1 Erste mathematische Erkundungen

Zum Auftakt unserer Entdeckungsreise in die Mathematik untersuchen wir drei Probleme: ein einfaches Problem zum Aufwärmen und zwei Probleme, deren Lösung sich uns erst nach einigem Suchen erschließt. Dabei werden wir besonders darauf achten, wie wir beim Problemlösen intuitiv vorgehen. Indem wir uns unsere Strategien bewusst machen und sie benennen, können wir sie bei schwierigeren Aufgaben gezielt einsetzen. Am Ende des Kapitels stellen wir sie in einem Werkzeugkasten zusammen. Das wird der Grundstock unserer Ausrüstung für die ganze Reise sein.

1.1 Zersägen eines Baumstamms

? Problem 1.1

Wie lange benötigt man zum Zersägen eines 7 Meter langen Baumstamms in 1-Meter-Stücke, wenn jeder Schnitt eine halbe Minute dauert?

Ihre Lösung wird wahrscheinlich so aussehen:

! Lösung

Man braucht sechs Schnitte, daher dauert es sechs mal eine halbe Minute, also drei Minuten. !

Rückschau

Sehen wir uns die Lösung genauer an. Dabei offenbaren sich uns grundlegende Strategien.

- ❑ Als **Zwischenziele** haben wir zunächst die Zahl der Teilstücke (7 = 7 m /1 m) und daraus die Anzahl der Schnitte (6) bestimmt. Zwischenziel
- ❑ Betrachten wir die Teilaufgabe, die Anzahl der Schnitte aus der Zahl der Teilstücke zu bestimmen. Ein häufiger Anfängerfehler ist es, einfach draufloszurechnen: 7 durch 1 ist 7, also 7 Schnitte.

D. Grieser, *Mathematisches Problemlösen und Beweisen*, Springer Studium Mathematik – Bachelor,
DOI 10.1007/978-3-658-14765-5_2

Die richtige Antwort ist aber 6 Schnitte. Diese **Verschiebung um eins** tritt oft auf. Wie gehen wir damit um, wenn wir unsicher sind, ob wir um eins verschieben müssen oder nicht? Hier hilft eine

Skizze

Skizze, siehe Abbildung 1.1.

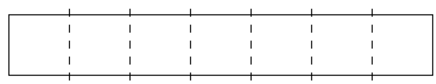


Abb. 1.1 Ein Schnitt weniger als Teile

Vereinfachen

- ❑ Um noch klarer zu sehen, können wir die Aufgabe **vereinfachen**, z. B. indem wir 7 durch 2 oder 3 ersetzen und beobachten, was passiert: Ein Schnitt für 2 Teilstücke, zwei Schnitte für 3 Teilstücke etc.

Muster erkennen

- ❑ Wir erkennen ein **Muster:** *Die Anzahl der Schnitte ist immer um eins kleiner als die Anzahl der Teilstücke.*
- ❑ Die endgültige Sicherheit, dass dies *immer*[1] stimmt, gibt uns erst ein *Beweis*. Dieser könnte z. B. so aussehen:

  > Jeder Schnitt erhöht die Anzahl der Stücke um eins. Anfangs haben wir 1 Stück (den ganzen Stamm), am Ende 7. Daher müssen wir $7 - 1 = 6$ Schnitte machen.

- ❑ Implizit haben wir angenommen, dass der Baumstamm schon abgesägt war! Stünde er noch angewurzelt, bräuchte man doch 7 Schnitte. Und berücksichtigt man die Krone, braucht man 8 Schnitte. Die Aufgabe war also etwas ungenau gestellt.
- ❑ Wenn wir erst den Stamm in 3 und 4 Meter lange Stücke zersägen, diese dann nebeneinanderlegen und gleichzeitig zersägen und schließlich alle entstehenden 2-Meter-Stücke mit einem Schnitt zersägen, kommen wir mit drei Schnitten aus. Baumfäller würden zwar nicht so vorgehen, jedoch führt dies auf ein interessantes mathematisches Problem, siehe Aufgabe A 1.5.

[1] Z. B. auch für eine Million Teilstücke – dies können wir nicht mehr zeichnen; das war in dieser Aufgabe zwar nicht gefragt, aber es ist befriedigend, allgemeine Regeln zu erkennen und mit Bestimmtheit sagen zu können, dass sie immer stimmen.

1.2 Ein Problem mit Nullen

Wagen wir uns an eine schwierigere Aufgabe.

? Problem 1.2

Mit wie vielen Nullen endet $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 99 \cdot 100$?

Man schreibt abkürzend 100! (in Worten: Hundert **Fakultät**) für das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 99 \cdot 100$.

Untersuchung

Ausrechnen können wir das Produkt nicht, das ist viel zu groß, auch für den Taschenrechner.[2] Wir brauchen daher andere Ideen. Im ersten Moment ist manch einer vielleicht geneigt zu denken, dass die Antwort zwei ist: Die beiden Nullen vom Faktor 100. Bei genauerem Hinsehen entdeckt er vielleicht, dass in dem Produkt noch der Faktor 10 steckt und damit eine weitere Null hinzukommt. Aber auch 20, 30, etc. tragen Nullen bei. Das ergibt insgesamt 11 Nullen. Sind damit alle gefunden? Können wir sicher sein? Problem verstehen

Um diese Fragen zu beantworten, müssen wir verstehen, woher die Nullen kommen. Das könnte z. B. so ablaufen:

- ▷ **Vereinfache!** Das heißt hier: Betrachten Sie das analoge Problem für kleinere Zahlen, um ein **Gefühl für das Problem zu bekommen**, also dafür, woher die Nullen am Ende kommen. Zum Beispiel $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Gefühl bekommen und vereinfachen
- ▷ Um die Übersicht zu behalten, erstellen wir eine **Tabelle:** Tabelle

n	1	2	3	4	5	6
$n!$	1	2	6	24	120	720

Die erste Null tritt bei 5! auf. Warum? Schreiben wir es aus: $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$. **Woher kommt die Null** am Ende des Ergebnisses 120? Die Null bedeutet, dass 120 durch 10 teilbar ist. Die 10 wiederum Ziel analysieren

[2] Manche moderne Taschenrechner können das. Wenn Sie so einen haben, versuchen Sie einmal, ihm dieselbe Aufgabe mit 1000! oder 10000! zu stellen. Oder die Aufgabe A 1.6.

kann man als $2 \cdot 5$ schreiben, und sowohl 2 als auch 5 treten in 5! auf. Daher kommt also die Null. Bei $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ kommt keine fünf vor, daher hat es keine Null am Ende.

Wichtige Einsicht: Eine Null am Ende einer Zahl bedeutet, dass die Zahl durch 2 und durch 5 teilbar ist.

sich schrittweise vorarbeiten

Was ist wesentlich?

▷ Wie steht's mit zwei Nullen am Ende? Die Zahl muss durch 100 teilbar sein, also durch $10 \cdot 10 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5^2$. Wir brauchen dafür zwei Faktoren 5 und zwei Faktoren 2. Lassen Sie uns die Tabelle in Gedanken fortsetzen. Dabei brauchen wir nichts auszurechnen, **wir müssen nur auf die Fünfen und die Zweien achten**. Wann tritt der nächste Faktor 5 auf? Bei 6, 7, 8, 9 nicht, aber bei 10, denn $10 = 2 \cdot 5$. Faktoren 2 gibt es im Überfluss, sie stecken in jeder der Zahlen 2,4,6,... Zwei Zweien würden schon reichen. Also hat 10! zwei Nullen am Ende. Wie geht's weiter? Versuchen Sie nun, die Aufgabe zu lösen.[3]

Denkpause

Muster erkennen

▷ Vielleicht erkennen Sie jetzt das **Muster:** Für jedes $k = 1,2,3,\dots$ gilt: Dass eine Zahl in k Nullen endet, bedeutet, dass die Zahl durch $10^k = 2^k \cdot 5^k$ teilbar ist, d. h. dass sie mindestens k mal den Faktor 5 und mindestens k mal den Faktor 2 enthält.

▷ Wir sollten also zählen, wie oft 5 und 2 als Faktoren in 100! vorkommen.

Fangen wir mit dem Faktor 5 an: Welche der Faktoren $1,2,3,\dots,100$ in 100! tragen eine 5 bei? Offenbar $5,10,15,20,25,\dots,100$. Wie viele sind das? Schreiben wir dies als $1 \cdot 5$, $2 \cdot 5$, $3 \cdot 5, \dots, 20 \cdot 5$, sehen wir, dass dies 20 Stück sind. Ist das die Antwort?

Vorsicht, genau hinsehen: $25 = 5 \cdot 5$ trägt zwei Fünfen bei. Welche Faktoren in 100! tun das? Offenbar genau die Vielfachen von 25, also 25, 50, 75, 100. Diese geben jeweils eine weitere 5 her, insgesamt

[3] Immer, wenn Sie das Symbol ‚Denkpause' sehen, legen Sie das Buch zur Seite, nehmen Sie Papier und Stift zur Hand und versuchen Sie zunächst selbständig weiterzukommen.

4 Stück. (Der Faktor $125 = 5^3$ würde sogar drei Fünfen beitragen, aber so weit kommen wir bei 100! nicht.) Insgesamt haben wir also 24 Fünfen in 100!

Wie steht's mit den Zweien? Offenbar trägt jede der 50 geraden Zahlen $2, 4, \ldots, 100$ mindestens einen Faktor 2 bei, wir haben also deutlich mehr als 24 Zweien. Die ‚überzähligen' Zweien ergeben aber keine Nullen am Ende von 100!, weil ihnen die Fünfer-Partner fehlen.

Wir erhalten die *Antwort:* 100! endet mit 24 Nullen.

Um unsere Lösung anderen mitzuteilen, sollten wir sie geordnet aufschreiben. Das hilft uns auch, sie auf Vollständigkeit zu überprüfen. Das könnte so aussehen:

! Lösung zu Problem 1.2

Die Anzahl der Nullen, mit denen 100! endet, ist die größte ganze Zahl k, für die 100! durch 10^k teilbar ist. Weil $10 = 2 \cdot 5$ gilt, ist das gleich der größten ganzen Zahl k, für die 100! durch $2^k \cdot 5^k$, also durch 2^k und durch 5^k teilbar ist.

Die 5 tritt als Faktor in den 20 Zahlen 5,10,15,...,100 auf und dabei in den 4 Zahlen 25,50,75,100 doppelt. Also tritt sie in 100! genau 20+4=24 mal auf, d. h. $k = 24$ ist das größte k, für das 100! durch 5^k teilbar ist.

Die 2 tritt als Faktor in den 50 Zahlen 2,4,...,100 auf, in einigen davon mehrfach. Also tritt sie in 100! mindestens 50 mal auf. Die genaue Zahl ist unwichtig, wir verwenden nur, dass die Anzahl mindestens 24 ist.

Daher ist die größte Zahl k, für die 100! durch 2^k *und* durch 5^k teilbar ist, gleich 24. Somit endet 100! mit genau 24 Nullen. !

Rückschau zu Problem 1.2

Wir konnten das Problem lösen, indem wir die **Mechanismen verstanden** haben, die zum Auftreten von Nullen am Ende einer Zahl führen. Dabei haben uns folgende Problemlösestrategien geholfen.

Zunächst halfen uns folgende Schritte, **ein Gefühl für das Problem zu bekommen.**

- ❑ Das Problem **vereinfachen**, um es handhabbar zu machen (z. B. 5! statt 100! betrachten)
- ❑ Eine **Tabelle** anfertigen, um die Übersicht zu behalten

Den Durchbruch schafften wir dann mit weiteren Überlegungen:

- ❑ **Das Ziel analysieren** (Woher kommen die Nullen am Ende?), zunächst am einfacheren Fall 5!
- ❑ Sich **schrittweise** vom einfachen Fall zum schwierigeren Ausgangsproblem **vorarbeiten** (wo kommt die nächste Null – bei 10!); dabei fokussieren wir auf das Wesentliche (die Fünfen und Zweien)
- ❑ Muster, Regeln erkennen (Anzahl der Nullen = Anzahl der Faktoren 5 bzw. 2)

Wichtig ist natürlich, immer aufmerksam zu sein, um nichts zu übersehen (die zusätzlichen Fünfen in 25, 50, 75 und 100).

Vielleicht wollen Sie jetzt gleich die allgemeine Frage untersuchen: In wie vielen Nullen endet $n!$, wenn n eine beliebige natürliche Zahl ist? Siehe Aufgabe **A 1.6**.

1.3 Ein Problem über Geraden in der Ebene

? Problem 1.3

Gegeben seien n Geraden in der Ebene, von denen keine zwei parallel seien und von denen keine drei durch einen Punkt gehen sollen[4]*. In wie viele Teilgebiete zerlegen sie die Ebene?*

n steht hier, wie in vielen der folgenden Probleme, für eine beliebige natürliche Zahl: $n = 1,2,3,\ldots$. Die Aufgabe hätte statt für n Geraden auch für z. B. 100 Geraden gestellt sein können. Doch in Problem 1.2 haben wir gesehen, dass es auch dann nützlich sein könnte, das Problem zunächst für andere (kleinere) Anzahlen zu betrachten. Daher stellen wir von jetzt an Probleme meist in dieser allgemeineren Form.

[4] Man sagt auch, die Geraden seien dann **in allgemeiner Lage**.

Untersuchung

▷ Sehen wir uns die Aufgabe genau an: Verstehen wir die Voraussetzungen? Welche Geradenkonfigurationen sind erlaubt, welche nicht? Wir machen ein paar **Skizzen**, sehen uns **Beispiele** an. Abbildung 1.2 zeigt erlaubte Anordnungen der Geraden, die Konfigurationen in Abbildung 1.3 sind nicht erlaubt: Links sind zwei der Geraden parallel, rechts gehen drei Geraden durch einen Punkt. Verstehen Skizze Beispiele

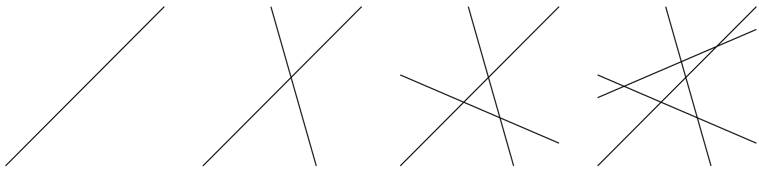


Abb. 1.2 Erlaubte Geradenkonfigurationen

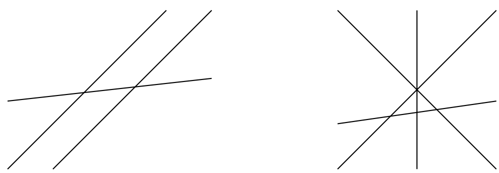


Abb. 1.3 Nicht erlaubte Geradenkonfigurationen

▷ Was ist gesucht? Die Anzahl der Teilgebiete, in die die Ebene durch die Geraden zerlegt wird. Wir zählen die Teilgebiete bei den Konfigurationen in Abbildung 1.2 für $n = 1,2,3,4$ und machen eine **Tabelle.** Tabelle

n	1	2	3	4
a_n	2	4	7	11

Hierbei haben wir der Kürze halber a_n für die gesuchte Zahl geschrieben (**Notation einführen**). Notation einführen

Um weitere Eindrücke zu dem Problem zu sammeln, sehen wir uns auch die nicht erlaubten Konfigurationen in Abbildung 1.3 an: Links ist $n = 3$ mit 6 Teilstücken, rechts ist $n = 4$ mit 10 Teilstücken. Beide Anzahlen weichen von den Werten von a_3 bzw. a_4 in der Tabelle ab: Die Voraussetzungen sind anscheinend wirklich von Bedeutung.

▷ *Vorsicht:* Es könnte durchaus sein, dass die Anzahl der Teilgebiete auch für erlaubte Konfigurationen von der *Lage* der Geraden abhängt. Wir zeichnen ein paar andere Möglichkeiten für $n = 4$ und zählen die Anzahl der Teilgebiete, siehe Abbildung 1.4 für einige Beispiele. Wir sehen, dass jedes Mal 11 herauskommt. Für diese Beispiele hängt die Anzahl der Teilgebiete also doch nur von der *Anzahl* der Geraden ab, nicht von deren (erlaubter) Lage. Es ist Teil der Aufgabe herauszufinden, ob das immer so ist.

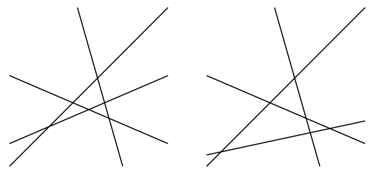


Abb. 1.4 Zwei weitere Arten, vier Geraden anzuordnen

Muster erkennen

▷ Sehen Sie sich die Tabelle für a_n an. Erkennen Sie ein **Muster?**

Denkpause

Vielleicht haben Sie eines der folgenden Muster erkannt:

– Jede Zahl a_n ist die Summe der links von ihr und der über ihr stehenden Zahl.
– Die Differenz zweier aufeinanderfolgenden Zahlen a_n nimmt von einer Zahl zur nächsten um eins zu.
– Jede Zahl a_n ist die Summe der Zahlen der ersten Zeile, bis zu der darüber stehenden, plus eins.

Alle sind richtig. **Es gibt immer verschiedene Vorgehensweisen.**[5] Vielleicht haben Sie auch ein anderes Muster erkannt.

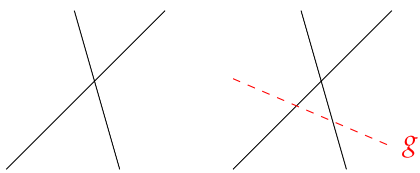
[5] So verschieden sind sie hier im Beispiel gar nicht. Überzeugen Sie sich, dass die ersten beiden Antworten im Wesentlichen dasselbe aussagen und die dritte auch eng mit den ersten beiden zusammenhängt.

Um fortfahren zu können, nehmen wir an, Sie hätten das erste Muster erkannt. Wie kann man es allgemein formulieren? Links von a_n steht a_{n-1}, darüber steht n. Wir haben also beobachtet, dass

$$a_n = a_{n-1} + n \qquad \text{für } n = 2,3,4 \tag{1.1}$$

gilt. Geht das so weiter? Können wir einen Grund erkennen, dass dies für *alle* $n \geq 2$ gilt? Dies zu untersuchen, ist unser erstes **Zwischenziel.** Zwischenziel

▷ Was bedeutet Gleichung (1.1)? Die Zahl a_{n-1} ist die Anzahl der Teilgebiete bei $n-1$ Geraden, a_n die Anzahl bei n Geraden. Wir wollen also untersuchen, ob beim Hinzulegen einer Geraden zu $n-1$ vorhandenen Geraden immer genau n Teilgebiete hinzukommen. Wir untersuchen dies zunächst für ein **Beispiel,** versuchen aber, dabei **allgemeine Regeln zu entdecken.** Woher kommen die neuen Gebiete, wenn ich zu zwei Geraden eine dritte hinzulege? Beispiel

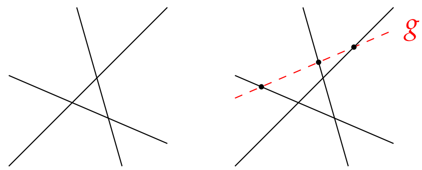


Denkpause

▷ *Einsicht:* Die neuen Teilgebiete kommen daher, dass die zusätzliche Gerade g einige der schon vorher (bei 2 Geraden) vorhandenen Teilgebiete zerteilt!

▷ Wie viele vorhandene Teilgebiete werden von g zerteilt? Offenbar eins für jeden Abschnitt von g. Die Abschnitte sind dabei durch die Schnittpunkte von g mit vorhandenen Geraden bestimmt. Wie viele Abschnitte gibt es? In diesem Fall 3. Warum? Weil es zwei Schnittpunkte gibt! Warum zwei Schnittpunkte? Einer mit jeder der vorhandenen Geraden!

▷ Funktioniert das auch für 3 vorhandene Geraden, wenn man eine vierte hinzulegt? Ja: Drei Schnittpunkte, vier Abschnitte, also vier neue Teilgebiete.



Allgemeine Regel finden

▷ Und allgemein? Sagen wir, es liegen $n-1$ Geraden schon da. Wir legen eine weitere Gerade hinzu. Wie viele Schnittpunkte hat sie mit den vorhandenen Geraden? Mit jeder einen, also $n-1$. Daher n Abschnitte, also zerlegt g genau n der vorhandenen Teilgebiete in zwei Teile, es kommen also n Teile hinzu und damit folgt (1.1)!

▷ Stimmt das? Warum hat g mit jeder vorhandenen Geraden einen Schnittpunkt? Wann haben zwei Geraden einen Schnittpunkt? Wenn sie nicht parallel sind! Jetzt sehen wir, wo die Voraussetzungen ins Spiel kommen.

Voraussetzung verwendet

▷ **Haben wir die Voraussetzungen verwendet?** Wozu wird die andere Voraussetzung gebraucht, dass keine drei Geraden durch einen Punkt gehen? Sonst könnte g durch einen Schnittpunkt zweier vorhandener Geraden gehen und dann würde g in weniger als n Teile zerlegt.

▷ Wir sehen also, warum Gleichung (1.1) stimmt, und haben damit das Zwischenziel erreicht. Dies ist eine *Rekursion*, d. h. eine Gleichung, die a_n mittels a_{n-1} darstellt. Das ist schon ein Erfolg, wir können damit schnell $a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots$ anfangend mit $a_1 = 2$ berechnen, ohne Bilder zu zeichnen.

Noch besser wäre aber eine Formel, die a_n direkt mittels n darstellt, ohne dass man vorher $a_1, a_2, \ldots$ berechnen muss. Diese Formel erhalten wir in zwei Schritten: Zuerst *setzen wir die Rekursion immer wieder in sich selbst ein:* Ersetzt man[6] n durch $n-1$, folgt $a_{n-1} = a_{n-2} + (n-1)$, also

$$a_n = a_{n-1} + n = a_{n-2} + (n-1) + n\,,$$

[6]Dies ist erlaubt, da Formel (1.1) für alle Zahlen n gilt, also auch für die Zahl $n-1$.

und wiederholtes Einsetzen liefert

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_{n-2} + (n-1) + n = a_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n = \dots \\
&= a_1 + 2 + 3 + \cdots + n \\
&= 2 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n\,.
\end{aligned}
$$

(Woher wissen wir, was in der zweiten Zeile stehen muss? Die vorherigen Ausdrücke folgen einem Muster: Die erste dazuaddierte Zahl ist um eins größer als der Index des vorangegangenen a, z.B. $a_{n-2} + (n-1) + \dots$, $a_{n-3} + (n-2) + \dots$. Wenn wir bei a_1 ankommen, erhalten wir also $a_1 + 2 + \dots$.)

▷ Die Herleitung der Formel (1.1) zeigt auch, dass die Anzahl der Teilgebiete nicht von der Anordnung der Geraden abhängt, vgl. Abbildung 1.4.

Die Formel für a_n ist immer noch nicht befriedigend: Um z.B. a_{100} zu berechnen, müssten wir 99 Additionen durchführen. Daher fassen wir im zweiten Schritt die Formel für a_n zusammenfassen, mit Hilfe des berühmten Tricks[7] [8] für die Berechnung von $1 + \cdots + n =: s$:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
1 & + & 2 & + & \dots & + & (n-1) & + & n & = & s \\
n & + & (n-1) & + & \dots & + & 2 & + & 1 & = & s \\
\hline
(n+1) & + & (n+1) & + & \dots & + & (n+1) & + & (n+1) & = & 2s
\end{array}
$$

Wie oft tritt hier $n+1$ auf? Die erste Zeile zeigt, dass es n Male sind. Also $n(n+1) = 2s$, also

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}\,. \tag{1.2}$$

Schreiben wir die Lösung wieder geordnet auf.

[7] Den sollten Sie in Ihrer Trickkiste haben! Er wird Carl Friedrich Gauss (1777-1855) zugeschrieben, war aber wahrscheinlich schon vorher bekannt.

[8] Statt der hier folgenden Rechnung kann man auch so vorgehen, dass man in $1 + \cdots + n$ den ersten und letzten Summanden zu $n+1$ zusammenfasst, dann den zweiten und vorletzten ebenfalls zu $n+1$ etc. Man muss allerdings aufpassen, was ‚in der Mitte' passiert, und das ist für n gerade/ungerade unterschiedlich. Eine Fallunterscheidung führt auch hier zur selben Formel wie oben angegeben. Die im Text angegebene Methode ist eleganter, da sie ohne Fallunterscheidung auskommt.

! Lösung zu Problem 1.3

Offenbar gilt $a_1 = 2$. Wir zeigen zunächst, dass für alle $n \geq 2$ die Rekursion

$$a_n = a_{n-1} + n \tag{1.3}$$

gilt. Seien hierzu $n-1$ Geraden in der Ebene gegeben, keine zwei parallel und keine drei durch einen Punkt. Legt man eine weitere Gerade g hinzu, schneidet diese jede der vorhandenen $n-1$ Geraden, da sie zu keiner von diesen parallel ist, und die Schnittpunkte sind alle verschieden, da keine drei Geraden durch einen Punkt gehen. Also gibt es $n-1$ Schnittpunkte, und diese teilen g in n Teile. Jedes dieser Teile läuft durch eines der a_{n-1} Teilstücke, in das die $n-1$ Geraden die Ebene geteilt hatten, und zerteilt dies in zwei Stücke. Daher kommen n Teilstücke in der Ebene hinzu, also gilt die Rekursion (1.3).

Durch Auflösen der Rekursion (wiederholtes Einsetzen in sich selbst) folgt mit $a_1 = 2$ und aus Gleichung (1.2) die *Lösung*

$$a_n = 2 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}\,. \tag{1.4}$$

!

Rückschau zu Problem 1.3

Wie in Problem 1.2 haben wir zunächst mit Hilfe von **Beispielen** (hier: **Skizzen**) und einer **Tabelle** ein Gefühl für das Problem bekommen. Die Beispiele halfen uns auch, die Voraussetzungen in der **Problemstellung zu verstehen**.

Wir haben dann ein **Muster** erkannt. Das **Einführen einer Notation** erleichterte es uns, das Muster in einer allgemeinen Formel (1.1) auszudrücken. Um diese zu untersuchen, formulierten wir sie mittels des Ausgangsproblems (Hinzulegen einer Gerade). Wir **fokussierten auf das Ziel** (Woher kommen die neuen Gebiete?). Wir konnten die Formel schließlich beweisen, indem wir uns **in kleinen, konkreten Schritten vorangearbeitet** haben, immer das Ziel im Blick. Dabei war es wieder nützlich, dies an einem **Beispiel** durchzuführen, aber wir haben immer so argumentiert, dass es sich auf die allgemeine Situation übertragen ließ. Ein **Blick auf die Voraussetzungen** half uns, Argumentationslücken zu stopfen.

Schließlich haben wir aus der Rekursion (1.1) mit Hilfe des Gauß-Tricks (einer **Technik**) die Lösung (1.4) hergeleitet.

1.4 Werkzeugkasten

Sie haben in diesem Kapitel bereits die wichtigsten allgemeinen Problemlösestrategien kennengelernt. Diese werden hier zusammengestellt. Diese Liste wird in späteren Kapiteln erweitert. Die gesamte Liste finden Sie in Anhang A.

1. Verstehen des Problems
Lesen Sie die Aufgabe genau durch. Was ist gegeben, was ist gesucht? Was sind die Voraussetzungen?

2. Untersuchung des Problems

❑ Ein Gefühl für das Problem bekommen, es anpacken.

Hierbei sind nützlich:

- Zunächst ein einfacheres Problem betrachten
- Spezialfälle, Beispiele betrachten
- Skizzen, Tabellen anfertigen

❑ Mit Hilfe der Beispiele eine allgemeine Regel finden

❑ Nach Mustern suchen

❑ Zwischenziele formulieren

❑ Was ist wesentlich, worauf kommt es an?

❑ Sich in kleinen Schritten vorarbeiten

❑ Nachprüfen: Haben wir die Voraussetzungen verwendet?

❑ Notation einführen[9]

3. Geordnetes Aufschreiben der Lösung
Dabei kommt es auf Folgendes an:

❑ Schlüssige Argumentation

[9] Das heißt abkürzende Bezeichnungen, z. B. a_n für die gesuchte Anzahl in Problem 1.3.

- ❏ Sinnvolle Anordnung
- ❏ Verständliches Schreiben (Ideen, Motivationen erwähnen)[10]
- ❏ Korrekte Verwendung mathematischer Ausdrucksweisen

4. Rückschau
Was habe ich gelernt? Ist die Lösung sinnvoll? Geht es auch anders, besser?

Mit dem geordneten Aufschreiben und der Rückschau kontrollieren Sie sich auch selbst; dann merken Sie manchmal, dass Sie bei der Untersuchung etwas übersehen haben. Die Rückschau hilft auch bei der Bearbeitung weiterer Probleme.

Aufgaben

Machen Sie sich beim Lösen der Aufgaben bewusst, welche der erwähnten Problemlösestrategien Sie verwenden.

1 A 1.1 Bei welchen der folgenden Beispiele tritt eine Verschiebung um eins auf? Sie könnten an den Fingern abzählen, geben Sie aber auch ein gutes Argument an. Finden Sie weitere Beispiele.

- ❏ In einer Baumreihe stehen 5 Bäume, jeder ist vom nächsten 20 Meter entfernt. Wie lang ist die Reihe?
- ❏ Ich habe ein Hotel gebucht vom 20. Mai (Ankunft) bis zum 23. Mai (Abreise). Wie viele Nächte sind das? Wie viele vom 3. bis zum 29. Mai?
- ❏ In einer Baumreihe stehen 5 Bäume, die Reihe ist 100 Meter lang. Angenommen, der Abstand von einem Baum zum nächsten ist immer gleich. Wie groß ist dieser Abstand?
- ❏ Ich arbeite von 8 Uhr bis 17 Uhr. Wie viele Stunden sind das?
- ❏ Die Uhr an meinem Arbeitsplatz läutet zu jeder vollen Stunde. Wie oft höre ich sie an einem Tag?
- ❏ Wie viele dreistellige natürliche Zahlen gibt es?

[10] Verbreitet ist die Vorstellung, dass mathematische Texte nur aus Formeln und Symbolen bestehen. Weit gefehlt! Erklärungen sind genauso wichtig wie Formeln, in manchen mathematischen Texten kommen gar keine Formeln vor.

❑ Wie viele ganze Zahlen n gibt es mit $15 \leq n \leq 87$? Wie viele mit $-10 \leq n \leq 10$?

A 1.2 Sie wollen n Quadrate wie im Bild aus Streichhölzern legen. 1
Wie viele Streichhölzer brauchen Sie?

A 1.3 Sei $n \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie die Summe der ersten n ungeraden 2
Zahlen, das heißt die Summe

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)\,.$$

Berechnen Sie die Summe für einige natürliche Zahlen n. Erkennen Sie eine Regelmäßigkeit? Stellen Sie eine Vermutung auf und beweisen Sie diese.

A 1.4 Sei $n \in \mathbb{N}$. Ist es möglich, n (paarweise verschiedene) Punk- 2
te $P_1, \ldots, P_n$ und eine Gerade g so in die Ebene zu legen, dass g durch keinen der Punkte P_i verläuft, aber die Verbindungsstrecken $P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}P_n$ sowie P_nP_1 schneidet? Betrachten Sie ein paar Beispiele, stellen Sie eine Vermutung auf und beweisen Sie diese.

A 1.5 Wir ändern Problem 1.1 wie folgt ab: Vor jedem Schnitt dürfen 3
wir eine beliebige Anzahl bereits vorhandener Stücke nebeneinanderlegen und dann mit einem geraden Schnitt gleichzeitig zersägen. Wie viele Schnitte braucht man mindestens für einen Baumstamm der Länge 4, 8, 16, 32, 27, n? Begründen Sie, dass Ihre Antwort bestmöglich ist, d.h. dass es nicht mit weniger Schnitten geht.

A 1.6 Sei $n \in \mathbb{N}$. Entwickeln Sie eine Formel für die Anzahl der 2
Nullen am Ende der Dezimaldarstellung von $n!$.

A 1.7 Die Strategie ‚Spezialfälle betrachten, Muster erkennen' kann 2–3
auch beim Herleiten von Formeln nützlich sein. Hier sind drei Beispiele.

a) Finden Sie eine geschlossene Formel für die Summe

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n!$$

b) Finden Sie eine geschlossene Formel für die Summe

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!}$$

c) (Mit etwas mehr Rechnung:) Berechnen Sie die Zahlen

$$1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}, \ 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}, \ 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}, \ldots$$

als Brüche. Was beobachten Sie? Formulieren und beweisen Sie eine allgemeine Formel. Verwenden Sie diese, um einen geschlossenen Ausdruck für die Summe

$$\sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}$$

zu finden.

1-2 A 1.8 Für jede der Zahlenfolgen beschreiben Sie zunächst in Worten eine Regelmäßigkeit und formulieren Sie sie dann in Formeln. Angegeben sind $a_1, a_2, \ldots$. Erfinden Sie weitere solche Aufgaben.

Beispiel: 1, 4, 9, 16, 25: Quadratzahlen, $a_n = n^2$

Beispiel: 7, 9, 12, 16, 21: Die Differenz nimmt immer um eins zu, von a_1 zu a_2 ist sie 2 usw., $a_n = a_{n-1} + n$ mit $a_1 = 7$. Eine andere richtige Antwort ist $a_n = \frac{n(n+1)}{2} + 6$.

a) 3, 4, 5, 6, 7

b) 3, 9, 36, 180, 1080

c) 1, −1, 1, −1, 1

d) 1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31

e) 2, 8, 24, 64, 160

3 A 1.9 Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne s_n die Anzahl der Möglichkeiten, n als geordnete Summe natürlicher Zahlen zu schreiben. Dabei soll die Darstellung von n als n (ein Summand) mitgezählt werden. Beispielsweise gilt

$$2 = 1 + 1 \text{ sowie } 3 = 1 + 2 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1$$

und damit $s_2 = 2$ und $s_3 = 4$. Bestimmen Sie s_4 und s_5, stellen Sie eine Vermutung auf und beweisen Sie diese.

A 1.10 Stellen Sie eine Vermutung über die Gültigkeit der Aussage „$n^2 + n + 41$ ist eine Primzahl für alle $n \in \mathbb{N}$“ auf. Geben Sie einen Beweis oder ggf. ein Gegenbeispiel. 2

A 1.11 Untersuchen Sie, in wie viele Teile die Ebene durch n Geraden geteilt wird, von denen keine drei durch einen Punkt gehen (von denen aber einige parallel sein dürfen). Die Antwort hängt nicht nur von n ab. Wovon hängt sie ab? Identifizieren Sie Größen, die an der Geradenkonfiguration abgelesen werden können und durch die man die Anzahl der Gebiete ausdrücken kann. Im Spezialfall allgemeiner Lage sollte dabei die in diesem Kapitel gefundene Antwort herauskommen. 4

http://www.springer.com/978-3-658-14764-8

Mathematisches Problemlösen und Beweisen
Eine Entdeckungsreise in die Mathematik
Grieser, D.
2017, XIII, 321 S. 70 Abb., 14 Abb. in Farbe., Softcover
ISBN: 978-3-658-14764-8