

Inhaltsverzeichnis

Aufgabenverzeichnis	xiii
1 Einleitung	1
1.1 Adressaten, Ziele und Aufbau des Buches	2
1.2 Welche Hilfen werden bereitgestellt?	3
1.3 Website zum Buch, Tipps und Fazit	4
2 Werkzeugkasten	5
2.1 Wie entsteht eine Kurve geometrisch?	5
2.2 Was bedeuten Gleichungen mit x und y ?	6
2.2.1 Punkte und Geraden	7
2.2.2 Kreise und Grundlegendes	8
2.2.3 Allgemeine Kurvengleichung und Verschiebung	9
2.3 Was sind Polarkoordinaten?	12
2.3.1 Polarkoordinaten lesen und verstehen	13
2.3.2 Polarkurven	14
2.3.3 Zeichnen von Polarkurven	15
2.3.4 Gekoppelte polar-kartesische Darstellung von Kurven	16
2.4 Was ist eine Parameterdarstellung?	18
2.4.1 Schnelle Zeichnung von Parameterkurven	19
2.4.2 Parameterdarstellung doppelt-kartesisch	19
2.4.3 Gebiet der Ebene in Parameterdarstellung	20
2.4.4 Wie rechnet man eine Darstellung in eine andere um?	20
2.5 Was sind Kurven und ihre grundlegenden Kurventypen?	22
2.5.1 Was ist eine algebraische Kurve?	22
2.5.2 Was ist eine transzendente Kurve?	25
2.6 Was haben Kurven mit dem 3D-Raum zu tun?	27
2.6.1 Wie entsteht eine Raumfläche aus einer Kurvengleichung?	27
2.6.2 Raumkurven und Raumflächen in anderen Darstellungen	28
2.7 Tipps für GeoGebra	31
2.7.1 Wo findet man GeoGebra und die Website zum Buch?	31
2.7.2 Wichtige Tipps für Kurven	32
2.7.3 Was (noch) nicht geht in GeoGebra	34
2.8 Tipps zu weiterer Mathematik-Software	35
2.8.1 Tipps für CAS-Taschenrechner	35
2.8.2 Tipps für Wolfram-Alpha und Mathematica	35
2.8.3 Tipps für Programme zur Raumgeometrie	36
2.8.4 Cinderella und andere starke Mathematik-Systeme	36
2.8.5 Blick zurück und nach vorn	36
3 Klassische Kurven ohne Ende	37
3.1 Konchoiden: die Hundekurve und ihre Verwandten	38

3.1.1	Konchoide des Nikomedes, genannt Hundekurve	38
3.1.2	Allgemeine Definition der Konchoiden	43
3.1.3	Polargleichungen der Konchoiden	44
3.1.4	Pascal'sche Schnecken oder die Limaçon	46
3.1.5	Formenreichtum der Konchoiden	49
3.2	Strophoiden: die Seilkurve und ihre Verwandten	50
3.2.1	Gerade Strophoide	50
3.2.2	Allgemeine Strophoide	58
3.2.3	Schiefe Strophoide	58
3.2.4	Noch allgemeinere Strophoiden	60
3.3	Trisektrix	62
3.3.1	Die Trisektrix von Maclaurin	62
3.4	Cissoiden: die Efeukurve und ihre Verwandten	64
3.4.1	Die Cissoide des Diokles	65
3.4.2	Allgemeine Cissoide	67
3.4.3	Die allgemeine Polargleichung der Cissoide	68
3.4.4	Die klassischen Kurven als Cissoiden	70
3.4.5	Geometrie aus der Polargleichung erfinden	71
3.4.6	Noch allgemeinere Cissoiden	73
3.5	Analysis-Anwendungen bei den klassischen Kurven	74
4	Barocke Blüten und Früchte	79
4.1	Versiera, die Hexenkurve	79
4.1.1	Die (weite) Versiera	80
4.1.2	Die enge und die weite Versiera	82
4.1.3	Versiera und ihre Rotation um die x-Achse	84
4.1.4	Allgemeine Versiera	86
4.2	Neil'sche Parabel und andere Kubiken	91
4.2.1	Klassifikation der Kubiken	92
4.2.2	Graphen der Kubiken vom Typ II., IV., III. und I	93
4.3	Cassini'sche Kurven und andere bipolare Kurven	99
4.3.1	Cassini'sche Kurven konkret	101
4.3.2	Bipolare Kurven mit beliebigen Gleichungen für r und r'	104
4.4	Lemniskaten und andere Gelenkkonstruktionen	108
4.4.1	Bernoulli'sche Lemniskate	108
4.4.2	Noch mehr Lemniskaten	116
4.4.3	Gelenke und Stangenkonstruktionen	119
4.4.4	Konstruktion der Kegelschnitte mit einem Faden	121
4.4.5	Spezielle Ellipsen-Zirkel und Stangenkonstruktion der Ellipse	123
4.4.6	Dampfmaschine und andere technische Gelenke	125
4.4.7	Ausblick	132
5	Frei erfunden und hoch hinaus	133
5.1	Frei erfundene geometrisch erzeugte Kurven	133

5.1.1	Die D-Kurve aus der Einleitung	134
5.1.2	Die deutsch- <i>d</i> -Kurve	135
5.1.3	Die Topfblumen-Kurven	136
5.1.4	Das gefangene Zweiblatt	139
5.2	Frei erfundene Gleichungen und ihre Kurven	141
5.2.1	Term-Sensibilisierung	142
5.2.2	„Konchoiden“ von Baron de Sluze	143
5.2.3	Wandelfisch	144
5.2.4	Mathematik und eigene Erfindungen	147
5.3	Hoch hinaus in den Raum	147
5.3.1	Familien der raumverwandten Kurven	148
5.3.2	Raumflächen durch Rotation der Kurven	149
5.3.3	Produkte aus Kurven	152
5.3.4	Klein'sche Quartiken	153
5.3.5	Quadriken	155
5.3.6	Harmonie der rotierten Quadriken	159
5.3.7	Exotische Raumflächen	160
6	Die unlösbaren Probleme der Antike	161
6.1	Die Unlösbarkeit	162
6.1.1	Winkeldrittel, Würfelverdoppler und Kreisquadrierer	162
6.1.2	Algebra und die Konstruktionen mit Zirkel und Lineal	162
6.2	Beliebige Winkel in n Teile teilen	165
6.2.1	Winkel dritteln	166
6.2.2	Konstruierbare Winkel mit natürlichem Winkelgrad	167
6.2.3	Die Dreiteilung des Winkels mit der Konchoide	168
6.2.4	Die n -Teilung des Winkels mit der archimedischen Spirale	169
6.2.5	Winkeldritteln mit der Trisektrix und anderen Kurven	170
6.3	Würfel verdoppeln, Delisches Problem	170
6.4	Die konstruierbaren n -Ecke	171
6.4.1	Das Siebeneck oder Heptagon	171
6.4.2	Welche n -Ecke sind konstruierbar?	173
6.5	Kreis quadrieren	174
6.5.1	π -Konstruktion als neuer Problemtypus	174
6.5.2	Die Quadratrix	175
6.5.3	Archimedes, Leonardo da Vinci und Weiteres	176
6.6	Zirkel, Lineal und Parabellineal	177
6.6.1	Gleichungen dritten Grades und Quasikonstruktionen	177
6.6.2	Weitere exakte Konstruktionen mit Parabellineal	178
6.7	Archimedes und die Quadratur der Parabel	179
7	Kegelschnitte	181
7.1	Kegelschnitte, die berühmteste Kurvenfamilie	181
7.1.1	Allgemeine 2D-Quadrikgleichung	182

7.1.2	Fazit zu den Quadriken	185
7.2	Gemeinsame Konstruktionen	185
7.2.1	Faden-Konstruktionen	186
7.2.2	Leitgeraden-Konstruktion aller Kegelschnitte	188
7.2.3	Leitkreis-Konstruktion	192
7.3	Beweise mit Dandelin'schen Kugeln	194
7.3.1	Dandelin'sche Kugeln für die Ellipse	194
7.3.2	Dandelin'sche Kugel für die Parabel	195
7.3.3	Dandelin'sche Kugeln für die Hyperbel	195
7.3.4	Ellipsensalami	195
7.4	Namensgeheimnis der Kegelschnitte	196
7.5	Reflexion und Tangenten an Kegelschnitten	197
7.5.1	Tangenten, Leitkreis und Leitgerade	198
7.5.2	Tangenten- und Normalengleichungen bei Kegelschnitten	201
7.5.3	Reflexion an den Kegelschnitten	202
7.6	Anwendungen der Kegelschnitte	203
7.6.1	Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln als Formen in unserer Welt	203
7.6.2	Anwendungen, die die Reflexionseigenschaften nutzen	207
7.6.3	Projektion der Kegelschnitte	209
7.7	Extras und Aufgaben	212
7.7.1	Krümmungskreise von Ellipse, Hyperbel und Parabel	212
7.7.2	Spannende Weiterführungen und Aufgaben	213
8	Kurven mit Drehwurm	219
8.1	Spiralen	219
8.1.1	Archimedische Spirale	221
8.1.2	Die Königin der Spiralen	223
8.1.3	Spiralen, systematisch betrachtet und frei erfunden	229
8.2	Rosetten	235
8.2.1	Grundlage für die Rosetten	236
8.2.2	Rosette als Fußpunktkurve der Astroide	240
8.2.3	Rosetten mit variabler Blattgröße	241
8.3	Rollkurven	243
8.3.1	Zykloiden	243
8.3.2	Trochoiden	246
8.3.3	Rollende Parabel und die Kettenlinie	249
8.4	Schwingungen	251
8.4.1	Sinus- und Kosinusschwingung	251
8.4.2	Lissajous-Kurven	251
9	Besondere Erzeugungsweisen für Kurven	255
9.1	Fußpunktkurven	255
9.1.1	Fußpunktkurve einer Parabel	256
9.1.2	Weitere Fußpunktkurven und Aufgaben	261

9.1.3	Negative Fußpunktkurven	263
9.2	Enveloppen, Evoluten, Involuten, Evolventen	264
9.2.1	Hüllkurven allgemein	265
9.2.2	Naum-Gabo-Kurven und grundlegendes Vorgehen	265
9.2.3	Parabel als Hüllkurve mit der Extremum-Methode	268
9.2.4	Astroide und die rutschende Leiter	269
9.3	Evoluten als Hüllkurven von Normalenscharen	270
9.3.1	Evolute einer Parabel	271
9.3.2	Kurvenpaare vom Typ: Involute und Evolute	272
9.3.3	Evolventen und Parallelkurven	273
9.4	Reflexion und Kaustiken	275
9.4.1	Kardioide, die Herzkurve	275
9.4.2	Nephroide, die Nierenkurve	280
9.4.3	Reflexionen an beliebigen Kurven	283
9.5	Inversion am Kreis	284
9.5.1	Erste Erfahrungen mit der Kreisspiegelung	284
9.5.2	Inversion von Kurven	287
9.5.3	Kartesische Abbildungsgleichungen	290
9.5.4	Anallagmatische Kurven	291
9.5.5	Inversion der Kegelschnitte als Aufgaben	292
9.5.6	Inversion von Kurven als Aufgaben	294
9.6	Exoten-Kurven	296
9.6.1	Kurven mit natürlicher Gleichung	296
9.6.2	Klothoide	297
9.6.3	Traktrix oder Schleppkurve	298
9.6.4	Kettenlinie, Kosinus- und Sinus hyperbolicus	300
10	Didaktische Übersicht	307
10.1	Grundlegendes zur Didaktik der Kurven	307
10.1.1	Das Thema Kurven heute	307
10.1.2	Blick zurück und nach vorn	308
10.1.3	Didaktische Gründe für den Softwareeinsatz	308
10.1.4	Wie kann man das freie Erkunden anregen?	309
10.1.5	Was heißt eigentlich „Verstehen“?	310
10.2	Was passt zu welchem Vorwissen?	311
10.2.1	Der Start, geeignet für die Jüngsten	311
10.2.2	Der zweite Schritt, geeignet für die Jugendlichen	312
10.2.3	Letzter Schritt in die Freiheit	313
10.2.4	Blackbox-Whitebox-Prinzip	313
10.2.5	Begabtenförderung	314
10.3	Lehramt Mathematik, Mathematik BA u.s.w	314
11	Anhang: Elemente der Analysis für Kurven	315
11.1	Kurven im Blick der Analysis	316

11.2 Steigung und Ableitung	316
11.2.1 Steigung und Ableitung, explizit kartesisch	316
11.2.2 Implizite kartesische Ableitung	317
11.2.3 Steigung und Ableitung in Parameterdarstellung	317
11.2.4 Steigung bei Polarkurven	318
11.2.5 Gleichungen von Tangente und Normale	320
11.3 Flächen und Volumina der Rotationskörper	320
11.3.1 Fläche bei Funktionen und expliziten Gleichungen	320
11.3.2 Kurven in Parameterdarstellung	321
11.3.3 Flächen bei Polarkurven	321
11.3.4 Volumen von Rotationskörpern	322
11.4 Bogenlänge	324
11.4.1 Bogenlänge bei Funktionen und Parameterkurven	324
11.4.2 Bogenlänge bei Polarkurven	324
11.5 Krümmungen	325
11.5.1 Definition der Krümmung und interaktive Zugänge	325
11.5.2 Herleitung der kartesischen Krümmungsformel aus der Definition	327
11.5.3 Krümmungsformel für Polarkurven	327
11.5.4 Orientierung von Kurven	328
11.5.5 Wirkung des Vorzeichens der Krümmung	329
Literaturverzeichnis	331
Index	337

Kurven erkunden und verstehen

Mit GeoGebra und anderen Werkzeugen

Haftendorn, D.

2017, XIV, 341 S. 212 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-658-14748-8