2 Werkzeugkasten

Übersicht

In meinem Keller habe ich etliche geerbte Werkzeuge. Wenn ich ein Handwerksproblem habe, sehe ich nach, ob es nicht ein gut passendes Werkzeug dafür gibt. So ähnlich stelle ich mir Ihren Umgang mit diesem Werkzeugkasten vor.

Widmen Sie sich einer Kurvenfamilie und sehen Sie hier nach, wenn Ihnen die Erklärungen dort nicht reichen oder wenn Sie weitere Ideen haben und dafür nach Möglichkeiten suchen. Hier sind Grundelemente dargestellt, die bei den einzelnen Kurven nicht jedes Mal neu erklärt werden konnten.

Sollten Sie noch wenig mathematische Erfahrung haben, dann lesen Sie hier „sanfte Einführungen“. Sie sollten aber den Mut haben, Abschnitte zu überspringen, die bei Ihnen noch nicht auf „fruchtbaren Boden“ fallen.

Zwei Ausnahmen gibt es von dieser generellen Empfehlung:
Erstens: Grundbegriffe wie Kurve, Kurvengleichung, algebraisch, transzendent werden nur hier erklärt.
Zweitens: Die Tipps zu GeoGebra helfen wirklich.

2.1 Wie entsteht eine Kurve geometrisch?

Es geht in diesem Kapitel um Handwerkszeug, also mit welchen Werkzeugen erzeugt man Kurven? Jeder hat Erfahrungen mit Zirkel und Lineal, aber man kann auch Freihandkurven zeichnen oder an Kreis, Gerade und andere Kurven einfach nur *denken*. Jedenfalls

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2017
D. Haftendorn, *Kurven erkunden und verstehen*, DOI 10.1007/978-3-658-14749-5_2

soll eine mathematische Kurve **keine Breite** haben, wie ja auch ein mathematischer Punkt keine Ausdehnung hat.

Zudem soll der Kurvenbegriff so allgemein sein, dass auch Geraden zu den Kurven zählen. Vertiefen können wir ihn erst nach der Verbindung mit Koordinaten und Funktionen in nächsten Abschnitten. Ausdrücklich geht Abschnitt 2.5 auf den Kurvenbegriff ein.

Eine **geometrische Kurve** stellen wir uns zu recht irgendwie mit geometrischen Werkzeugen erzeugt vor. Solche sind nicht nur Zirkel, Lineal und Geodreieck, sondern auch Stangengelenke, wie sie in Abschnitt 4.4.3 gezeigt sind. Heutzutage gehören aber auch die als Computersoftware realisierten dynamischen Geometriesysteme, kurz DGS, dazu. Sie bauen ähnlich wie ein guter Geometrieunterricht mit Zirkel und Lineal Grundkonstruktionen wie Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende u. s. w. auf, die dann wieder zu Werkzeugen werden und so fort.

In einer entscheidenden Hinsicht kommen die DGS aber sehr viel weiter, als es die Arbeit mit Papier und Stift vermag: **Die DGS können die Ortslinie eines Punktes kontinuierlich zeichnen**. In der Mathematik wird synonym **Ortskurve** und **geometrischer Ort** verwendet. Der Begriff der **Ortskurve** ist schon seit der Antike bekannt. Zum Beispiel sagt man: Der Kreis ist der geometrische Ort aller Punkte, die von einem festen Punkt denselben Abstand haben. Oder: Die Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte, die von zwei festen Punkten dieselbe Abstandssumme haben. Sehr viele Kurven dieses Buches sind solche Ortskurven. Da werde ich nun gar nichts weiter erklären, denn wenn Sie per Daumenkino durch das Buch blättern, sehen Sie immer wieder Kreise und Geraden, die die unterschiedlichsten Kurven entstehen lassen. Bei den einzelnen Kurven ist die genaue geometrische Betrachtung dann ein Kernpunkt. GeoGebra ist eher ein umfassendes „Dynamisches Mathematiksytem“, ein **DMS**, denn es geht weit über die Geometrie hinaus, siehe Abschnitt 2.7.

2.2 Was bedeuten Gleichungen mit x und y?

Mit dem rechtwinkligen Koordinatensystem, bei dem nach rechts die x-Achse und nach oben die y-Achse zeigt, sind Sie seit der schulischen Sekundarstufe vertraut. Gemessen aber daran, dass sehr viele der in diesem Buch behandelten Kurven seit der Antike (erste Blütezeit etwa 300 v. Chr.) bekannt sind, war es im Jahre 1637 eine bemerkenswerte Leistung von Renè Descartes, lateinisiert *Cartesius*, die Punkte P mit den Koordinaten x und y mit den geometrisch erzeugten Punkten in *einem* Konzept zusammenzuführen. Daher spricht man von einem **kartesischen Koordinatensystem.**

Zu den Namen der Variablen Selbstverständlich sind in der Mathematik die Namen der Variablen nicht wesentlich. Jedoch sind in den Anwendungen der Mathematik spezielle Namen üblich. Physiker nehmen t für die Zeit, meist als Rechtsachse, s für den Weg, v für die Geschwindigkeit und viele andere Namen für die zahlreichen physikalischen Größen. Die Ökonomen möchten K für die Kosten, S für die Stückkosten u. s. w. Die x-y-Zusammenhänge lassen sich auf alles übertragen.

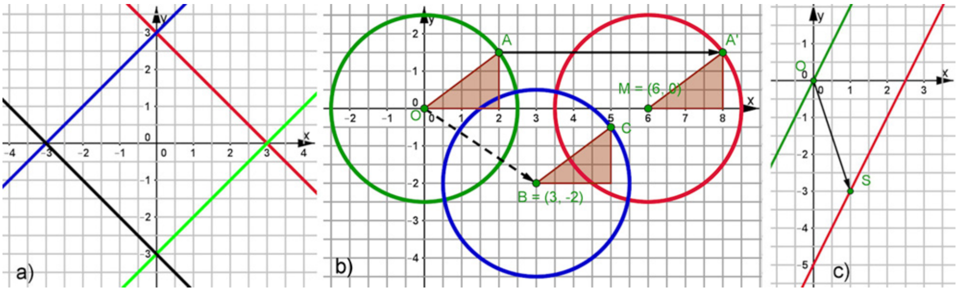

Abb. 2.1 Gleichungen verstehen: a) implizite Geradengleichungen entdecken, b) Gleichungen für verschobene Kreise, c) Gleichung für eine verschobene Gerade

2.2.1 Punkte und Geraden

2.2.1.1 Entdeckung des Zusammenhanges von Gerade und Gleichung

In Abb. 2.1 a) sollen Lernende Koordinaten x und y von Punkten notieren, die auf *einer* der Graden liegen. (Es gelten die Kästchenkreuzungspunkte.) Die vom Lehrenden gestellte **Leitfrage** ist: *Wie muss man mit x und y rechnen, damit 3 herauskommt.*
Für die rote Gerade: $P = (1, 2)$ liegt auf ihr, man muss $x + y = 3$ rechnen, das gilt für alle ihre Punkte. Also sagt man: $\boldsymbol{x + y = 3}$ **ist die Gleichung der roten Geraden**. Entsprechend erhält man für die grüne Gerade die Gleichung $x - y = 3$, für die schwarze $-x - y = 3$ und für die blaue Gerade $-x + y = 3$. Auch alle Zwischenpunkte auf den Geraden erfüllen die Gleichung *ihrer* Geraden.

2.2.1.2 Anmerkung zur Schreibweise von Geraden und Punkten

Als Einführung (in Klasse 7 oder 8) beugt dieses Vorgehen der Fixierung auf Funktionen vor. Jede Gleichung mit $a\,x + b\,y = c$ ist eine Geradengleichung. Diese Darstellung ist in der österreichischen Mathematik in Schulen üblich, daher kann man (außer für $b = 0$) in der aus Österreich kommenden Software GeoGebra (siehe Abschnitt 2.7) zwischen dieser und der nach y aufgelösten Form umschalten.

Punktschreibweise In diesem Buch werden Punkte mit einer Gleichung geschrieben, also $P = (x, y)$ oder wie in Abb. 2.1 b) $B = (3, -2)$. Früher übliche Schreibweisen wie $B(3; -2)$ oder $B(3| - 2)$ sind **unverträglich** mit mathematischer Software und sie verschleiern die mathematische Tatsache, dass $(3, -2)$ auch ohne Benennung ein Punkt ist. Das Gleichheitszeichen ist eine Zuweisung, die dem B diesen Punkt zuweist. In GeoGebra kann man als Zugeständnis an Schulbücher in Deutschland zwischen mehreren Punktdarstellungen umschalten. Die Semikolon-Art ist aber nicht dabei, weil sie für Polarkoordinaten reserviert ist. Beim CAS-Taschenrechner und anderer Software ist der Strich | der Mit-Operator oder hat eine ganz andere Funktion. Man kann ihn also auch nicht nehmen.

Ein Problem haben wir in Deutschland mit dem Komma, das weltweit in der Informatik ein „Listentrenner“ ist. GeoGebra, das in etwa 50 Sprachen übersetzt ist, schreibt bei Zahlen den **Dezimalpunkt**, so ist es auch in diesem Buch.

In einem **kartesischen** Koordinatensystem hat ein Punkt $P = (x, y)$ die **Abszisse** x und die **Ordinate** y. Eine Gerade hat, mit geeigneten reellen Zahlen a, b, c, die Gleichung:

$$a\,x + b\,y = c \tag{2.1}$$

2.2.2 Kreise und Grundlegendes

Am Beispiel der Kreise entsteht ein Grundverständnis von Kurvengleichungen und Verschiebungen von Kurven.

2.2.2.1 Die Kreisgleichung

Besonders wichtig wird für das Folgende die Kreisgleichung. In Abb. 2.1 b) ergibt sie sich für den grünen Kreis mit $r = 2.5$ sofort aus dem Satz des Pythagoras für das Dreieck mit der Hypotenuse $\overline{OA}$: $x^2 + y^2 = r^2$. Dabei ist (x, y) als beliebiger Kreispunkt aufgefasst. Nehmen wir nun dieses spezielle $A = (2, 1.5)$, so ergibt sich beim Einsetzen in die Gleichung $2^2 + 1.5^2 = 2.5^2$, also $4 + 2.25 = 6.25$ und dann $6.25 = 6.25$. Dies ist eine **wahre Aussage**. Also liegt A auf dem Kreis. Führen wir den Test für den in der Nähe liegenden Punkt $D = (2.3, 1)$ durch, so folgt links $2.3^2 + 1^2 = 5.29 + 1 = 6.29$, aber rechts $2.5^2 = 6.25$. Es ist $6.29 = 6.25$ eine **falsche Aussage**. Darum liegt D *nicht* auf dem Kreis. Einen weiteren Vorschlag, dieses ordentlich aufzuschreiben, finden Sie *vor* Satz 2.1.

Genau die Punkte, deren Koordinaten beim Einsetzen in die Kurvengleichung eine **wahre Aussage** erzeugen, liegen auf der Kurve.

Das Wort „genau“ besagt dabei auch gleich: Ein Punkt, dessen Koordinaten die Gleichung nicht erfüllen, liegt **nicht auf der Kurve**.

Die Abb. 2.1 b) dient nun dazu, Gleichungen für **verschobene Kreise** zu erklären. Sie sehen, dass das kleine Erklärungsdreieck ebenfalls verschoben ist. Seine Breite ist für den roten Kreis mit Mittelpunkt $M = (6, 0)$ allgemein $(x - 6)$, konkret für $A' = (8, 1.5)$: $(8 - 6) = 2$. Darum ist wieder mit Pythagoras $\boldsymbol{(x - 6)^2 + y^2 = r^2}$.
Beim blauen Kreis haben wir auch bei den Ordinaten die Veränderung, nun allgemein

$(y - (-2)) = (y + 2)$, konkret (-0.5+2)=1.5. Damit liefert wieder der Pythagoras die Kreisgleichung für den blauen Kreis $\boldsymbol{(x-3)^2 + (y+2)^2 = r^2}$.

In kartesischen Koordinaten haben **Kreise mit dem Radius** r eine der Gleichungen:

$$\begin{array}{rll} \text{allgemein} & \text{Mittelpunkt } (m,n) & (x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2 \\ \text{speziell} & \text{Mittelpunkt } (0,0) & x^2 + y^2 = r^2 \end{array} \tag{2.2}$$

2.2.3 Allgemeine Kurvengleichung und Verschiebung

2.2.3.1 Entwicklung des Grundverständnisses an Parabel und Lemniskate

Eine Kurvengleichung hat oft die Gestalt $Term_{links}(x,y) = Term_{rechts}(x,y)$. Die runden Klammern liest man als „von x und y“ und meint damit, dass die linke bzw. rechte Seite der Gleichung „irgendwie“ von x und y abhängig ist. Alle in der Algebra der Sekundarstufe erlaubten Gleichungsumformungen lassen die durch die Gleichung dargestellte Kurve unverändert. Bei Division und Multiplikation mit Termen, die null werden können, müssen Fallunterscheidungen getroffen werden. Das hat man damals gelernt, hier wird an den passenden Stellen solches Vorgehen gezeigt.

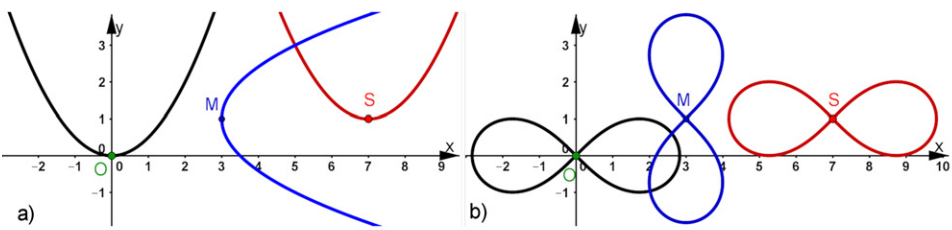

Abb. 2.2 Kurvengleichungen und Verschiebungen: a) schwarze Parabel $y - \frac{1}{2}x^2 = 0$, b) schwarze Lemniskate $(x^2+y^2)^2 - 2e^2(x^2-y^2) = 0$. Die Gleichungen der farbigen Varianten stehen am Ende des Abschnitts.

Insbesondere kann man stets ohne Probleme den $Term_{rechts}(x,y)$ subtrahieren. So ist es in Abb. 2.2 getan worden. Dadurch erhält man die sogenannte **Standardform** $\boldsymbol{F(x,y) = 0}$ **der Kurvengleichung**. Sie ist für allgemeine und theoretische Aussagen sehr nützlich. Aber auch bei einigen interessanten Weiterführungen, insbesondere in Abschnitt 5.3, setzt man die Standardform ein. Dabei ist F ist eine **Funktion** mit der Eigenschaft, dass bei Einsetzung der Koordinaten eines Kurvenpunktes wirklich null herauskommt.

In diesem Lichte können wir nochmals den Test für den Punkt $D = (2.3, 1)$ im grünen Kreis in Abb. 2.1 b) machen: Er ist mit $F(2.3,1) = 2.3^2 + 1^2 - 2.5^2 = 5.29 + 1 - 6.25 = 6.29 - 6.25 = 0.04 \neq 0$ nun gut aufgeschrieben.

Satz 2.1 (Kurvenpunkte und Kurvengleichung)
Gegeben sei eine Funktion F, die von x und y und evtl. noch von Parametern a, b, $\cdots$ abhängt. Dann ist

$$F(x, y) = 0 \qquad \text{eine Kurvengleichung in Standardform.} \tag{2.3}$$

Genau die Punkte $P = (x, y)$, welche die Gleichung erfüllen, liegen auf der Kurve.
*Gelingt es, die Kurvengleichung nach y – oder wenigstens nach x – aufzulösen, hat man eine **explizite kartesische Gleichung**. Anderenfalls hat man eine **implizite kartesische Gleichung**.*

In Abb. 2.2 sind Ihnen die Parabelgleichungen in der expliziten Form vertraut, für die schwarze Parabel $y = \frac{1}{2}x^2$. Für die Lemniskate (siehe Abschnitt 4.4.1) bleibt man bei der impliziten kartesischen Gleichung, allenfalls ist die Gleichung $(x^2 + y^2)^2 = 2e^2(x^2 - y^2)$ üblich.

Kurven verschieben
Sei $G = (g_x, g_y)$ ein beliebiger Punkt und $\vec{g} = \binom{g_x}{g_y}$, dann ist:

$$F(x - g_x, y - g_y) = 0 \tag{2.4}$$

die Gleichung der um den Vektor $\vec{g}$ verschobenen Kurve $F(x, y) = 0$.

Gleichungen für die Kurven in Abb. 2.2:

Grundform	Parabel	$y - \frac{1}{2}x^2 = 0$
	Lemniskate	$(x^2 + y^2)^2 - 2e^2(x^2 - y^2) = 0$
durch $S = (7, 1)$	Parabel	$(y - 1) - \frac{1}{2}(x - 7)^2 = 0$
	Lemniskate	$((x - 7)^2 + (y - 1)^2)^2 - 2e^2((x - 7)^2 - (y - 1)^2) = 0$
Tausch $x$und y	Parabel	$x - \frac{1}{2}y^2 = 0$
	Lemniskate	$(x^2 + y^2)^2 - 2e^2(y^2 - x^2) = 0$
durch $M = (3, 1)$	Parabel	$(x - 3) - \frac{1}{2}(y - 1)^2 = 0$
	Lemniskate	$((x - 3)^2 + (y - 1)^2)^2 - 2e^2((y - 1)^2 - (x - 3)^2) = 0$

Auch für die üblichen expliziten Kurven: $y = f(x)$ wird zu $y - g_y = f(x - g_x)$. Vertraut ist Ihnen für die rote Parabel $y = \frac{1}{2}(x - 7)^2 + 1$. Beachten Sie: hier auf der rechten Seite steht $+1$ für das Hochschieben, aber in der Standardform wird y durch $y - 1$ ersetzt.

2.2.3.2 Parameter in Kurvengleichungen

Parameter – betonen Sie Parámeter – werden auch *Formvariable* genannt. In der Gleichung der Lemniskate in Abb. 2.2 ist der Parameter e enthalten. In der Zeichnung ist $e = 2$ gewählt. Für größere e wird die Lemniskate größer.

Wenn $F(x, y) = 0$ Parameter enthält, wird durch die Gleichung nicht eine einzige Kurve, sondern eine ganze **Schar von Kurven** beschrieben, die bei Variation der Parameterwerte ihre Form ändern. In GeoGebra realisiert man Parameter als Schieberegler und kann dann beobachten, wie sich die Kurvenform *kontinuierlich* verändert. Gerade hier zeigt sich eine große Bereicherung, die das Thema Kurven durch die Arbeit mit dem Computer erfährt.

2.2.3.3 Kurven, auf denen ein bestimmter Punkt P_0 liegt

Kommt beim Einsetzen eines Punktes $P_0 = (x_0, y_0)$ die Gleichung $F(x, y) = 0$ eine Gleichung heraus, die noch Parameter enthält, so liegt P_0 *nicht auf jeder* der durch die Parameter beschriebenen Kurven.

Aber der Punkt definiert eine Teilmenge aller durch $F(x, y) = 0$ beschriebenen Kurven dadurch, dass $F(x_0, y_0) = 0$ *gefordert* wird.
Zum Beispiel ergibt sich aus der Geradengleichung 2.1 dann zunächst $a\,x_0 + b\,y_0 = c$. Wir wählen nun c genau so, wie es hier steht, und erhalten, eingesetzt in Gleichung 2.1 und links zusammengefasst: $\boldsymbol{a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0}$. Bei jeder Wahl von a und b erfüllt P_0 offensichtlich diese Gleichung. Sie beschreibt also das **Geradenbüschel** durch P_0.

In Abb. 2.1 ist dieses mit der *Verschiebungsidee* aus Gleichung 2.4 zusammengebracht: Die Ursprungsgerade hat die Gleichung $y = 2x$, dann hat die parallele Gerade durch $P_0 = S = (1, -3)$ die Gleichung y-(-3)=2 (x-1), das passt zu $2(x - 1) - (y - (-3)) = 0$ aus dem vorigen Absatz. Die explizite Schreibweise ist $y = 2(x - 1) - 3$ oder aufgelöst $y = 2x - 6$.

Eine Gerade mit Steigung m durch den Punkt $P = (x_0, y_0)$ hat die Gleichung

$$m(x - x_0) - (y - y_0) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = m(x - x_0)\,x + y_0 \tag{2.5}$$

Besonders die rechte Darstellung werden Sie in diesem Buch mindestens hundert Mal ohne weitere Bemerkung finden. Sie wird **Punkt-Steigungs-Form** der Geradengleichung genannt. Man lernt so etwas nicht auswendig, schlägt es auch nicht in der Formelsammlung nach. **Sehen** Sie die **Verschiebung**!

2.3 Was sind Polarkoordinaten?

Definition 2.1 **(Polarkoordinaten, Teil 1)**
Ein Punkt P habe in kartesischen Koordinaten die Darstellung $\boldsymbol{P = (x, y)}$.
P hat einen Abstand r zum **Pol** O, den **Polarradius**. Der Strahl OP heißt **Fahrstrahl**.
Den **Polarwinkel** θ misst man stets in **mathematisch positivem Sinn**, also gegen den Uhrzeigersinn. Der Punkt P hat nun die **Polardarstellung** $\boldsymbol{P = (r; \theta)}$.

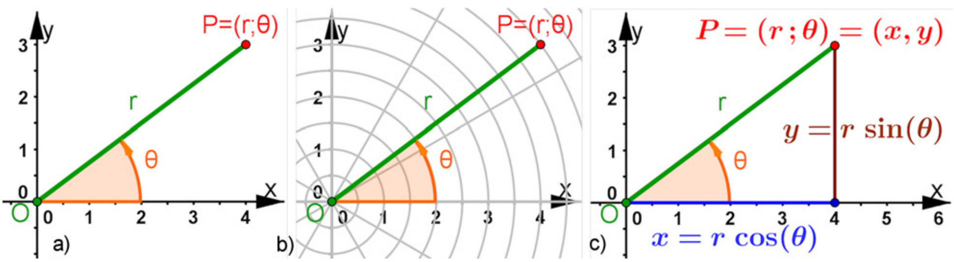

Abb. 2.3 Polarkoordinaten verstehen: a) Grundaussage, b) Grundaussage im „Polargitter“, c) begründet die Grundgleichungen 2.6

$$\textbf{Grundgleichungen:}\quad \boldsymbol{x = r\cos(\theta),\quad y = r\sin(\theta),\quad r^2 = x^2 + y^2} \tag{2.6}$$

Keine Einschränkungen für r und θ Es gibt Autoren, die keine negativen Radien erlauben oder den Winkel auf Werte $0 \le \theta < 2\pi$ beschränkt sehen wollen. Damit können dann aber Kurven nicht angemessen beschrieben werden. Dies zeigt sich in Abschnitt 2.3.4 und wird in Abschnitt 3.2.1.5 ausführlich diskutiert. Für das Thema Kurven braucht man alle reellen r- und θ-Werte. Wir müssen also die obige Grunddefinition erweitern.

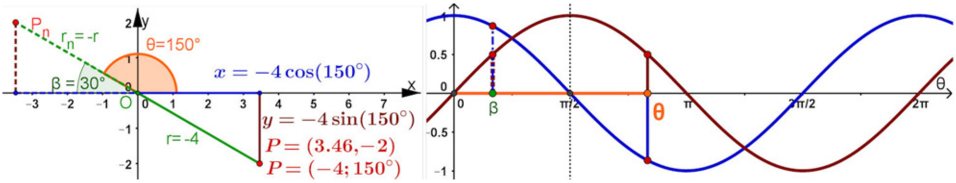

Abb. 2.4 Polarkoordinaten Definition Teil 2: a) Für negative Polarradien wird $P_n = (|r|; \theta)$ am Ursprung gespiegelt. b) Die Grundgleichungen 2.6 gelten weiterhin.

Definition 2.2 (Polarkoordinaten, Teil 2)
In der Darstellung $P = (r; \theta)$ sind alle reellen Werte von r und θ erlaubt. Es ist $|r|$ der (geometrische) Abstand von P vom Ursprung.
Ist r **positiv**, dann bildet die positive x-Achse, genannt **Polarachse**, mit dem Fahrstrahl den Winkel θ (siehe Abb. 2.3).
Ist r negativ, dann bildet die **Polarachse** mit der rückwärtigen Verlängerung des Fahrstrahls den Winkel θ.
Alternative Sprechweise: Bei negativem r ergibt sich mit $|r|$ und dem Polarwinkel θ zunächst ein Punkt P_n, den man noch am Ursprung spiegeln muss, um P zu erhalten (siehe Abb. 2.4).
Ein negatives θ wird, wie stets mathematisch üblich, im Uhrzeigersinn von der positven x-Achse aus gemessen.

Es geht in Abb. 2.4 um einen Punkt P mit negativem Polarradius und einem positiven stumpfen Winkel θ. In Bild a) zeigt der zweite Schenkel von $\theta = 150^o$ zu dem Hilfspunkt $P_n = (4; 150^o)$. Für diesen Winkel ist aber in Bild b) der Kosinus (blau) negativ. Es liegt also $P = (-4; 150^o) = (x, y)$ mit $x = -4 \cdot \cos(150^o)) = +3.46$ und $y = -4 \cdot \sin(150^o)) = -2$ an der von der Definition geforderten Stelle. Eine Übung und Aufgabe zu Polarkoordinaten finden Sie auf der Website zum Buch.

Die Grundgleichungen 2.6 gelten für positive und negative Polarradien und für alle reellen θ-Werte ohne Einschränkungen.

Wenn Sie mit diesen Grundlagen schon etwas vertraut sind und sich vor allem für **Kurven und ihre Polargleichungen** interessieren, dann springen Sie zu Abschnitt 2.3.2.

2.3.1 Polarkoordinaten lesen und verstehen

2.3.1.1 Anmerkung zur Benennung θ und den Winkelwerten

In der deutschen Mathematik nannte man den Polarwinkel φ (sprich phi). Da aber unsere Mathematikwerkzeuge in Amerika konzipiert wurden und da dort θ (sprich theta) üblich ist, wird insbesondere bei grafikfähigen Taschenrechnern θ vorgegeben, beim TI-Nspire gibt es eine Taste für θ, aber nicht für φ. Daher habe ich mich für θ entschieden.

Meist, besonders in beliebigen Funktionen, ist der Polarwinkel im **Bogenmaß**, also als reine Zahl, zu messen. Würde man z. B. bei der Spirale $r(\theta) = \theta$ den Winkel im Gradmaß messen, könnte man $r(\theta)$ nicht direkt als Abstand deuten. Eine Hilfe bietet in GeoGebra das Polargitter, dass man anstelle des Karogitters einschalten kann.
Am besten prägt man sich ein: $\frac{\pi}{4} = 45^o$, $\frac{\pi}{2} = 90^o$, $\pi = 180^o$, $2\pi = 360^o$, $\cdots$.

Übrigens steht da ein =-Zeichen, weil man das Zeichen ^{o} als Faktor $\frac{\pi}{180}$ auffassen kann. Für Zaghafte: Es ist $45^o = 45 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4}$.

2.3.1.2 Eindeutigkeit und Mehrdeutigkeit

Die kartesische Darstellung $P = (x, y)$ ist **eindeutig**, die Polardarstellung aber **mehrdeutig**. Einem Punkt P sieht man nicht an, ob zu ihm ein positiver oder negativer Polarradius gehört, oder ob der Polarwinkel positiv oder negativ ist, oder ob der Polarwinkel noch Vielfache von 2π enthält.

GeoGebra stellt alle Punkte, die sich aus Kurvengleichungen ergeben, richtig dar, schreibt sie aber im Algebrafenster nur mit den **Hauptwerten** – positivem r und $0 \leq \theta < 360^o$ – auf. Im Zusammenhang mit Kurven ist es stets einfach zu entscheiden, ob der Radius nun positiv oder negativ zu nehmen ist, oder ob der Winkel schon um Vielfache von 2π größer ist als der angezeigte. Besonders hilfreich ist dabei die polarkartesische Darstellung aus Abschnitt 2.3.4. Eine weitere Erklärung und eine Aufgabe dazu finden Sie auf der Website zum Buch.

2.3.2 Polarkurven

Durch die Grundgleichungen 2.6 sind die kartesischen Koordinaten mit den Polarkoordinaten verknüpft. Daher kann man kartesische Kurvengleichungen in Gleichungen umschreiben, die nur noch r und θ enthalten. Ein Kreis mit dem Mittelpunkt (m, n) hat dann nach Gleichung 2.2 die Gleichung $(r\cos(\theta) - m)^2 + (r\sin(\theta) - n)^2 = \varrho^2$, der griechische Buchstabe ϱ (sprich *rho*) steht nun für den festen Kreisradius. Genau alle Punkte $P = (r; \theta)$, die diese Gleichung erfüllen, liegen auf dem Kreis. Dieses ist eine **implizite Polargleichung**. Solche sind unüblich, man bemüht sich, sie nach r aufzulösen. Wenn das gelingt, hat man eine Gleichung $r = r(\theta)$, rechts steht also ein Term, der von θ abhängt.

Durch eine Polargleichung $r = r(\theta)$ kann eine **Polarkurve** beschrieben werden. Der Polarradius ist dann eine **Funktion** von θ. Nicht jede Kurve hat eine solche (nach r aufgelöste) Polargleichung.

Anmerkung zur Schreibweise Es ist in $r = r(\theta)$ das r sowohl der Name der *Funktion* als auch Name des Wertes, der sich beim Einsetzen von θ ergibt. Schulnahe Autoren nehmen z. T. als Funktionsnamen einen anderen Buchstaben. Man schreibt heute nicht mehr $y = y(x)$, sondern $y = f(x)$. Beim Lernen des Funktionsbegriffes ist das auch förderlich. Bei den Polarkoordinaten ist die oben genannte Schreibweise weltweit üblich, ein weiterer Buchstabe stiftete eher nur Verwirrung. Ähnlich schreiben die Physiker $s = s(t)$, weil sonst zur Vielzahl der Buchstaben für die Größen noch die Namen der Funktionen hinzukämen. Man deutet das so: Der Weg s hängt von t ab. Also heißt $r = r(\theta)$: der Polarradius hängt vom Polarwinkel ab.

Mathematische Abbildungen von Polarkurven Die Polardarstellung von Kurven ist besonders günstig für **zentrische Streckungen** von Ursprung aus und für **Drehungen um den Ursprung**. Auch die Inversion am Kreis, siehe Abschnitt 9.5, ergibt sich auf einfache Weise.

Ungünstig sind Achsenstreckungen und Verschiebungen, die in der kartesischen Darstellung so einfach möglich sind. Bei der Strophoide haben wir in den Gleichungen 3.10 und 3.19 zwei deutlich verschiedene Polargleichungen wegen der waagerechten Verschiebung um eine Schlaufenbreite.

2.3.3 Zeichnen von Polarkurven

Es gibt verschiedene Gesichtspunkte, die beim Zeichnen der durch Polargleichungen gegebenen Kurven – kurz Polarkurven – wichtig sein könnten. Die schnelle Zeichnung „in einem Rutsch“ bringt Abschnitt 2.3.3.1. Zwei Möglichkeiten für eine verzögerte Darstellung bietet Abschnitt 2.3.3.2, die höchsten Ansprüche an das Verstehen erfüllt die polar-kartesische Sicht in Abschnitt 2.3.4.

2.3.3.1 Schnelle Zeichnung von Polarkurven

Im Hinblick auf Kurven sind die Grundgleichungen 2.6 eigentlich eine spezielle **Parameterdarstellung**. Diesen widmet sich Abschnitt 2.4 noch ausführlich. Wie alle auch nur etwas ambitionierten Werkzeuge für das Graphenzeichnen hat auch GeoGebra einen direkten Befehl für Parameterdarstellungen, diesen nutzen wir mit den Grundgleichungen. Es ist günstig, zunächst $r(x)$ zu definieren und dann $r(\theta)$ ohne die Gefahr von Übertragungsfehlern einzutragen.

> Ist eine Kurve durch eine Polargleichung $r = r(\theta)$ gegeben, dann liefert der Befehl `Kurve[r(`θ`)` $\cdot \cos(\theta)$, `r(`θ`)` $\cdot \sin(\theta), \theta, \theta_0, \theta_1$`]` die Kurve im genannten Intervall für θ.

Außer der Schnelligkeit hat diese Art die Vorteile, dass die Kurve auf das Schnittpunkt-Werkzeug, den Tangenten-Befehl u. ä. reagiert. Diese Eigenschaften haben als „Ortslinie“ erzeugte Kurven nicht.

2.3.3.2 Polarkurven entschleunigen

Es ist für das Verstehen sinnvoll, die Polarkurve **langsam** entstehen zu lassen. Diesen Wunsch kann man auf zwei Arten erfüllen.

Polarkurve als Parameterkurve langsam entstehen lassen Ist in der schnellen Art 2.3.3.1 die rechte Grenze θ_1 als Schieberegler realisiert, zunächst mit einem Wert dicht beim Startwinkel θ_0, kann man die „Kurvenschlange" wachsen lassen. Auch nachträglich kann man sich nochmals ansehen, wie die Kurve durchlaufen wird.

Es kann gut sein, dass man sich wundert, denn θ_1 deutet man als momentanen Polarwinkel, aber P liegt manchmal gar nicht auf dem Schenkel von θ_1. Dieses Rätsel kann man mit der polar-kartesischen Sicht lösen, die in Abschnitt 2.3.4 erklärt wird.

Direkte Spur eines polaren Punktes Man braucht einen Schieberegler θ und gibt dann $P = (r(\theta); \theta)$ an. Nun kann man den Spurmodus für P einschalten und durch Ziehen an θ zeichnet P die Kurve **punktweise**. In einer ersten Phase unterstützt dieses das Begreifen. Hilfreich ist als Hintergrund das Polargitter, in dem man Winkel und Radius sehen kann. Fordert man schließlich die Ortslinie von P bezüglich θ an, wird sie so weit gezeichnet, wie man Werte für den Schieberegler vorgesehen hat. Die Spurpunkte verschwinden bei Neuanzeige des Fensters (oder mit Strg F). Eine Ortskurve dagegen bliebe erhalten.

2.3.4 Gekoppelte polar-kartesische Darstellung von Kurven

Auch Lehrende der Mathematik haben irgendwann um das Verständnis eines mathematischen Phänomens oder Verfahrens gerungen. Mir ist es zu Beginn meiner Lehre in der Schule mit den Polarkoordinaten von Kurven so gegangen. Zum Beispiel hatte ich zwei Vierblattrosetten, die fast gleich aussehen, aber bei wachsendem Polarwinkel ganz verschieden durchlaufen werden.

Zu einer Sicherheit gelangte ich erst, als ich mir die **Entsprechungen in kartesischer Sicht** klarmachte und meinen Schülern an der Tafel erläutern konnte. So hat es schon 1704 Pièrre de Varignon getan, wie ich kürzlich in [Gaechter 1997] las. Als dann die Computerwerkzeuge für Mathematik greifbar waren, war dieses Thema unter den ersten, die ich auszuloten versucht habe. Seit dem Aufkommen des Internets Ende der 90er Jahre steht mein Erklärungsvorschlag auf meiner Website [Haftendorn 2]. Anfangs musste man beide Bilder noch in demselben Grafikfenster unterbringen. Das war dann – zugegebenermaßen – nicht sehr übersichtlich. Nun aber gibt es die „gekoppelten" Grafikfenster, bei denen die mathematischen Elemente links und rechts miteinander gekoppelt sind. Alles kann in allen Fenstern verwendet werden, auch im Algebrafenster. Diese Möglichkeiten stelle ich Ihnen nun vor. Durch diese dreifache Sicht wird das Verstehen in besonderem Maße unterstützt.

2.3.4.1 Das Grundprinzip der gekoppelten polar-kartesischen Darstellung

Gegeben ist die Polardarstellung einer Kurve durch $r = r(\theta)$ und es geht darum, die zugehörige Kurve zu zeigen und zu verstehen.

In den Darstellungen in diesem Buch ist links das erste Grafikfenster, das ein polares Koordinatensystem zeigt. Rechts ist das zweite Grafikfenster, in dem die Gleichung der

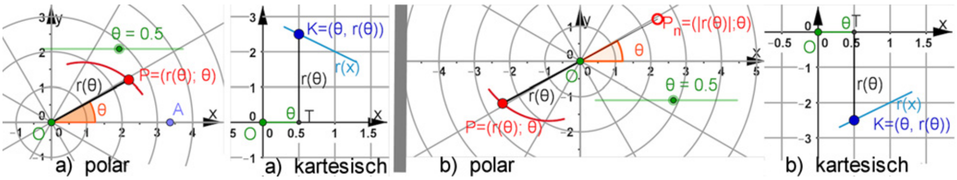

Abb. 2.5 Start in die polar-kartesische Darstellung in zwei gekoppelten Grafikfenstern. a) polar: positiver Radius von $P = (r(\theta);\theta)$ im Polargitter, a) kartesisch: $K = (\theta, r(\theta))$ oberhalb der x-Achse, b) polar: $P = (r(\theta);\theta)$ mit negativem Radius im Polargitter, zusätzlich zeigt der Fahrstrahl von $P_n = (|r(\theta)|;\theta)$ den Polarwinkel θ, b) kartesisch: $K = (\theta, r(\theta))$ liegt bei diesem θ unter der x-Achse.

Polarkurve als $y = r(x)$ in der üblichen kartesischen Darstellung definiert ist. Der Polarwinkel θ ist als Schieberegler verwirklicht. Wie mathematisch zu erwarten ist, versteht das System $r(\theta)$ in allen Fenstern als den Wert, den die Funktion r bei der Einsetzung von θ liefert. Beim Ziehen von θ wandert sowohl $K = (\theta, r(\theta))$ im 2. Grafikfenster als auch $P = (r(\theta);\theta)$ im 1. Grafikfenster. Diese Kopplung ermöglicht, das Verstehen der Polarkoordinaten auf dem vertrauten Umgang mit kartesischen Funktionsgraphen aufzubauen.

2.3.4.2 Durchlauf eines polaren Punktes durch das Spitzei

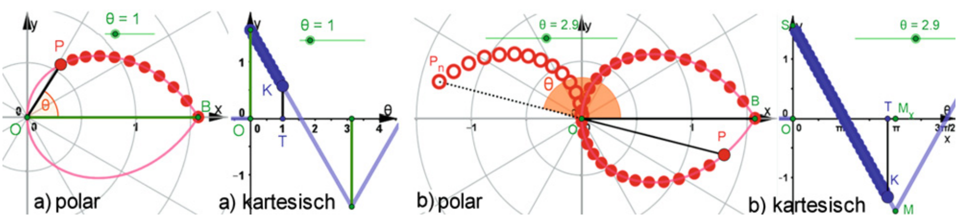

Abb. 2.6 Gekoppelte polar-kartesische Darstellung einer Kurve: a) polar: dicke rote Punkte zeigen selbst θ an. a) kartesisch: $K = (\theta, r(\theta))$ liegt oberhalb der x-Achse, b) polar: weiter auf der Kurve mit negativem Radius und dicken roten Punkten im Polargitter, zusätzlich zeigt der Fahrstrahl von P_n mit offenen roten Punkten den Polarwinkel θ, b) kartesisch: K ist nun unter die x-Achse gewandert.

Abb. 2.6 zeigt in a) und b) jeweils die beiden gleichzeitig in GeoGebra zu sehenden Grafikfenster. In der kartesischen Sicht ist hier in blau $r(x) = |\pi - x| - \frac{\pi}{2}$ mit $0 \leq x < 2\pi$ eingetragen, also $r(\theta)$ in kartesischer Auffassung. Es gibt einen Schieberegler θ, der in beiden Fenstern sichtbar ist. Für $K = (\theta, r(\theta))$ ist der Spurmodus eingeschaltet. In der polaren Sicht ist für $P = (r(\theta);\theta)$ der Spurmodus gesetzt. In diesem Fenster kann man die **Ortslinie von** P bezüglich des Schiebereglers θ anfordern, sie **ist die gesuchte Kurve**, hier das hellrote „Spitzei“.

Für diese Einführung ist das Wandern von K und P durch das Bewegen von θ in 0.1-Schritten mit dicken Punkten besonders hervorgehoben. Ab $\theta = 1.6$ erscheint P_n als leerer roter Kreis im zweiten Quadranten. Die Ursache dafür ist, dass K unter die x-Achse gewandert ist. Die Ordinate von K ist gleich dem Polarradius von P. Dieser Wert ist nun negativ. Darum zeigt P_n lediglich den Polarwinkel θ an, der Kurvenpunkt P ist vom 1. in den 4. Quadranten gewandert, er ist die Spiegelung von P_n am Ursprung. P geht „unten herum" wieder auf den Startpunkt B zu.

Zweiter Durchlauf durch das Spitzei Nachdem das Spitzei einmal durchlaufen ist, kommt bei weiter wachsendem θ ein zweiter Durchlauf, dieses Mal aber mit negativem Radius, bis $\theta = \frac{3}{2}\pi$ überschritten wird.
Man kann allerlei überlegen: $B = (\frac{\pi}{2}, 0) = (\frac{\pi}{2}; 2\pi)$ wird bei den 0.1-Schritten für θ nicht genau getroffen. Damit würde beim Weiterzeichnen aber auch kein einziger der vorigen Punkte wieder erreicht.

2.3.4.3 Ausblick auf Anwendungen dieser Sichtweise in diesem Buch

Die Konchoide des Nikomedes ist die erste Kurve dieses Buches und Abb. 3.4 im Abschnitt 3.1.3.2 geht ausführlich auf diese Sichtweise ein. Wenn Sie das Verständnis des vorigen Abschnitts noch vertiefen wollen, ist es durchaus sinnvoll dort jetzt zu lesen. Gleiches gilt für Abb. 3.11 in Abschnitt 3.2.1.5.

Auch Abb. 3.24 in Abschnitt 3.4.4.2 konzentriert sich auf den Durchlauf eines Punktes durch die Strophoide. Spannend ist, dass die Strophoide je nach Zusammenhang, in den sie gestellt wird, verschieden durchlaufen wird. Dies zeigt, dass die Form einer Kurve keine hinreichende Information über den Durchlauf eines ihrer Punktes in Polarkoordinaten liefert.

Es lohnt sich, wenn Sie sich auf die polar-kartesische Sichtweise einlassen, denn sie hilft beim Verstehen der Kurven. So verspricht es der Buchtitel.

2.4 Was ist eine Parameterdarstellung?

Parameterdarstellungen sind das **übergreifende Konzept**, mit dem Punkte der Geometrie mit Koordinaten verbunden werden. Polar- und explizite kartesische Darstellungen können als Parameterdarstellung aufgefasst werden. Gerade in Bezug auf Kurven ist die Vorstellung der **Bahnkurve** eines Punktes P hilfreich: Zu jedem Zeitpunkt t ist der Punkt $P = (x, y)$ an dem durch $x = x(t)$ und $y = y(t)$ gegebenen Ort. Gemeint ist, dass sich Koordinaten als **Funktionswerte** bei Einsetzung von t ergeben. Zur Rechtfertigung der Schreibweise lesen Sie evtl. die Anmerkung in Abschnitt 2.3.2.

Bei der **Parameterdarstellung** hat das Wort „Parameter", wieder betont auf der zweiten Silbe, die Bedeutung **Hilfsvariable**. Das t spielt für x und y *die Rolle* einer Variablen, die *eigentlichen* Variablen sind dann aber x und y selbst. Verwechseln Sie dieses nicht damit, dass eine Kurvenkonstruktion oder Kurvengleichung *Parameter* im Sinne von *Formvariablen* enthalten kann, siehe Abschnitt 2.2.3.2.

Definition 2.3 (Parameterdarstellung)
Es seien die **Parameter** t und s reelle Zahlen. $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $x(s,t)$, $y(s,t)$, $z(s,t)$ Funktionen dieser Parameter. Dann ist durch

$$x = x(t),\ y = y(t) \quad \textbf{eine Kurve in der Ebene gegeben} \tag{2.7}$$

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t) \quad \text{eine Raumkurve im 3D-Raum gegeben} \tag{2.8}$$

$$x = x(s,t),\ y = y(s,t) \quad \text{ggf. ein Gebiet in der Ebene gegeben} \tag{2.9}$$

$$x = x(s,t),\ y = y(s,t),\ z = z(s,t) \quad \text{eine Raumfläche im 3D-Raum gegeben} \tag{2.10}$$

Oft wird ein Bereich angegeben, in dem die Parameter liegen sollen. Diese Angabe ist bei Gleichung 2.9 unerlässlich, sonst wäre evtl. die gesamte Ebene erfasst.
Alle Funktionen können noch Parameter (als *Formvariable*) enthalten.

2.4.1 Schnelle Zeichnung von Parameterkurven

In Abschnitt 2.3.3.1 haben wir diese Möglichkeit schon genutzt. Wie dort erwähnt hat jedes Mathematikprogramm, das überhaupt Graphen zeichnet, einen direkten Befehl für Parameterdarstellungen, sie umfassen andere Darstellungen. Bemerkenswert ist, dass das CAS MuPAD, eine Entwicklung aus der Universität Paderborn, in seinen Anfängen **ausschließlich** die Parameterdarstellung vorgesehen hatte. Die **schulüblichen Funktionsgraphen** erhielt man dann mit $\boldsymbol{x(t) = t}$ und $\boldsymbol{y(t) = f(t)}$, man nennt dieses die **Standard-Parametrisierung** von Funktionen. Die an einem deutschen CAS interessierte Lehrerschaft hat aus didaktischen Gründen sehr bald die übliche Darstellung $y = f(x)$ gefordert. Weiteres zu MuPAD können Sie auf der Website zum Buch lesen.

Ist eine Kurve durch eine **Parameterdarstellung** $x = x(t)$ und $x = (y(t)$ mit dem Parameter t und einem Intervall $t_0 \leq t \leq t_1$ gegeben, dann liefert der Befehl `Kurve[x(t), y(t), t, t_0,t_1 ]` die Kurve im für t genannten Intervall.
Außer der schnellen Eingabe hat diese Art den Vorteil, dass die Kurve auf das Schnittpunkt-Werkzeug und allerlei andere nützliche Befehle reagiert. Auch hier kann man die Kurve langsam entstehen lassen, wie in Abschnitt 2.3.3.2 gezeigt wurde.

2.4.2 Parameterdarstellung doppelt-kartesisch

Die beiden Funktionen, die aus t die Werte x- und y-berechnen, ergeben in ihrem **Zusammenspiel** die Kurve. Wenn Sie dieses *wirklich durchschauen* wollen, so ist die in Abb. 2.7 a) und b) vorgestellte Art hilfreich. Als Beispiel ist dort die Parameterdarstel-

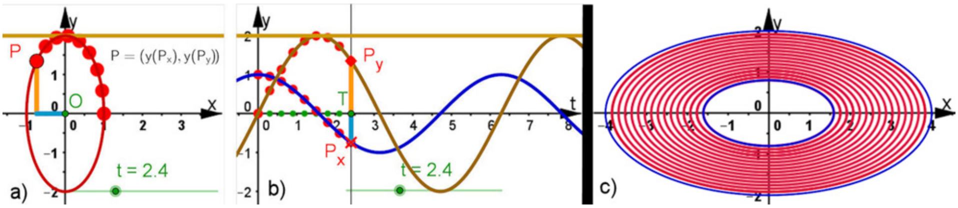

Abb. 2.7 a) und b) Parameterdarstellung einer Ellipse in gekoppelter doppelt-kartesischer Sicht c) Mit zwei Parametern entstehen viele Ellipsen zwischen zwei Ellipsen. So kann gemäß Gleichung 2.9 ein Gebiet in der Ebene dargestellt werden.

lung einer Ellipse $x = x(t) = a\cos(t)$ und $y = y(t) = b\sin(t)$ genommen. Dafür werden die beiden definierenden Funktionen f und g getauft. Im zweiten Grafikfenster werden ihre Funktionsgraphen als $f(x)$ in blau und $g(x)$ in braun gezeichnet. Ein Schieberegler t mit dem Punkt $T = (t, 0)$ steuert die Übertragung in das linke Grafikfenster. Die Ordinaten $f(t)$ und $g(t)$ an der Stelle t werden links zum Punkt $P = (f(t), g(t))$ zusammengeführt, wie es der Definition entspricht.

Nun kann man sich Fragen zur Kurve durch Sicht auf diese gekoppelten Fenster beantworten. Im rechten Fenster sind die vertrauten Analysis-Antworten möglich. Im dritten Absatz von Abschnitt 4.4.1.5 und Abb. 4.27 wird dieses Vorgehen besonders fruchtbar.

2.4.3 Gebiet der Ebene in Parameterdarstellung

In die beiden Parametergleichungen einer Ellipse ist noch ein Faktor s eingefügt. Somit haben wir ein Beispiel für Gleichung 2.9: $x = x(s,t) = s \cdot a\cos(t)$ und $y = x(s,t) = s \cdot b\sin(t)$. Für $s = 0.4$ haben wir die kleine Ellipse. Wenn für sie der Spurmodus eingeschaltet wird, entstehen mit wachsendem s bis $s = 1$ die roten Ellipsen. So kann man die **Parameterdarstellung eines Gebietes** verstehen.

Anmerkung Die Parameterdarstellungen für **Raumkurven** und **Raumflächen** haben ihren Ort in den Abschnitten 2.6 und 5.3.

2.4.4 Wie rechnet man eine Darstellung in eine andere um?

Kartesische Darstellung $\longleftrightarrow$ Polardarstellung Beide Umrechnungen beruhen auf den Grundgleichungen 2.6. Sie sind in Abschnitt 3.1.3.1 für die Hundekurve und in Abschnitt 3.1.4.2 übersichtlich vorgestellt.

Polardarstellung $\longrightarrow$ Parameterdarstellung Aus der Polardarstellung erhält man eine Parameterdarstellung durch die Grundgleichungen 2.6. Dies ist auch schon beim Zeichnen von Polarkurven in Abschnitt 2.3.3.2 verwendet.
Dieses ist aber keineswegs die einzige Möglichkeit. In Abschnitt 4.4.1.5 wird eine **mo-**

difizierte Parameterdarstellung, die in Gleichung 4.28 x^2 und y^2 angibt, aus der Polargleichung hergeleitet.

Parameterdarstellung $\longrightarrow$ Polardarstellung Dieser Wunsch kann nicht allgemein erfüllt werden. Die Polardarstellung ist mit Polarwinkel und Polarradius ein **geometrisches** Konzept. Es kann viele Parameterdarstellungen für eine Kurve geben, sie müssen gar nichts mit Geometrie zu tun haben.

Geometrische Konstruktion $\longrightarrow$ Polardarstellung Bei Konstruktionen, die geometrisch ein Zentrum aufweisen, kann man oft recht leicht aus der Geometrie eine Polargleichung finden. Das ist für alle klassischen Kurven in Kapitel 3 gezeigt. Lesen Sie das dort, siehe Index *Polardarstellung*.

Geometrische Konstruktion $\longrightarrow$ Parameterdarstellung Eine Parameterdarstellung, die nicht aus einer Polargleichung hergeleitet ist, **kann** auch geometrisch fundiert sein, muss es aber nicht. Dieser Weg bleibt auf Einzelfälle beschränkt. So ein Fall ist die Auffassung der Ellipse als allgemeine Versiera in Abb. 4.9 im Abschnitt 4.1.4.4. Hier ergibt sich die in Abb. 2.7 verwendete Parameterdarstellung aus der Scheitelkreis-Konstruktion.

Parameterdarstellung $\longrightarrow$ kartesische Darstellung Aus $x = x(t)$ und $y = y(t)$ lässt sich manchmal t eliminieren. Dann kann man wenigstens eine **implizite kartesische Gleichung** erhalten. Zum Beispiel folgt aus der Parameterdarstellung der Ellipse $x = x(t) = a\cos(t)$ und $y = y(t) = b\sin(t)$ nach Division durch a, bzw. b, Quadrieren und Addieren $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$. Das ist die kartesische Gleichung 4.9 der Ellipse.

Kartesische Darstellung $\longrightarrow$ Parameterdarstellung Wenn es gelingt, die kartesische Gleichung nach $y = g(x)$ oder nach $x = f(x)$ aufzulösen, dann nimmt man die **Standard-Parametrisierung** $x = t$ und $y = g(t)$, bzw. in Abwandlung $y = t$ und $x = f(t)$. Man handelt sich dabei leicht Wurzelausdrücke ein, die man möglicherweise mit einer **modifizierten Parameterdarstellung** mit $x^2 = \tilde{f}(t)$ und $y^2 = \tilde{g}(t)$ umgehen kann, siehe Gleichung 4.28 zur Lemniskate.

Im Allgemeinen gibt es kein *Umwandlungsrezept*. Das Auffinden einer Parameterdarstellung ist eine *kreative Tat*. Man versucht vielleicht einen Teilterm als t zu benennen, aber: ich lande meistens *in der Wüste*.

Grund für die Bemühung war – zumindestens früher – oft, das Unvermögen des verwendeten mathematischen Werkzeugs, zu einer impliziten kartesischen Gleichung eine Zeichnung zu erzeugen. Heute ist das nicht mehr nötig. Lesen Sie dazu in Abschnitt 2.7. Einen gewissen Vorteil gegenüber der impliziten Kurvengleichung bietet die Parameterdarstellung – wenn man sie dann hat – auch bei Fragen der Analysis.

2.5 Was sind Kurven und ihre grundlegenden Kurventypen?

Über den Kurvenbegriff können Bücher geschrieben werden. [Parchomenko 1957] nennt sein Buch geradezu: „Was ist eine Kurve?“. Ich gehe hier bewusst nicht den theoretischen Weg, der Kurven im Rahmen der Topologie als eindimensionale Punktmenge beschreibt. Auf den geometrischen Aspekt, der für die Antike der wesentliche war, ist schon Abschnitt 2.1 eingegangen. Er ist für dieses Buch auch ganz zentral. Geometrisch konstruierte Kurven können auch ganz *für sich* stehen, sie brauchen die Koordinaten und Gleichungen nicht als *Existenzberechtigung*. Dennoch kann eine zugehörige *Kurvengleichung* den Blick weiten.

Zitiert nach [Schupp und Dabrock 1995] geht Camille Jordan (1838-1922) den umgekehrten Weg und definiert:

Eine **Kurve** ist die Menge aller Punkte $P = (x, y)$, die durch eine Parameterdarstellung mit $x = f(t)$ und $y = g(t)$ mit Funktionen f und g dargestellt werden.
Eine **Kurve heißt stetig**, wenn f und g stetige Funktionen sind.

Dabei ist – anschaulich formuliert – die Funktion f mit $x = f(t)$ an einer Stelle t_0 stetig, wenn das Heranrücken von t an t_0 bewirkt, dass auch x an x_0 heranrückt. Entsprechendes gilt für g. Die Kurven dieses Buches, die eine Parameterdarstellung haben, sind stetig.

Satz von Jordan zu geschlossenen Kurven
Wenn f und g eine gemeinsame Periode haben, ist die **Kurve geschlossen**.

Das ist einsichtig, denn dann gibt es ein Intervall T für t, nach dessen Ende es genauso weitergeht wie an seinem Anfang. Dieser Satz ist aber **nicht umkehrbar**, denn die Lemniskate ist eine geschlossene Kurve, obwohl sie mit Gleichung 4.28 eine (modifizierte) Parameterdarstellung ohne periodische Funktionen hat. Auch in der Gleichung 4.29 sind die Funktionen nicht periodisch. Allerdings ist in dieser Darstellung die Lemniskate nur geschlossen, wenn man Unendliches t hinzu nimmt. [Wieleitner 1919, S. 6] fasst solche Durchgänge durch das Unendliche ausdrücklich nicht als Unstetigkeiten auf.

2.5.1 Was ist eine algebraische Kurve?

Zunächst: „Was ist Algebra?“ Jungen Menschen oder Fachfremden kann man sagen: Algebra ist das Rechnen mit Buchstaben, wie bei der Binomischen Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab+b^2$. Das ist nicht ganz falsch, aber erheblich zu kurz gegriffen. Die Algebra untersucht grundsätzlich *Strukturen*, in denen man mit Symbolen operieren kann. Darunter sind *auch* die reellen Zahlen und die Gleichungen, die man mit Variablen darin aufstellen kann. So eine Gleichung ist die binomische Formel, aber auch die Kurvengleichungen mit Summen und Produkten der Variablen x und y. Dieser Aspekt der Algebra kommt in diesem Buch zum Tragen.

Definition 2.4 (Algebraische Kurve)
Das Wort **algebraisch** wird in einigen Kontexten verwendet.

- Ein reeller **algebraischer Term** enthält ausschließlich Summen und Produkte – und damit auch natürlich-zahlige Potenzen – von reellen Zahlen und Variablen. Beispiel: $7x^2y + (\sqrt{2}\,a - y^4)^3x^2$
- Eine **algebraische Gleichung** entsteht durch ein Gleichheitszeichen zwischen zwei algebraischen Termen. Beispiel: $5a\,x^2 - 7y^2 = \frac{1}{2}x\,y\,z$
- **Algebraische Umformungen** ergeben sich durch die in der Sekundarstufe I gelernten Regeln. Bei Gleichungen verändern sie die Lösungsmengen nicht.
- Ein reelles **Polynom in** x ist ein algebraischer Term, der in der aufgelösten Form ausschließlich Summanden der Gestalt $a_i\,x^i$ enthält. Beispiel $x^3 - 3x^2 + 5x - 10$
- Eine reelle **Polynomfunktion in x** ist $y = f(x)$, mit einem Polynom $f(x)$. Beispiel: $y = 5x^3 - 4x^2 + 1$
- Ein reelles **Polynom in** x **und** y ist ein algebraischer Term, der in der ausmultiplizierten Form ausschließlich Summanden der Gestalt $a_{ij}\,x^iy^j$ enthält. Beispiel: $-5x^6 - 15x^4y^2 - 12x^2y^4 - 5y^6$ entsteht durch Ausmultiplizieren von $3x^2y^4 - 5(x^2 + y^2)^3$
  Dabei heißen die a_{ij} **Koeffizienten** des Polynoms. Bei einem **reellen Polynom** sind sie reelle Zahlen, evtl. mit reellen Parametern.
  Der Name *Polynom* kommt vom griechischen *poly* und *nomos* und bedeutet *Viel-Gesetzlichkeit*.
- Die höchste Summe n der Exponenten, also der größte Wert von $i + j$, der im Polynom auftritt, heißt der **Grad des Polynoms.**
- Eine **algebraische Kurve** muss durch eine Gleichung $F(x, y) = 0$ mit einem Polynom F in x und y beschrieben werden können. Sie hat den **Grad** n des Polynoms.

Polynomfunktionen in x – sie werden auch oft kurz **Polynome** genannt – sind ein wesentliches Element des Schulunterrichts. Insbesondere interessieren ihre **Nullstellen**, die Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$. Es gilt der Satz (von Gauß):

Satz 2.2 (Fundamentalsatz der Algebra)
Ein reelles Polynom n-ten Grades hat höchstens n Nullstellen.

Sein Beweis verwendet Methoden, die in dieses Buch nicht passen. Wie man die Polynome nicht zu großen Grades in ihren kartesischen Erscheinungsformen im wahren Wortsinn „durchschauen“ kann, habe ich in meinem Buch [Haftendorn 2016, Kap. 6.1.3] dargestellt. Wenn wirklich alle n Nullstellen – mit Vielfachheit gezählt – vorhanden sind, kann man viele Eigenschaften der Kurven vorhersagen.

Die Gleichungen $F(x, y) = 0$ mit einem Polynom n-ten Grades in x und y kann man auch als „erweiterte Nullstellensuche“ deuten. Für jedes feste $x = x_0$ ist $F(x_0, y)$ ein Polynom höchstens n-ten Grades in y und kann daher nach dem Fundamentalsatz 2.2 höchstens n-mal die Gerade $x = x_0$ schneiden. Entsprechendes gilt für $y = y_0$, aber auch für Schnitte mit einer beliebigen Geraden $y = m\,x + b$.

Folgerung: Kurvengrad und Geradenschnitt
Eine algebraische Kurve n-ten Grades kann von einer beliebigen Geraden **höchstens n-mal geschnitten** werden. Kann man sich umgekehrt eine Gerade denken, die n-mal eine algebraische Kurve schneidet, dann hat die Kurve **mindestens den Grad n**.

2.5.1.1 Vorgehen der Zeichenwerkzeuge für implizite Kurven

Die Nullstellen des Polynoms von y bei festem x aus dem gewählten Fenster werden numerisch berechnet. Bei algebraischen Kurven von Grad n kann die Suche nach n Lösungen beendet werden. Diese höchstens n Punkte mit x als Abszisse werden gezeichnet. Wie dann die Routinen programmiert sind, ist verschieden. Bei Mathematica sieht man deutlich, dass zunächst in recht großem Raster Punkte erzeugt werden, in deren Nähe in einem zweiten Durchgang die Verfeinerung erfolgt.

Sie als Anwender der Zeichenwerkzeuge sollten berücksichtigen, dass z. B. beim Zoomen neu gerechnet wird. Dadurch könnten Feinheiten zum Vorschein kommen, die bisher nicht zu sehen waren. Bei algebraischen Kurven, deren Grad Sie schon kennen, ergibt sich aus dem vorigen blauen Kasten schon die Sicherheit, dass nicht noch „Zipfelchen“ auftauchen werden.

2.5.1.2 Polardarstellungen, die auf algebraische Kurven führen

Obwohl die trigonometrischen Funktionen transzendent (siehe Abschnitt 2.5.2) sind, kann ihre Verwendung in Polargleichungen zu algebraischen Kurven führen.

Satz 2.3 (Polargleichungen, die zu algebraischen Kurven führen)
*Hat eine Kurve eine Polardarstellung $r(\theta) = f(\cos(\theta), \sin(\theta))$, bei der f ein reelles Polynom in $\cos(\theta)$ und $\sin(\theta)$ ist, dann ist die **Kurve algebraisch**.*

Beweis Wegen der Grundgleichungen 2.6 ist dann $r = f(\frac{x}{r}, \frac{y}{r})$ ein Polynom in x und y mit Summanden $a_{ij}\left(\frac{x}{r}\right)^i\left(\frac{y}{r}\right)^j$. Der Grad sei n. Multiplikation der Gleichung mit r^n führt rechts zu einem Polynom in x und y mit Summanden $a_{ij}r^{n-(i+j)}x^iy^j$. Ist der Exponent von r eine gerade Zahl $2k$, so ist $r^{2k} = (x^2+y^2)^k$, anderenfalls ist $r^{2k+1} = (x^2+y^2)^k\sqrt{x^2+y^2}$. Fasst man in der gesamten Gleichung alle Wurzelterme auf einer Seite zusammen und quadriert, so erhält man die gesuchte algebraische Gleichung. □

Dieser Satz gilt auch, wenn **Sinus- oder Kosinusterme noch in Nennern** vorhanden sind. Dann muss man mit dem Hauptnenner multiplizieren. Dazu folgt ein Beispiel:

Beispiel 2.1 (Cissoide aus Kreis und Gerade)
Wir wandeln die Gleichung 3.16 einer Cissoide bezüglich Kreis und Gerade aus Abschnitt 3.4.3.2 in eine kartesische Gleichung um.
Wenn wir also von $r(\theta) = \frac{c}{\cos(\theta)} - 2a \cdot \cos(\theta)$ ausgehen, erhalten wir durch Multiplikation zunächst $r\cos(\theta) = c - 2a\cos^2(\theta)$. Mit den Grundgleichungen 2.6 folgt $x = c - 2a\frac{x^2}{r^2} \iff 2a\frac{x^2}{r^2} = c - x$. Multiplizieren wir nun mit r^2 und ersetzen dieses auch gleich durch x^2+y^2 so folgt $2ax^2 = (c-x)(x^2+y^2)$ als kartesische Gleichung dieser Cissoide. In der Gleichung 3.17 ist nach x^2- und y^2-Termen sortiert. ■

2.5.1.3 Fazit zu algebraischen Kurven

Im 17. Jahrhundert wollte Descartes nur die „algebraischen Kurven" gelten lassen. Zudem „hatten er und seine nächsten Nachfolger nur sehr unrichtige Vorstellungen von der äußeren Erscheinung dieser Kurven, da sie gewohnt waren, nur für positive Abszissen Betrachtungen anzustellen." (Zitiert nach [Wieleitner 1919, S. 6].)

Das kann uns heute nicht mehr so passieren, wir sind mit dem vollständigen kartesischen Koordinatensystem vertraut. Zudem nähern wir uns in diesem Buch den algebraischen Kurven von verschiedenen Seiten: der geometrischen, der kartesischen, der polaren Sicht und der parametrischen Sicht. Durch diesen vielfältigen Blick können wir recht sicher sein, dass uns nichts Wesentliches verborgen bleibt.

Allerdings habe ich die „theoretische Sicht" der **Algebraischen Geometrie**, wie sie in [Brieskorn und Knörrer 1981] auf tausend Seiten dargelegt wird, ausgeblendet. Schon [Wieleitner 1919] sagt: „Die algebraischen Kurven bilden eine Kurvenfamilie, über die es eine **ausgebaute Theorie** gibt". Er geht in seinem Buch aber nicht näher darauf ein.

2.5.2 Was ist eine transzendente Kurve?

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) bekämpfte die eingeschränkte Sicht von Descartes (s.o.) und widmete sich auch Kurven, zu denen es keine algebraische Gleichung gibt. Er nannte sie im Jahre 1686 **transzendente Kurven**. Das Wort bedeutet *hinüber steigend*, gemeint ist, dass sie das „Algebraische" übersteigen. In diesem Buch sind die transzendenten Kurven vor allem in den Spiralen und den Zykloiden in den Abschnitten 8.1 und 8.3.1 vertreten. Aber auch die Exoten-Kurven in Abschnitt 9.6 sind transzendent.

2.5.2.1 Transzendente Zahlen

Transzendente Zahlen sind reelle Zahlen, die sich **nicht** als Nullstellen eines Polynoms ergeben können. Bekannte Vertreter sind die Kreiszahl π und die Euler'sche Zahl e. Transzendenz ist nicht leicht nachzuweisen. Für e schaffte das der Mathematiker Charles Hermite im Jahre 1873. Darauf aufbauend bewies Ferdinand Lindemann im Jahre 1882 die Transzendenz von π. Damit ist auch bewiesen, dass e und π nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind. Hierzu steht mehr in Kapitel 6.

2.5.2.2 Transzendente Funktionen

Nun wird klar, dass die **Exponentialfunktionen** wie $f(x) = e^x$ und die Logarithmen sicher zu den transzendenten Funktionen gehören. Dasselbe gilt für die **trigonometrischen Funktionen** wie Sinus, Kosinus und Tangens. Deren Funktionsgraphen – und natürlich auch ihre Verknüpfungen und Verkettungen sind dann i. A. **transzendente Kurven**.

2.5.2.3 Transzendente Gleichungen

Gleichungen, in denen eine Variable in verschiedenen transzendenten Funktionen oder zusätzlich „frei“ vorkommt, sind nur in Sonderfällen nach der Variablen auflösbar. Zum Beispiel lassen sich $x = cos(x)$ oder $cos(x) = e^x$ **nicht** nach x auflösen. Erst recht lässt sich keine Lösung geometrisch konstruieren. So etwas gehört zur „mathematischen Bildung“, insbesondere der Lehrenden. In der Lehrerfortbildung habe ich Menschen getroffen, die Mathematiksoftware nicht zu nutzen gedachten, bis „sie endlich solche einfachen Gleichungen exakt lösen kann“.

2.5.2.4 Transzendente Kurven

Bisher gibt es noch keine Klassifikation der transzendenten Kurven. Es gibt transzendente Kurvenscharen, die als Spezialfälle algebraische Kurven enthalten. Allerdings gilt dies nicht umgekehrt. Ein starker Hinweis auf Transzendenz sind Kurvengleichungen von ähnlicher Bauart wie die eben erwähnten transzendenten Gleichungen. Bei Polargleichungen mit trigonometrischen Funktionen ist wegen Satz 2.3 in Abschnitt 2.5.1.2 Vorsicht geboten.

- Die **Spiralen** sind i. d. R. transzendent. Ihre Polargleichung ist z. B. $r(\theta) = \theta$ oder $r(\theta) = e^\theta$. Wir vertiefen dies in Abschnitt 8.1.
- Die **Zykloiden** sind i. d. R. transzendent. Ihre Parameterdarstellung ist z. B. $x = t - \sin(t)$ und $y = t - \cos(t)$. Siehe Abschnitt 8.3.1.

2.6 Was haben Kurven mit dem 3D-Raum zu tun?

Der Abschnitt 5.3 ist eigens den Phänomenen des 3D-Raumes gewidmet, die mit Kurven etwas zu tun haben. Hier im Werkzeugkasten-Kapitel stelle ich nur einige handwerkliche Elemente zusammen, die man etwa einmal nachschlagen möchte.

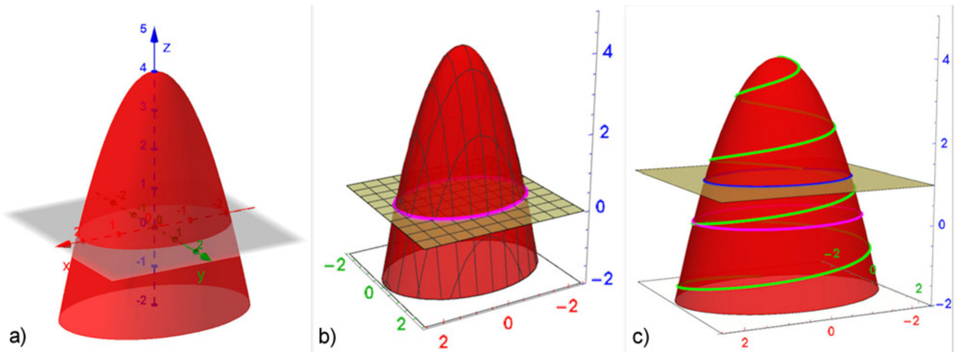

Abb. 2.8 **Paraboloid**: a) in GeoGebra 3D, b) Grundebene mit Gitter und violetter Ellipse als **Schnittkurve**, die Bilder eines Gitters auf der **Raumfläche** heißen **Grids**, c) zusätzlich verschobene Ebene mit blauer Schnittellipse und eine grüne **Raumkurve** auf dem Paraboloid

2.6.1 Wie entsteht eine Raumfläche aus einer Kurvengleichung?

Es gibt auch hier wieder zwei kartesische Darstellungen, eine Parameterdarstellung und sogar zwei Polardarstellungen.

2.6.1.1 Raumflächen als kartesische Funktion

Gegeben ist eine reelle Funktion f in zwei Variablen. Der Definitionsbereich ist die x-y-Ebene, die Funktionswerte werden z genannt, die x-Achse, die y-Achse und die z-Achse bilden ein „Rechtssystem“. Zeigt der Daumen der *rechten Hand* in x-Richtung, der gestreckte Zeigefinger in y-Richtung, dann kann der Mittelfinger senkrecht dazu nur in z-Richtung gestreckt werden.

Eine reelle Funktion f mit den Werten $z = f(x, y)$ ordnet jedem Punkt(x, y) aus der x-y-Ebene, oder einem Definitionsbereich darin, eine reelle Zahl z zu, die auf einer Senkrechten durch diesen Punkt eingetragen wird. Die so entstehenden Punkte P=(x,y,z) bilden zusammen eine **Raumfläche**.

In Abb. 2.8 ist $z = 4 - x^2 - 2y^2$ als roter „Hut“ dargestellt. Die violette Ellipse hat die Gleichung $0 = 4 - x^2 - 2y^2$. Nach der Umformung zu $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ erkennt man die Ellipsengleichung 4.9 (s. Abschnitt 4.1.4.4) für die Halbachsen $a = 2$ und $b = \sqrt{2}$.

Aus einer beliebigen Kurvengleichung in Standardform $0 = F(x, y)$ wird durch $z = F(x, y)$ eine **Raumfläche** mit der **ursprünglichen Kurve als Schnittkurve** mit der Grundebene. Zur Grundebene parallele Ebenen $z = z_0$ erzeugen mit $0 = F(x, y) - z_0$ eine **Familie von *raumverwandten* Kurven.**

In Abschnitt 5.3 erkunden wir diesen Zusammenhang an lohnenden Beispielen.

2.6.1.2 Raumflächen mit impliziter kartesischer Gleichung

Satz 2.4 (Raumflächen in impliziter kartesischer Darstellung)
Gegeben sei eine Funktion F, die von x, y und z abhängt. Sie darf noch Formparameter a, b, $\cdots$ enthalten. Dann ist

$$F(x, y, z) = 0 \qquad \textit{eine implizite Raumflächengleichung in Standardform.} \tag{2.11}$$

Genau die Punkte $P = (x, y, z)$, welche die Gleichung erfüllen, liegen auf der Raumfläche.
*Gelingt es, die Gleichung nach z – oder wenigstens nach x oder y – aufzulösen, hat man eine **explizite kartesische Gleichung**. Anderenfalls hat man eine **implizite kartesische Gleichung**. Ist F(x,y,z) eine reelles Polynom in drei Variablen, handelt es sich um eine **algebraische Raumfläche**.*

Zum Darstellen von implizit gegebenen Raumflächen lesen Sie bitte Abschnitt 2.8.3.

2.6.2 Raumkurven und Raumflächen in anderen Darstellungen

Eine Übersicht bietet Definition 2.3 am Beginn von Abschnitt 2.4. Dort finden Sie auch die im Folgenden erwähnten Gleichungen 2.7, 2.8 und 2.10.

2.6.2.1 Raumkurven in Parameterdarstellung

Die drei Gleichungen mit *einem* Parameter, die nun nötig sind, stehen in Gleichung 2.8 zu Beginn von Abschnitt 2.4. In Abb. 2.9 a) ist eine Schraubenlinie durch `Kurve[4cos(t), 2sin(t),t/5,t,0,20]` in GeoGebra definiert. Die beiden ersten Ein-

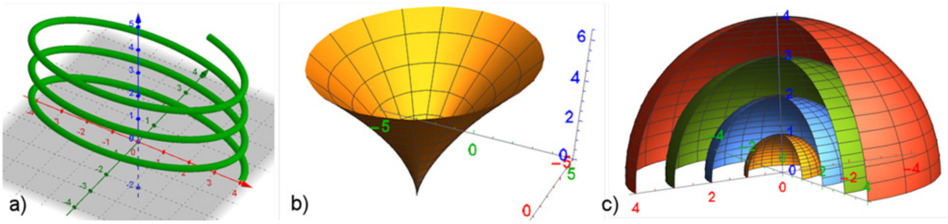

Abb. 2.9 a) Schraubenlinie als **Raumkurve** in GeoGebra 3D (s. Abschnitt 2.6.2.1), b) **Parametrische Raumfläche** mit der Neil'schen Parabel in Schnitten, die die z-Achse enthalten, und Ellipsen in Schnitten senkrecht zur z-Achse (s. Abschnitt 2.6.2.2), c) vier Halbkugeln, die zu einem Viertel offen sind, in **Kugelkoordinaten** (s. Abschnitt 2.6.2.3)

träge gelten für x und y und gehören zur Parameterdarstellung der Ellipse, die wir schon in Abb.2.8 verwendet haben. Der nächste Eintrag steht für z, er sorgt für das Steigen der Kurve. Es ist t dann der Parameter, der von 0 bis 20 läuft, es wird als Höhe 4 erreicht.

In Abb. 2.8 c) ist auch eine Raumkurve zu sehen, sie schmiegt sich an das Paraboloid an. Nach dem blauen Kasten am Ende von Abschnitt 2.6.1.1 ist $z_0 = 4 - x^2 - 2y^2$ die Schnitt-Ellipse in der Höhe z_0, es ist also $a^2 = 4 - z_0$ und $b^2 = \frac{4-z_0}{2}$. Damit erhält man mit $x = \sqrt{4 - \frac{t}{4}}\cos(t)$, $y = \sqrt{\frac{4-\frac{t}{4}}{2}}\sin(t)$ und $z = \frac{t}{4}$ für den Parameter t mit $-8 \leq t \leq 16$ die angeschmiegte Raumkurve in Parameterdarstellung.

Wie bei den Polar- und Parameterdarstellungen in Abschnitt 2.3.3.2 kann man auch hier Schieberegler für Anfang oder Ende des Parameterintervalls einführen und dann die Kurve langsam entstehen lassen.

2.6.2.2 Raumflächen in Parameterdarstellung

Die drei Gleichungen mit zwei Parametern, die nun nötig sind, stehen in Gleichung 2.10. In Abschnitt 4.2 steht in Gleichung 4.10 die Parameterdarstellung $x = s^2$ und $y = as^3$ der Neil'schen Parabel (hier geschrieben mit s). Wir kombinieren sie mit der eben verwendeten Ellipse zu $x = 2\cos(t)\cdot s^3$, $y = \sqrt{2}\sin(t)\cdot s^3$ und $z = 3s^2$. Die z-Achse spielt also die Rolle der x-Achse bei der ebenen Kurve. Abb. 2.9 b) zeigt die Raumfläche. In GeoGebra steht der Befehl `Oberfläche[x(s,t),y(s,t),z(s,t),s,s_0,s_1,t,t_0,t_1]` zur Verfügung. Die Schnitte senkrecht zur z-Achse sind Ellipsen, die Schnitte, die die z-Achse enthalten, sind Neil'sche Parabeln. Das eben Gelernte ist in Abschnitt 5.3.2 angewendet.

Wenn Sie das Bauprinzip verstanden haben, ist Ihnen Tür und Tor geöffnet, selbst Raumflächen zu erfinden.

2.6.2.3 Kugel- und Zylinderkoordinaten

Auch auf dieser Grundlage lassen sich die Kurven dieses Buches „in den 3D-Raum fortsetzen". Die entsprechenden Beispiele stehen in Abschnitt 5.3.

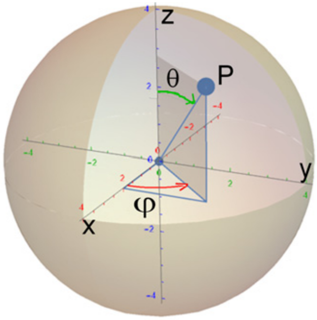

Abb. 2.10 Kugelkoordinaten, sphärische Koordinaten
Der Punkt $P = (x, y, z)$ habe den Abstand $|r|$ vom Ursprung. Der **Polarradius** r ergibt sich als Funktion zweier Winkel θ und φ zu $r = r(\theta, \varphi)$.
Die Winkel werden in nebenstehender Weise gemessen.
Die 3D-Parameterdarstellung ist

$$\begin{aligned} x &= r(\theta,\varphi)\cdot\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ y &= r(\theta,\varphi)\cdot\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z &= r(\theta,\varphi)\cdot\cos(\theta) \end{aligned} \tag{2.12}$$

Kugelkoordinaten Zu den Kugelkoordinaten sagt man auch **sphärische Koordinaten**. Es sind die **räumlichen Polarkoordinaten**. Sei O der Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems. Wenn die z-Achse als **Polarachse** gewählt wird, dann ist die x-y-Ebene die **Äquatorebene**. Abb. 2.10 zeigt die Zusammenhänge.

Mathematica hat einen speziellen Befehl SphericalPlot3D[...], wenn dergleichen nicht existiert, kann man die Parameterdarstellung verwenden.

Eine Kugel mit dem Radius a um den Ursprung hat in Kugelkoordinaten die Gleichung $r = a$. In Abb. 2.9 c) stehen für die vier Halbkugeln tatsächlich im eben genannten Befehl nur die Zahlen $\{1, 2, 3, 4\}$. Der Winkel θ ist aus dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$, der Winkel φ ist aus $[\frac{\pi}{2}, 2\pi]$. Mit der kartesischen Kugelgleichung $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ hätte man diese „ausgeschnittenen“ Kugeln nicht zeichnen können.

Varianten der Kugelkoordinaten In der Geografie und in GPS-Systemen werden Kugelkoordinaten mit etwas anders definierten oder benannten Winkeln verwendet. Wenn die Erde näherungsweise als Kugel angesehen wird, durchstößt die z-Achse die Erde am Nord- und Südpol, der halbe Großkreis, der durch die positive x-Achse verläuft, ist der „Nullmeridian von Greenwich“. Der Winkel, der in Abb. 2.10 φ heißt, wird λ (sprich lambda) genannt. Er wird „östlich“(+) und „westlich“(-) mit Gradzahlen bis 180^o gemessen. Entsprechend heißen auch Meridiane, z. B. ist $9^o11'29.6''$ die **geografische Länge** für Ludwigsburg. Bei den Winkeln verwendet man das 4000 Jahre alte **Hexagesimalsystem** (60-iger System) mit Winkelminuten $'$ und Winkelsekunden $''$. Es sind $60' = 1^o$ und $60'' = 1'$. Uns ist es von den Uhren vertraut. Die **geografische Breite**, z. B. $48^o53'49.2'$ für den Marktplatz dieser Stadt, wird als Winkel vom Äquator aus nach Norden gemessen. *Dieser* Winkel heißt hier üblicherweise φ (sprich phi) und ergänzt (auf der Nordhalbkugel) den Winkel θ zu 90^o.

Die wirklichen GPS (Geo-Positioning-System) betrachten die Erde als Ellipsoid, aber auch das ist nur näherungsweise richtig. Lesen Sie in Wikipedia über GPS. Die Definition von Kugelkoordinaten in Abb. 2.10 entspricht dem internationalen Gebrauch in der Physik.

Zylinderkoordinaten Hierbei verwendet man in der x-y-Ebene die ebenen Polarkoordinaten, die z-Achse steht senkrecht auf der x-y-Ebene und liefert ohne Umrechnung die z-Koordinaten. Ich kenne kein Mathematik-Werkzeug, das für Zylinderkoordinaten einen *direkten* Befehl hat. Man kann die Parameterdarstellung $x(\theta) = r(\theta) \cdot \cos(\theta)$, $y(\theta) = r(\theta) \cdot \sin(\theta)$ der Polarkoordinaten verwenden und z bleibt einfach so. So kann man allen Kurven, von denen man eine Polardarstellung kennt, eine senkrechte Wand geben. Anstelle von z kann auch $z = z(\theta, t)$ stehen. Hierzu gibt es in 5.3 in Abb. 5.24 a) ein schöne Rosette.

2.7 Tipps für GeoGebra

Sie alle wissen, dass eigenes Musizieren die Freude an Musik vertieft, dass eigene Bewegung mehr ist als Sportschau gucken, dass eine eigene Wanderung erfüllender ist als jeder noch so schöne Bildband über das betreffende Bergland. So ist es auch mit der Mathematik. Man kann seine intellektuelle und ästhetische Freude an ihr erheblich steigern, wenn man sich auf die heutigen Möglichkeiten einlässt, Mathematik mit passenden Computerprogrammen zu erleben. Das Entscheidende ist das eigene Tun und die Verfolgung der Fragen, die dabei auftauchen, nicht die Präsentation von Antworten.

2.7.1 Wo findet man GeoGebra und die Website zum Buch?

GeoGebra ist ein umfassendes „Dynamisches Mathematiksystem“, das an den eben genannten Zweck besonders gut angepasst ist. Es leistet viel mehr als ein DGS und wurde etwa 2003 von dem Österreicher Markus Hohenwarter entwickelt, der Mathematik und Philosophie für das höhere Lehramt studiert hatte und auch Informatik. Aus diesem Hintergrund ist ein hervorragendes (elektronisches) Werkzeug entstanden, das inzwischen in über 50 Sprachen übersetzt wurde und weltweit in Schulen und Universitäten von Lehrenden, Lernenden und Mathematik-Enthusiasten eingesetzt wird. Es ist frei verfügbar und soll das auch bleiben, wie Prof. Hohenwarter (nun in Linz) versichert. Die Entwicklungsarbeit an GeoGebra wird zumeist ehrenamtlich geleistet.

2.7.1.1 Beschaffung

Die umfassende Adresse ist `http://www.geogebra.org`. GeoGebra gibt es für Desktop-PC und für Tablets, jeweils für je drei z. Z. gängige Betriebssysteme. Auch Smartphones sind berücksichtigt. Ausführliche Handbücher sind in Deutsch, in Englisch und vielen weiteren Sprachen verfügbar. Am besten Sie informieren sich direkt.

2.7.1.2 Die Website zum Buch

Die Adresse ist `http://www.kurven-erkunden-und-verstehen.de`. Die Site ist genauso gegliedert wie das Buch und enthält zusätzlich Vorträge, die ich zum Thema gehalten habe. Dort finden Sie alle GeoGebra-Dateien, welche die Bilder des Buches erzeugt haben.

Sie haben die Endung *.ggb und Sie können sie – natürlich frei – herunterladen. Auch einige kurze Erklärungen sind dabei, aber das vorliegende Buch bietet erheblich mehr.

Weiter gibt es Lösungsvorschläge und Dateien zu den Aufgaben, Anregungen, Ergänzungen und Beweise, die im Buch keinen Platz fanden. Darüber hinaus sind einige Lernseiten im *.pdf-Format angeboten, wie ich sie in meiner Berufszeit für die Studierenden, z. T. auch für Schüler entwickelt habe. Auf meiner Site [Haftendorn 3] spiegeln sich im Bereich Kurven meine Ideen seit 1996. Sie waren eine Quelle für dieses Buch. Für wichtige Seiten steht ein direkter Link im Literaturverzeichnis.

2.7.1.3 GeoGebra-Material und GeoGebra-Books

Mit `https://www.geogebra.org/haftendorn` kommen Sie direkt zu meinen Seiten bei GeoGebra. Sie sehen die Icons für Materialien, manche haben eine kleines blaues Zeichen, das ein Buch zeigt. Sie weisen auf „**GeoGebra-Books**" hin. Das sind Zusammenstellungen von thematisch oder didaktisch zusammengehörigen Materialien. Für die Leser dieses Buches gibt es das GeoGebra-Book „**Kurven erkunden und verstehen**". Dort können Sie die im Buch verwendeten Dateien interaktiv bedienen, ohne dass etwas auf Ihren Computer heruntergeladen wird. Direkte Links zu diesen Applets sind auch auf der Website zum Buch. An beiden Stellen können Sie die *.ggb-Datei für die offline-Nutzung herunterladen. Grundsätzlich stehen Ihnen dann alle Möglichkeiten offen. Dagegen beschränken sich die Applets im Internet auf die Eigenschaften, die ich – evt. aus didaktischen Gründen reduziert – implementiert habe.

2.7.2 Wichtige Tipps für Kurven

2.7.2.1 Ortslinien erzeugen

- Man definiert die Parameter mit z. B. $a = 1$ als später noch veränderliche Zahlen.
- Zuerst braucht man den **Weg** für Q, eine Gerade, ein Kreis oder eine Kurve. Sie kann durch die interaktiven Konstruktionselemente oder durch eine Gleichung gegeben sein. Sie sollte möglichst nicht selbst als Ortslinie konstruiert sein. Auf Ortslinien kann man zwar einen zugfesten Punkt setzen, aber man erhält keine Schnittpunkte, Tangenten und andere Analysiselemente.
- Mit dem Button „Punkt auf Objekt" setzt man Q darauf.
- Entsprechend der Konstruktionsvorschrift oder auf eigene Entscheidung konstruiert man einen Punkt P, evt. noch P'.
- Man setzt im Eigenschaftsdialog für P den Spurmodus und zieht an Q. So entsteht die Ortskurve punktweise. In der Lehrsituation ist dies der erste Schritt.
- für die „gesteuerte" Parametervariation bewegt man einen Punkt oder einen Schieberegler besser mit den Pfeiltasten. Die Schrittweite ist einstellbar, z. B. im Register „Algebra".

- Für eine (fast) vollständige Übersicht nimmt man das Ortslinienwerkzeug aus dem Konstruktionsmenü und bekommt die **Ortslinie von P bezüglich** Q. (Erst P, dann Q anklicken.)
- Die Ortslinie ist nur eine Näherungskurve und existiert intern nicht als *eine* Gleichung sondern als *Spline*. Zu diesem Werkzeug der Numerik steht etwas in meinem Buch [Haftendorn 2016]. Darum können Sie auch mit Ortskurven keine Schnittpunkte mit anderen Objekten erzeugen.

2.7.2.2 Implizite Gleichungen

Implizite kartesische Gleichungen kann man in der Eingabezeile eintippen.

Gleichungen ohne Parameter Leider werden sofort sämtliche Klammern aufgelöst, so dass man keine Chance hat, sich zu vergewissern, ob man sich vertippt hat. Das kann man verhindern, wenn man irgendeinen Parameter in die Gleichung setzt. Also setzen Sie c=1 und bringen Sie in der Gleichung irgendwo c als Faktor an.

Gleichungen mit Parameter Sie bewahren die Termstruktur nach der Eingabe am Tooltipp und im Eigenschaftsmenu. **Nur so ist sicheres Arbeiten möglich**. Variationen können gezielt erfolgen. Achten Sie bei der Standardform der Kurvengleichung darauf, dass Sie nicht $= 0$ vergessen.

Andere Variablennamen Man muss x und y nehmen. Für Beispiele aus anderen Wissenschaften (Physik, Ökonomie, Chemie u. s. w.) muss man umtaufen. Für die Übersichtlichkeit bietet es sich an, den Gleichungsnamen „sprechend“ zu wählen.

2.7.2.3 Explizite Gleichungen

Es ist zwar möglich mit $y = term(x)$ eine Funktion zu zeichnen. Meist ist es besser, nur den $term(x)$ in die Eingabezeile zu schreiben, dann bekommt sie einen Funktionsnamen automatisch zugewiesen, noch geschickter ist, man schreibt gleich z. B. $h(x) = term(x)$ in die Eingabezeile. In den Befehlen, in denen eine Funktion zu nennen ist, muss man dann h nennen und nicht $h(x)$. Das ist mathematisch sauber konzipiert. In GeoGebra-CAS muss die Funktionsdefinition einen Doppelpunkt enthalten, also $h(x) := term(x)$. Für Funktionen gibt es mehr Analysisbefehle als für Kurven.

2.7.2.4 Zwei Grafikseiten

Vielfach ist in diesem Buch die Verwendung einer zweiten Grafikseite vorgeschlagen. Das Einschalten geht über das Ansichtsmenu. In die gerade „aktive“ Seite wird die nächsten Eingabe eingetragen. Landet sie falsch ober will man etwas in beiden Ansichten sehen, so ist im Eigenschaftsdialog im Reiter „Erweitert“ ganz unten die Auswahl durch Häkchen möglich. Zusätzlich kann man auch noch ein 3D-Grafikfenster anschalten, die

CAS-Ansicht und die Tabellen-Ansicht. Da man Fenster „loslösen“ kann, ist didaktische Übersicht möglich. Beim Speichern werden alle Fenster gespeichert.

2.7.2.5 GeoGebra 3D

Während der Erstellung dieses Buches haben sich die Fähigkeiten von GeoGebra bemerkenswert weiter entwickelt. Als erstes gab es als Funktionen $z = f(x, y)$ gegebene Raumflächen (*english surfaces*). Durch die neuen Möglichkeiten, 3D-Kurven in Parameterdarstellung Kurve[x(t),y(t),z(t),t,t_0,t_1] und Raumflächen mit Oberfläche[x(s,t),y(s,t),z(s,t),s,s_0,s_1,t,t_0,t_1] umfassend darzustellen, können schon viele Wünsche erfüllt werden. Darüber hinaus ist geometrisches Konstruieren im 3D-Raum möglich (siehe auch Abschnitt 2.8.3.2).

Von den implizit gegebenen Raumflächen können nun außer Ebenen und Kugeln auch 3D-Quadriken (siehe Abschnitt 5.3.5) dargestellt werden. Vermutlich folgen bald andere implizit gegebene Raumflächen.

2.7.2.6 GeoGebra-CAS

Den Einsatz habe ich in 4.1.1.2 exemplarisch vorgeführt. Im Prinzip sind alle Fenster in GeoGebra gekoppelt. Ganz wichtig ist daher, dass Sie bei der Arbeit mit CAS **neue Parameter** taufen. Z. B. haben Sie für die Zeichnungen a, dann nehmen Sie im CAS a_c, getippt a_c. Wenn a schon eine feste Zahl ist, könnten Sie sonst im CAS keine allgemeinen Ergebnisse erhalten, wie z. B. die Nullstelle $a \pm \sqrt{a^2 - 1}$. Genau das aber interessiert, die numerischen Ergebnisse sieht man ja in der Grafik.

Für die **Analysisbefehle** müssen Sie, falls Parameter bewahrt werden sollen, auch die Funktionen neu definieren. Z. B $f_c(x) := x^2 + a_c\,x$ erlaubt dann $f_c'(x)$ mit dem Ergebnis $2x + a_c$. Weitere Arbeit ist direkt mit f_c' möglich (bei anderen CAS muss man oft neu definieren). Für die Ableitung nach anderen Variablen, wie es in diesem Buch für Polarradien $r(\theta)$ und Parameterdarstellungen nötig ist, gibt es den ausführlichen Befehl „Ableitung“: Ableitung[<Funktion>, <Variable>, <Grad der Ableitung>]. Aber achten Sie darauf, dass Sie $x_c(t) := term_x(t)$ und $y_c(t) := term_y(t)$ vorher als *Funktionen* definieren und nur x_c, den Funktions*namen*, eintragen.

2.7.3 Was (noch) nicht geht in GeoGebra

GeoGebra hat eine rasante Entwicklung gezeigt. 2016 ist es in Deutschland erst etwa ein dutzend Jahre bekannt. Mit CAS und 3D-Fenstern sind die jüngsten großen Schritte gelungen. Natürlicherweise ist noch nicht alles verwirklicht, während ich dies schreibe. Neues erfahren Sie bei GeoGebra selbst und auf der Website zum Buch

Elimination Im Thema Kurven wird bei den Herleitungen oft die Elimination von Variablen gebraucht. Einen kräftigen Befehl wie Eliminate in Mathematica gibt es in Geo-

Gebra (noch) nicht. In Abschnitt 2.8.2 ist erklärt, wie man diesen wichtigen Einzelbefehl dennoch aus Mathematica nutzen kann. In GeoGebra kann man sich evtl. mit mehrfachem `Löse` (Solve) behelfen, wenn es von Hand zu „wüst“ wird.

Skalierung der 3D-Grafiken Vorläufig muss man mit kleinen Tricks dafür sorgen, dass das Gewünschte in einem der drei vorgeschlagenen Größenbereiche liegt.

2.8 Tipps zu weiterer Mathematik-Software

2.8.1 Tipps für CAS-Taschenrechner

Meine Studierenden hatten den Taschenrechner TI-Nspire-CAS. Daher habe ich damit viel Erfahrung. Die im Buch beschriebenen Konstruktionen und CAS-Rechnungen sind auch alle mit dem „Handheld“ zu bewältigen. Auf meiner Website [Haftendorn 4] finden Sie viele TI-Nspire-Dateien zum Herunterladen, sie sind kenntlich an einem Button *.tns. Die Möglichkeiten, Farben, Strichdicken, Beschriftungen und Anderes zu steuern, sind nicht so komfortabel wie in GeoGebra. Aber die Verfügbarkeit in der Hand der Lernenden ist didaktisch „goldwert“.

2.8.2 Tipps für Wolfram-Alpha und Mathematica

Mathematica ist weltweit eines der umfassendsten CAS-Mathematik-Werkzeuge (englisch). Es wird von Steven Wolfram und seiner Firma entwickelt. Ich kenne es seit einem viertel Jahrhundert und habe auch für dieses Buch seine Möglichkeiten genutzt. Direkte Bedienungsfreundlichkeit und Interaktivität gehören nicht zu den Zielen von Mathematica, da ist GeoGebra stärker.

2.8.2.1 Für Jedermann: wolfram-alpha

Es gibt eine Plattform `www.wolfram-alpha.com`, die eine Eingabezeile zur Verfügung stellt, in der jede einzeilige mathematische Frage mit der ganzen Macht des CAS Mathematica ausgeführt wird.

Eliminierung Der Befehl `Eliminate[{g1,g2,g3},{u,v}]//Simplify` wird in diesem Buch oft benötigt. Dabei sind in der ersten geschweiften Klammer drei Gleichungen mit x, y, u, v und etwa noch Parametern. Ein Beispiel finden Sie in Abschnitt 3.1.1.5. Das Ergebnis ist eine implizite Gleichung, ggf. mit Parametern, die man mit `copy as plaintext` herausgreifen und direkt in GeoGebra eingeben kann. Statt $==$ ist $=$ zu schreiben.

Weiteres wird im Buch bei Bedarf und auf der Website zum Buch genannt.

Mathematisches Lexikon (englisch) Mit `http://mathworld.wolfram.com/topics/Curves.html` bietet sich eine schier unerschöpfliche Quelle für Kurven, darunter viele, die Ihnen dieses Buch vorstellt. Das gilt auch für Mathematik im Allgemeinen. Bedenken Sie, dass Wikipedia nicht die einzige Quelle für Ihre Internetrecherche sein sollte.

2.8.3 Tipps für Programme zur Raumgeometrie

2.8.3.1 Surfer für implizite kartesische Gleichungen im 3D-Raum

Das frei verfügbare Werkzeug für Jedermann ist `Surfer`, eine im Jahr der Mathematik 2008 in `http://imaginary.org` von dem renommierten Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach präsentierte Software, die der Mathematiker Oliver Labs [Labs 2015] genau für implizite kartesische Gleichungen von Raumflächen konzipiert hat [Labs 2008].

2.8.3.2 Cabri3D und Archimedes Geo 3D

Die Raumgeometrie ist ein ähnlich vernachlässigtes Gebiet wie die Kurven und auch hier eröffnen die Computer ganz neue Möglichkeiten. Heinz Schumann hat zur schulischen Raumgeometrie Bücher veröffentlicht [Schumann 2007] und [Schumann 2011], die sich auf das Programm Cabri-3D beziehen: `www.cabri.com`.

Die Entwicklung der Göttinger Lehrers Andreas Göbel bietet Ähnliches zu einem bescheidenen Shareware-Preis: `http://www.raumgeometrie.de`

2.8.4 Cinderella und andere starke Mathematik-Systeme

Cinderella ist ein in den 90er Jahren mathematisch sehr sauber konzipiertes Dynamisches-Geometrie-System, das viele Fragestellungen gut bearbeiten kann. Es wurde von den Professoren J. Richter-Gebert (München) und U. Kortenkamp (jetzt Potsdam) entwickelt und ist heute frei verfügbar, `http://www.cinderella.de/`. In [Mathe Vital] an der TUM, der TU München, findet man viele eindrucksvolle Beispiele.

Maple ist ein großes CAS aus Kanada, das man kaufen muss. Ende der 90er Jahre hatte ich eine Lizenz, habe das Programm dann aber nicht weiter verfolgt. Es ist in Süddeutschland verbreitet. Vermutlich kann man die Fragestellungen dieses Buches alle mit Maple umsetzen.

Maxima und wxMaxima sind freie CAS, letzteres für Windows. Hier greift der Nachteil freier Programme, die Dokumentation und Hilfestellungen lassen Wünsche offen. Aber es gibt eine Community, die sich austauscht.

2.8.5 Blick zurück und nach vorn

2000 Jahre gibt es mathematische Kurven, aber nun ermöglichen die Computer freies und kreatives Erkunden und Verstehen.

http://www.springer.com/978-3-658-14748-8

Kurven erkunden und verstehen
Mit GeoGebra und anderen Werkzeugen
Haftendorn, D.
2017, XIV, 341 S. 212 Abb. in Farbe., Softcover
ISBN: 978-3-658-14748-8