

2. Begriffsklärung: Stellenwert – Verständnis

In der Einleitung wurde dargestellt, dass *Stellenwertverständnis* für die arithmetische Entwicklung in den ersten beiden Schuljahren als wichtige Anforderung gilt.

Eine der ersten großen Aufgaben im zweiten Schuljahr ist die Entwicklung und Festigung von Stellenwertverständnis im Zusammenhang mit der Zahlenraumerweiterung bis 100 (Schipper 2009, 119).

Bei der Formulierung von Aussagen dieser Art wird häufig nicht eindeutig beschrieben, welche konkreten Kompetenzen damit in Verbindung stehen oder welche Definition *Stellenwertverständnis* zugrunde liegt. Zur Annäherung an die Begrifflichkeit wird in diesem Kapitel die mathematische Definition zum dezimalen Stellenwertsystem dargestellt. Daran schließen sich ausgewählte Theorien an, die in der Mathematikdidaktik zur Klärung von Verständnis herangezogen werden. Dies soll als Grundlage für eine Ausschärfung des Begriffs *Stellenwertverständnis* dienen.

2.1 Mathematische Definition von dezimalem Stellenwertsystem

Eine *Ziffer*¹ ist ein Element einer Menge von Symbolen zur Darstellung von Zahlen. Im dezimalen Stellenwertsystem werden folgende Ziffern verwendet: 0², 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Die Anzahl der Ziffern in einem System gibt dessen Basis³ an (vgl. Danz 1974, 19).

Eine *Zahl* ist eine Anordnung von Ziffern, die in einem Stellenwertsystem mit Basis $g, g \in \mathbb{N}$ einen eindeutigen Wert darstellen.

Ein Stellenwertsystem hat eine Basis $g \in \mathbb{N}$, $g \geq 2$. Jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ kann eindeutig in folgender Form dargestellt werden.

$$n = z_k g^k + z_{k-1} g^{k-1} + \dots + z_2 g^2 + z_1 g^1 + z_0 g^0$$
$$= \sum_{i=0}^{k-1} a_i g^i$$

Man nennt diesen Term die g -adische Entwicklung von n . Die Zahlen z_i heißen Koeffizienten und haben die Eigenschaft $z_i \in \mathbb{N}$, $z_k \neq 0$, $0 \leq z_i < g - 1$ ($i = 0, 1, 2, \dots, k$) (vgl. Günther 2010, 36; Müller & Wittmann 1984, 193 f.).

¹ Zur Erfindung und Entwicklung von Ziffern vgl. Vries 2011, 40 f.; Ifrah 1992, 100 f.

² Zur Erfindung der 0 vgl. Ifrah 1992, 175 f.; Butterworth 1999, 92.

³ Zu weiteren Zahlssystemen vgl. Ifrah 1992, 45 f.; Butterworth 1999, 89 f.

Tabelle 1: Beispiel für eine dreistellige Zahl im dezimalen Stellenwertsystem

Allgemein				
$n =$	$z_{k-1}g^{k-1}$	$+$	$\dots +$	$z_2g^2 + z_1g^1 + z_0g^0$
Dekadisch				
$n =$	$a_{k-1}g^{k-1}$	$+$	$\dots +$	$a_210^2 + a_110^1 + a_010^0$
243 =				$2^210^2 + 4^110^1 + 3^010^0$
243 =				$2 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 3 \cdot 1$
Zahl	...	Hunderter	Zehner	Einer

Im dezimalen Stellenwertsystem gilt:

- $g = 10$
- $z_i = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- $k = \text{Anzahl der Stellen}$

Die vorliegende Arbeit legt einen Schwerpunkt auf Zahlen in der dekadischen Schreibweise und im Zahlenraum bis 100 (d.h. $g = 10, k = 2$).

Nachdem mathematisch das dezimale Stellenwertsystem definiert wurde, sollen Theorien erläutert werden, die Verständnis beschreiben. Dadurch wird sich der Begriffsausschärfung über die Beschreibungen der Wortbestandteile genähert.

2.2 Ausgewählte Theorien zur Klärung von Verständnis in der mathematikdidaktischen Forschung

A first problem is that clear definitions of understanding and skill are difficult to formulate and even more difficult to operationalize (Hiebert & Wearne 1996, 253).

Hiebert & Wearne (1996) benennen die Schwierigkeit Verständnis zu definieren und geben an, dass es daher noch schwieriger sei Verständnis zu operationalisieren.

Die mathematikdidaktische Forschung begegnet dieser Problematik mit unterschiedlichen Modellen, mit denen Verständnis von mathematischen Inhalten beschrieben werden kann.

Bei der Theoriedarstellung wird das Hauptaugenmerk nicht auf Vollständigkeit gelegt, sondern auf Fokussierung der Theorien anhand ihrer Kernaussagen. Die zentralen Aussagen der drei ausgewählten Theorien sollen dem Blick auf Verständnis einen jeweils eigenen Fokus geben.

2.2.1 *Netzwerk von Informationsbestandteilen*

Ein Individuum hat ein mathematisches Konzept oder eine mathematische Prozedur "verstanden", wenn es einige Verbindungen hergestellt hat zu bereits in *seinem* Geist existierenden Ideen (HIEBERT & CARPENTER, 1992, 67; VAN DE WALLE, 1994, 23). "Verstehen" bedeutet also das Herstellen von *Beziehungen*. Der Grad des Verständnisses wird bestimmt durch die Anzahl und die Stärke der Verbindungen in einem Netzwerk von Informationsbestandteilen. Ein mathematisches Konzept oder eine mathematische Prozedur ist umso besser *verstanden*, je zahlreicher und stärker die Verbindungen sind zu bereits *im Individuum* etablierten Netzwerken. Verständnis ist demnach kein Alles-oder-Nichts-Phänomen (Gerster & Schulz 2004, 32).

Verständnis wird von Gerster & Schulz (2004) beschrieben als ein *Netzwerk von Informationsbestandteilen*. Einen mathematischen Inhalt zu verstehen bedeutet in diesem Zusammenhang ein Herstellen von Verbindungen zu Inhalten, die bereits bekannt sind. Als Folge wird hierbei formuliert, dass Verständnis sich mit den einzelnen Verbindungen aufbaut und auch durch diese bestimmt wird. Je mehr Verbindungen existieren, desto besser ist das Verständnis eines mathematischen Inhalts. Demnach wird Verständnis nicht als an- oder abwesend bezeichnet, sondern eher aufgrund seiner Ausprägung, also der Anzahl von Verbindungen, als schwächer oder stärker charakterisiert (vgl. Gerster & Schulz 2004, 32).

Das Herstellen der Verbindungen wird als aktiver Prozess beschrieben, der vom Einzelnen selbst vorgenommen wird und auch misslingen kann. Daher unterscheiden sich die Prozesse (Verbindungen herstellen) auch von denen anderer Individuen (vgl. Lorenz 1997, 10). Misslungene Verbindungen treten auf, wenn keine Anknüpfungspunkte für die eintretenden Informationen gefunden werden.

Das Verstehen beruht auf einer Erwartung, besser: Die einkommende Information wird mit Vorauskonstruktionen verglichen, die sich eine Person macht. Kann das, was geschieht und gesagt wird, an das assimiliert bzw. in das integriert werden, was bereits gewußt wird, dann wird verstanden. Anderenfalls tritt Irritation ein (vgl. Lorenz 1997, 10).

Als möglicher Endzustand von Verständnis gilt eine Abstraktion des mathematischen Inhalts, die erst möglich wird, nachdem ausreichend Verbindungen hergestellt worden sind, durch die ein mentales Netzwerk entsteht. Dieses reichhaltige Netzwerk soll dann im Langzeitgedächtnis gespeichert sein und bei Bedarf abgerufen werden können, beispielsweise in Form von Darstellungen an einem geeigneten Medium (enaktiv, ikonisch oder symbolisch) (vgl. Gerster & Schulz 2004, 33).

Als Kernidee für die Erklärung von Verständnis kann ein *Netzwerk von Informationsbestandteilen* beschrieben werden, das sich durch Herstellen von Verbindungen zu mathematischen Inhalten entwickelt.

Wenn diese Theorie zur Beschreibung von Stellenwertverständnis herangezogen würde, dann müssten zunächst Wissensinhalte ausgemacht werden, die für dieses Netzwerk wichtig sind. Anhand dieser Bestandteile könnten dann Verbindungen be-

schrieben werden, die ein Netzwerk auf den Wissensbestandteilen zum dezimalen Stellenwertsystem entstehen lassen. Beispielsweise könnte zwischen dem Zahlzeichen 16 und einem Zehnerbündel und sechs einzelnen Elementen eine Verbindung bestehen.

2.2.2 Grundvorstellungen

Die Idee zur Erklärung von mathematischem Verständnis durch ein Grundvorstellungskonzept findet sich bereits 1962 bei Oehl. Vom Hofe (1995) beschreibt Oehls Grundvorstellungskonzept ausgehend von dessen Verständnis von Mathematik als ein „System netzartiger Verknüpfungen“ (vom Hofe 1995, 74). Ableitend wird das Verständnis eines mathematischen Inhalts bzw. Begriffs als Einblick in dessen Strukturmerkmale dargestellt.

Dabei wird zwischen zwei Arten von Strukturverbindungen unterschieden: „Beziehungen zwischen verschiedenen Begriffen auf der mathematischen Ebene“ und „Beziehungen zwischen diesen Begriffen und entsprechenden Sachsituationen auf der Ebene der Realität“ (ebd.). Hierbei wird auch eine konkrete Richtung angegeben, in der die Entwicklung des Verständnisses im Anfangsunterricht erfolgen soll. Die Beziehungen zwischen der Realebene und dem mathematischen Begriff sind zunächst zentral. Erst wenn sich die mathematischen Strukturen aus der Realsituation heraus entwickelt haben, sollten innermathematische Verknüpfungen erarbeitet werden. Das vermittelnde Strukturbewusstsein wird dabei als Grundvorstellung bezeichnet (ebd.). Bei der Darstellung des Grundvorstellungskonzepts wird dieses als flexibles Schema beschrieben, das nicht an einen konkreten Kontext gebunden ist (vgl. vom Hofe 1995, 77).

In aktueller Literatur wird das Grundvorstellungskonzept durch korrekte Übersetzungsprozesse zwischen unterschiedlichen Darstellungsebenen von mathematischen Inhalten beschrieben, beispielsweise zwischen einem Zahlzeichen *10* und einer *Anzahl von zehn Elementen*. Um als Lernende/r eine solche Übersetzung herzustellen, bedarf es (konkreter) Vorstellungen zur Zahl, allgemeiner auch zu beschreiben als Grundvorstellung zu einem mathematischen Inhalt (vgl. Wartha & Schulz 2011a, 6; Wartha & Schulz 2011b, 49).

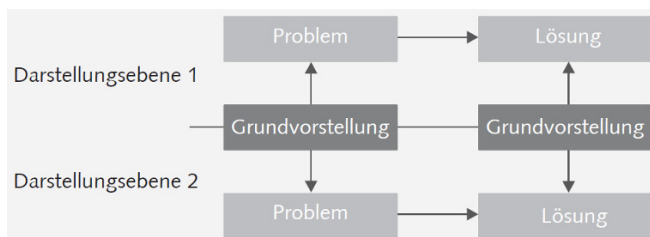


Abbildung 2-1: Grundvorstellungskreislauf (aus: Wartha & Schulz 2011a, 5)

In Abbildung 2-1 wird in Anlehnung an den Modellierungskreislauf nach Blum et al. (2004) ein Grundvorstellungskreislauf dargestellt, der zwischen verschiedenen Darstellungsebenen vermittelt und damit Übersetzungsprozesse beschreiben kann.

Ein Verständnis des mathematischen Inhalts [...] wird dann unterstellt, wenn eine Lösung auch über die Aktivierung von Grundvorstellungen in einer anderen Darstellung (Handlung, Bild, Realsituation) möglich ist (Wartha & Schulz 2011a, 5).

Für Grundvorstellungen zu Zahlen gilt als zentral, dass Kinder Vorstellungen zu den verschiedenen Aspekten von Zahlen und deren Schreibweise im Stellenwertsystem aufbauen (Wartha & Schulz 2011a, 6). Hierbei beschreibt eine Zahlvorstellung jedoch keinen einzelnen statischen Inhalt, sondern eher eine Art mentales Modell zu einem mathematischen Inhalt. Diese mentalen Modelle sind nach Beschreibungen von Fischbein (1990) als Theorien über die Realität anzusehen, die auch Rückschlüsse und Prognosen erlauben. Bezeichnet werden sie als strukturierte Einheiten dessen Struktur mit der zu entsprechenden Struktur in der Wirklichkeit korrespondieren soll.

Mental models are theories about certain realities. They allow us to make inferences and predictions. Mental models are structured entities and their structure must correspond to that of the reality they are supposed to represent (Fischbein 1990, 23).

Dieses lässt sich durch verschiedene Inhalte für eine Zahlvorstellung charakterisieren, wie beispielsweise 10 als Anzahl von Elementen, oder als Position in einer Reihenfolge oder als Hälfte von 20.

Nach Beschreibungen von vom Hofe (1995) können Grundvorstellungen nicht nur als Beschreibung von Soll-Zuständen genutzt werden, sondern auch zur Beschreibung eines Ist-Zustands, also möglicherweise auch für Fehlvorstellungen zu mathematischen Inhalten (vgl. Wartha 2007, 32). Wenn ein Kind beispielsweise nur *ein Element* als Übersetzung zum Zahlzeichen *10* angibt, kann dies auf eine fehlerhafte Grundvorstellung zurückgeführt werden und damit als fehlerhaftes Verständnis des Zahlzeichens gewertet werden.

Als eine zentrale Botschaft, die zur Beschreibung von Verständnis herangezogen werden soll, ist die Existenz von *konkreten Vorstellungen* beispielsweise zu Zahlen. Dieses wird durch Übersetzungsleistungen zwischen unterschiedlichen Darstellungsebenen erkennbar. Es gilt bereits bei Versprachlichungen von Vorstellungsakten (vgl. Aebli 2001, 211 f.).

Das Modell der Grundvorstellungen wird bereits mit dem dezimalen Stellenwertsystem in Verbindung gebracht. Flexible Übersetzungsleistungen werden zwischen den drei Zahlrepräsentationen Zahlwort, Zahlzeichen und Menge als zentral angesehen, weil dazu Grundvorstellungen zu den Aspekten der Zahlrepräsentationen notwendig sind (vgl. Wartha & Schulz 2011a, 9 f.).

Für ein Verständnis der Konventionen unseres Stellenwertsystems ist eine flexible Einsicht in den Zusammenhang zwischen Zahlwort, Zahlzeichen und Menge notwendig (vgl. Fuson et al., 1997). Diese Einsicht beruht auf der wechselseitigen Aktivierung von Grundvorstellungen zu diesen Aspekten einer Zahl (Wartha & Schulz 2011a, 9).

2.2.3 *Subjektive Erfahrungsbereiche*

Ein Modell, das vorrangig als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens gilt, kann auch als Fundament zur Beschreibung von Verständnis herangezogen werden. Bauersfeld beschreibt in seinem Modell, dass Lernen und Denken bereichsspezifisch ist, d.h. *alle* subjektiven Erfahrungen, die ein Individuum in einer bestimmten Situation macht, werden gespeichert. Demnach nicht nur die kognitive Dimension, sondern beispielsweise auch Gefühle der Körpererfahrung (vgl. Bauersfeld 1983, 2).

Viele Indizien aus unterschiedlichen Disziplinen sprechen nach Bauersfeld (1983) für ein Modell der Verarbeitung menschlicher Erfahrungen. Danach werden Erfahrungen eines Individuums nicht-hierarchisch und kumulativ gespeichert. Diese Speicherungen sind (zunächst einzeln) situativ gebunden in unabhängigen *subjektiven Erfahrungsbereichen* [im Folgenden: SEB] (ebd.).

Die SEB'e haben Prozesscharakter und daher eine je eigene Wandlungsgeschichte ihrer Zustände von Entstehen bis zum möglichen Verfall (Vergessenwerden). Verstehen und Handeln scheinen möglich allein auf der Basis von SEB'en. Die SEB'e werden konkurrierend aktiviert und ermöglichen mit der Entscheidung (unter gleichzeitiger Unterdrückung der Konkurrenten) die subjektive Wahrnehmung der gegebenen aktuellen Situation. Die fortschreitende Verknüpfung der SEB'e, die sich mit der Entstehung neuer SEB'e verbindet, kennzeichnet die Entwicklung zu "selbstreferentiellen Systemen" (LUHMANN 1982, S. 44f.) beim Individuum und damit zu einer "society of mind" (MINSKY 1975, 1977 und 1980) (Bauersfeld 1983, 2).

Die subjektiven Erfahrungsbereiche werden als dynamisch und als gegenseitig konkurrierend um die subjektive Wahrnehmung eines Individuums dargestellt. Beispielsweise kann die Erfassung der Anzahl von zwei Zehnerbündeln durch Zählen in Einerschritten oder in Zehnerschritten ablaufen.

Die Weiterentwicklung der einzelnen subjektiven Erfahrungsbereiche wird als fortschreitende Verknüpfungen dieser dargelegt, die sich mit der Entstehung neuer Bereiche verbindet (ebd.). Mit dieser Darstellung leitet Bauersfeld (1983) in Beschreibungen zur Systemtheorie nach u. a. Luhmann (1987) über, anhand dessen eine Form von Verständnis ausgeführt werden kann. Ein *selbstreferentielles System* nach Luhmann (1987) beschreibt ein System, das einen Bezug zu sich selber herstellen und sich gleichzeitig von seiner Umwelt abgrenzen kann⁴ (vgl. Luhmann

⁴ Zur "society of mind" vgl. Minsky 1990, 71 f.

1987, 31). Auf mathematikdidaktische Überlegungen bezogen und als Weiterentwicklung zu den subjektiven Erfahrungsbereichen könnte beispielhaft beschrieben werden: ein Kind das bemerkt, dass es durch Zählen in Zehnerschritten schneller zu einer bestimmten Zahl kommt, als wenn es in Einerschritten zählt. Dies würde nicht nur für verbales Zählen gelten, sondern auch für Zählen an Materialien. Das würde zeigen, dass sprachliche Strukturen im Zahlwortsystem erkannt und diese auf einen gleich strukturierten Inhalt angewendet wurden.

Damit lässt sich zusammenfassen und auf mathematikdidaktische Überlegungen beziehen, dass Kinder mathematische Inhalte zunächst als subjektive Erfahrung innerhalb *einer* Situation erlernen, wie das Zählen in Zehnerschritten zunächst als eine Möglichkeit des Aufsagens der Zahlwortreihe. Auf Nachfrage kann ein Kind die Zahlwortreihe sicher in Zehnerschritten aufsagen. Wenn dem gleichen Kind eine Ansammlung von Streichhölzern vorgelegt wird, die in Zehnergruppen angeordnet sind und dessen Anzahl bestimmt werden soll, konkurrieren subjektive Erfahrungsbereiche um die Art der subjektiven Wahrnehmung, die das Vorgehen in der gegebenen Situation bestimmt und das Kind in Zehner- oder Einerschritten zählen lässt (je nach bereits erlebter Erfahrung). Ein Wissensinhalt ist zunächst an den konkreten Kontext gebunden in dem er entstanden ist und steht zunächst nur in diesem subjektiven Erfahrungsbereich zur Verfügung. Übertragungen in andere Bereiche sind eventuell nicht möglich.

Bei sich fortschreitend verknüpfenden subjektiven Erfahrungen in bestimmten Bereichen entstehen eigenständige Systeme, in denen Strukturgleichheiten erkannt und genutzt werden. Dieses bildet sich aus einem Netzwerk aus subjektiven Erfahrungen, die zu einem *selbstreferentiellen System* heranwachsen und abstrakt und flexibel genutzt werden können (vgl. Bauersfeld 1983, 2).

Wenn diese Theorie auf ein Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems bezogen würde, ließen sich unterschiedliche Erfahrungsbereiche beschreiben, die vom Kind unabhängig voneinander erlernt würden. Die zugehörigen subjektiven Erfahrungsbereiche müssten zur genaueren Definition inhaltlich gefasst werden; dann könnte deren Zustand, also die bereits vorhandenen Speicherungen, beschrieben werden. Beispielsweise wäre das ein Kind, das in Zehnerschritten zählen kann. Wenn diese Fertigkeit verknüpft werden kann und das Kind von sich aus eine unbekannte dezimalstrukturierte Menge in Zehnerschritten abzählt, dann kann diese Handlung beispielhaft herangezogen werden für einen ausgereiften Zustand des *subjektiven Erfahrungsbereiches* (Bauersfeld, 1983) für ein Zählen in Zehnerschritten, der sich weiter zu einem *selbstreferentiellen System* (Luhmann, 1987) ausweitet.

2.2.4 Zwischenfazit und Ausblick

Es lassen sich drei ausgewählte unterschiedliche Theorien nennen, die zur Beschreibung von Stellenwertverständnis herangezogen werden können.

Verständnis lässt sich möglicherweise als ein Netzwerk von Informationsbestandteilen beschreiben, in dem die Informationsbestandteile aufeinander bezogen werden (vgl. Gerster & Schulz 2004, 32). Die Darstellungen in der Theorie legen die Informationsbestandteile nicht auf eine Kontextgebundenheit oder eine Kontextunabhängigkeit fest. Beide weiteren Theorien sind dabei deutlich festgelegt.

Die Beschreibung einer Grundvorstellung (vgl. vom Hofe 1995, 74) ist kontextunabhängig und lässt sich als mathematisches Konstrukt darstellen, nach dem eine Verständnisbeschreibung durch Übersetzungen in unterschiedliche Darstellungen möglich wird.

Die dritte Theorie stellt Verständnis als *selbstreferentielle Systeme* (vgl. Luhmann 1987, 31) dar, die sich in *subjektiven Erfahrungsbereichen* (vgl. Bauersfeld 1983, 2) bilden, wenn diese sich ineinander und untereinander verknüpfen. Dabei sind die eingehenden Informationen in den subjektiven Erfahrungsbereichen deutlich kontextgebunden.

Für die vorliegende Studie soll die Kontextabhängigkeit einen Beobachtungsschwerpunkt darstellen. Denn wenn der Kontext (der mathematisch irrelevant ist) für die Bearbeitung der gegebenen Aufgabenstellung als relevant bewertet wird und den Bearbeitungsprozess verändert, scheint das Verständnis für den gegebenen Inhaltsbereich kontextabhängig und damit noch nicht abstrakt zu sein. Auf Grundlage der empirischen Beobachtungen soll sich dann einer Begriffsbeschreibung zum *Verständnis* oder auch *Nicht-Verständnis* für ein Operieren im dezimalen Stellenwertsystem genähert werden.

<http://www.springer.com/978-3-658-14774-7>

Stellenwertverständnis im Zahlenraum bis 100

Theoretische und empirische Analysen

Fromme, M.

2017, XVII, 245 S. 35 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-14774-7