terz* kennzeichnet.¹¹

So kommen wir zu der folgenden Liste von Intervallen bzw. von Zahlenverhältnissen:



Auf diese Weise erhielten die Pythagoräer in der Skala einer Oktav die sieben Töne *d, e, f, g, a, h, c*, welche den weißen Tasten unseres Klaviers entsprechen.



Am nächsten kommen einander in dieser Skala die Töne *e* und *f* sowie die Töne *h* und *c*. Das Intervall *e-f* errechnet sich folgendermaßen: Wenn man die Frequenz von *e* mit $8 : 9$ multipliziert, gelangt man zur Frequenz des Tons *d*, diese mit $32 : 27$ multipliziert, ergibt die Frequenz des Tons *f*. Folglich lautet das Intervall *e-f*

$$(8 : 9) \cdot (32 : 27) = 256 : 243.$$

Analog errechnet sich das Intervall *h-c* als

$$(16 : 27) \cdot (16 : 9) = 256 : 243.$$

d a e h fis cis gis

1 $\frac{3}{2}$ $\frac{9}{4}$ $\frac{9}{8}$ $\frac{27}{8}$ $\frac{27}{16}$ $\frac{81}{16}$ $\frac{81}{64}$ $\frac{243}{32}$ $\frac{243}{128}$ $\frac{729}{64}$ $\frac{729}{512}$

30 Der aufsteigende Quintenturm von d bis gis

d g c f b es as

1 $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{4}{9}$ $\frac{16}{9}$ $\frac{8}{27}$ $\frac{32}{27}$ $\frac{16}{81}$ $\frac{128}{81}$ $\frac{32}{243}$ $\frac{256}{243}$ $\frac{64}{729}$ $\frac{1024}{729}$

31 Der absteigende Quartenturm von d bis as

Beide Male ergibt sich 256 : 243; es ist der sogenannte *Halbtonschritt*, ein außerordentlich dissonantes Intervall, denn erst jeder 256. Oberton von e bzw. von h stimmt mit jedem 243. Oberton von f bzw. von c überein.

Der Halbtonschritt erfordert, zu den bisher erhaltenen Ganztönen weitere Halbtöne hinzuzufügen – die diatonische Tonleiter wird zur chromatischen Tonleiter oder, einfacher ausgedrückt: die weißen Tasten des Klaviers werden um die schwarzen Tasten ergänzt. Zu diesem Zweck türmen wir wie vorher weitere Quinten auf- bzw. untereinander und versetzen die erhaltenen Töne so lange, bis sie in die Skala einer Oktav fallen: aufsteigend und absteigend.

Bricht man (willkürlich) bei gis beziehungsweise bei as ab und ordnet die Töne ihrer Höhe entsprechend an, bekommt man auf diese Weise die Intervalle der pythagoräischen Stimmung.

In dieser Skala liegen die Töne as und gis außerordentlich nahe benachbart: das Intervall as-gis errechnet sich als jenes Zahlenverhältnis, das man als Produkt des Intervalls as-d, also des Kehrwertes vom Intervall d-as, mit dem Intervall d-g erhält:

$$(729 : 1024) \cdot (729 : 512) = 531441 : 524288 = 1,0136.$$

Es unterscheidet sich also nur um $0,0136 \approx 1,4\%$ von der Prim – ein für den un-

as es b f c g d a e h fis cis gis

$\frac{1024}{729}$ $\frac{256}{243}$ $\frac{128}{81}$ $\frac{32}{27}$ $\frac{16}{9}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{1}{1}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{9}{8}$ $\frac{27}{16}$ $\frac{81}{64}$ $\frac{243}{128}$ $\frac{729}{512}$

$\frac{729}{1024} \cdot \frac{729}{512} = \frac{531441}{524288} = 1 + 1,36\%$

32 Zwölf aufeinandergetürmte Quinten (von as bis gis) ergeben fast genau sieben Oktaven.

geübten Musiker nicht erkennbarer Unterschied. Der Halbtonschritt $256:243 = 1,053497$ unterscheidet sich im Vergleich dazu um mehr als 5,3 % von der Prim. Der Unterschied zwischen *gis* und *as* von knapp 1,4 % ist das berühmte *pythagoräische Komma*. Er ist so gering, dass die Erfinder von Tasteninstrumenten darauf verzichteten, die Tonskala durch das Auftürmen weiterer Quinten zu bereichern – bildhaft gesprochen: auf dem Klavier kommen keine weiteren Tasten hinzu. Damit haben wir bereits eine der angekündigten Unkorrektheiten angesprochen: Der Pianist begeht sorgenlos die Sünde der *enharmonischen Verwechslung* und setzt *gis* mit *as*, in der Folge *dis* mit *es*, *ais* mit *b* und so weiter gleich, obwohl dies genau genommen verboten ist¹² (und ein Geiger, der auf seiner Violine die Töne intoniert, dieses Verbot auch beachtet).

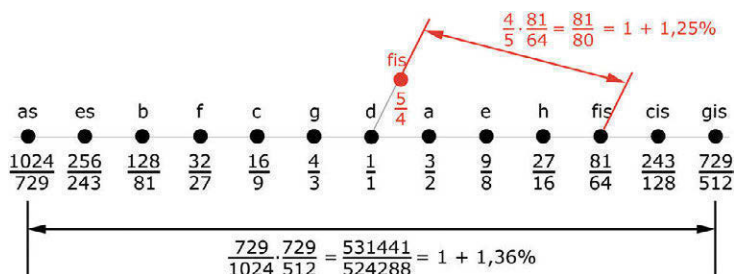
Viel einschneidender als das pythagoräische Komma empfindet der Musiker der Neuzeit die Tatsache, dass im pythagoräischen System die große Terz *d-fis* als *dissonantes* Intervall $81:64$ gespielt wird: nur jeder 81. Oberton von *d* stimmt mit jedem 64. Oberton von *fis* überein. In Wahrheit ertönt das *fis* als vierter Oberton in der Obertonreihe von *d*, besitzt folglich die *fünffache* Frequenz des Grundtons. Versetzt man diesen Oberton zwei Oktaven tiefer, erhält man so die *konsonante* große Terz *d-fis* als Zahlenverhältnis $5:4$: jeder vierte Oberton von *fis* stimmt mit jedem fünften Oberton von *d* überein. Den Unterschied zwischen der konsonanten großen Terz und der (etwas höher liegenden) dissonanten pythagoräischen großen Terz errechnet man genauso wie oben das Intervall *as-gis* ermittelt wurde: der Kehrwert von $5:4$ wird mit $81:64$ multipliziert:

$$(4:5) \cdot (81:64) = 81:80 = 1,0125.$$

Dieser Unterschied von 1,25 % zur Prim heißt das *syntonische Komma*. Es wird vermieden, wenn man sich von der Methode der Pythagoräer, allein mit Hilfe von Quinten zu Tönen zu gelangen, löst:

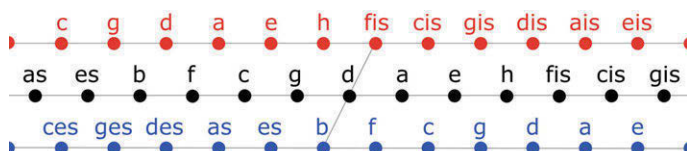
Die Quintenstimmung der Pythagoräer ist in gewisser Hinsicht eindimensional: alle Töne entstehen bloß aus Quinten (welche durch die Primzahl 3 gekennzeichnet ist) – sieht man von den Versetzungen um Oktaven (gekennzeichnet durch die Primzahl 2) ab. Darum sind bei den Intervallen der Quintenstimmung die Zähler und Nenner nur durch 2 und durch 3 teilbar. Die neuzeitliche eu-

³³ Die pythagoräische Terz unterscheidet sich um $80:81$ von der reinen Terz.

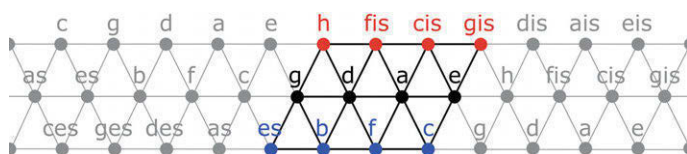


ropäische Musik definiert statt $81:64$ das Zahlenverhältnis $5:4$ als große Terz und erhält auf diese Weise die Töne in der *harmonischen* oder *reinen* Stimmung, welche zweidimensional ist: alle Töne entstehen entweder aus Quinten (welche durch die Primzahl 3 gekennzeichnet ist) oder aus großen Terzen (welche durch die Primzahl 5 gekennzeichnet ist):

Die beiden Töne *h* und *fis* zeichnen wir eine Stufe *über* die sich entlang einer eindimensionalen Geraden erstreckenden Quinten $\dots$ -*as-es-b-f-c-g-d-a-e-h*-*fis-cis-gis*- $\dots$ ein: auch sie sind Stützpunkte einer dazu parallel liegenden Geraden, entlang der sich die Quinten $\dots$ -*f-c-g-d-a-e-h-fis-cis-gis-dis-ais-eis*- $\dots$ erstrecken. Ebenso zeichnen wir die beiden Töne *b* und *f* eine Stufe *unter* die sich entlang einer eindimensionalen Geraden erstreckenden Quinten $\dots$ -*as-es-b-f-c-g-d-a-e-h*-*fis-cis-gis*- $\dots$ ein: auch sie sind Stützpunkte einer dazu parallel liegenden Geraden, entlang der sich die Quinten $\dots$ -*ces-ges-des-as-es-b-f-c-g-d-a-e-h*- $\dots$ erstrecken.



Geometrisch bilden die zwölf Töne der chromatischen Skala ein Parallelogramm, wobei die Paralleelseiten, welche die Richtung der Quint einschlagen, jeweils vier und die Paralleelseiten, welche die Richtung der großen Terz einschlagen, jeweils drei Töne tragen.



Die Zahlenverhältnisse für die konsonanten Intervalle, welche in der zweidimensionalen Ebene ein Sechseck aufspannen, lauten folgendermaßen: Die nach der *Prim* bzw. der *Oktav* *d-d* konsonantesten Intervalle bleiben die *Quint* *d-a* und die *Quart* *d-g*. Als konsonante Intervalle gelten die *große Terz* *d-fis* und die *kleine Sext* *d-b*, welche aus der Umkehrung der großen Terz (mit nachfolgender Oktavierung) entsteht. Schließlich gelten als konsonante Intervalle noch die *kleine Terz* *d-f* und die *große Sext* *d-h*: die Töne *f* bzw. *h* sind in ihnen so festgelegt, dass *f-a* bzw. *g-h* eine große Terz bilden.

Der Zahlen gigantische Schatten

Mathematik im Zeichen der Zeit

Taschner, R.

2017, VII, 257 S. 192 Abb., 145 Abb. in Farbe.,

Hardcover

ISBN: 978-3-658-13892-9