Festigkeitslehre

2

2.1 Spannung und Verformung bei Längsbeanspruchung, Hookesches Gesetz

F 1 Federkräfte

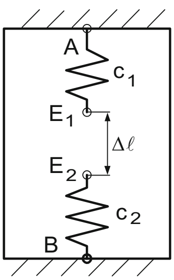

Bild F 1

In einem Rahmen ist oben eine Feder mit der Federsteifigkeit c_1 und unten eine Feder mit der Federsteifigkeit c_2 separat angebracht.

Die gegenüberliegenden freien Federenden E_1 und E_2, die ursprünglich einen Abstand $\Delta\ell$ hatten, werden im Einhängepunkt E miteinander verbunden.

Gegeben

$c_1 = 4\,\frac{\text{N}}{\text{cm}}$; $c_2 = 8\,\frac{\text{N}}{\text{cm}}$; $\Delta\ell = 9\,\text{cm}$; $m = 5\,\text{kg}$

Gesucht

a) Die Verlängerungen der Federn und die Kräfte an den Befestigungspunkten A und B
b) Welche Längenänderungen haben die Federn, wenn im Einhängepunkt E zusätzlich eine Masse m angebracht wird?

A. Jahr, J. Berger, *Klausurentrainer Technische Mechanik*, DOI 10.1007/978-3-658-14783-9_2

Lösung

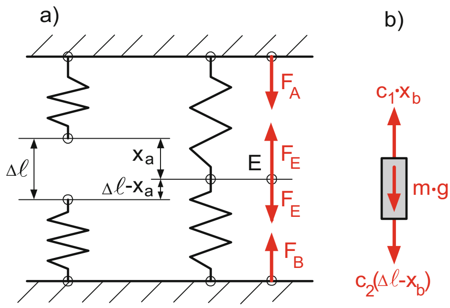

Bild FL 1

Die Federsteifigkeit $c = \frac{F}{x}$ gibt an, welche Kraft F zur Erzeugung einer Verlängerung x der Feder erforderlich ist.

Die Federkraft $F = c \cdot x$ ist proportional zum Federweg, wobei der Federweg x die Verlängerung aus der kraftlosen, ungespannten Lage ist.

a) Einhängung der Federn (Bild FL 1a)
Die obere Feder dehnt sich um x_a, die untere um $\Delta\ell - x_a$.
Am Einhängepunkt E sind beide Federkräfte gleich (actio = reactio).

$$c_1 \cdot x_a = c_2 \cdot (\Delta\ell - x_a) \Rightarrow$$

$$c_1 \cdot x_a = c_2 \cdot \Delta\ell - c_2 \cdot x_a \Rightarrow x_a = \frac{c_2}{c_1 + c_2} \cdot \Delta\ell = \frac{8}{4+8} \cdot 9 = 6\,\text{cm}$$

Die weichere (obere) Feder wird mehr, die härtere (untere) Feder weniger gedehnt.

$$F_A = c_1 \cdot x_a = 4 \cdot 6 = 24\,\text{N}$$
$$F_B = c_2 \cdot (\Delta\ell - x_a) = 8 \cdot (9 - 6) = 24\,\text{N}$$
$$F_E = F_A = F_B = 24\,\text{N}$$

Die Kräfte an den Federenden (also an den Wänden und im Einhängepunkt) sind aus Gleichgewichtsgründen gleich.

b) Mit zusätzlichem Gewicht (Bild FL 1b)

$$\sum F_y = 0 = c_1 \cdot x_b - m \cdot g - c_2 \cdot (\Delta\ell - x_b) \Rightarrow$$
$$c_1 \cdot x_b - m \cdot g - c_2 \cdot \Delta\ell + c_2 \cdot x_b = 0 \Rightarrow$$
$$x_b = \frac{m \cdot g + c_2 \cdot \Delta\ell}{c_1 + c_2} = \frac{5 \cdot 9{,}81 + 8 \cdot 9}{4+8} = 10{,}09\,\text{cm}$$
$$\Delta\ell - x_b = 9 - 10{,}09 = -1{,}09\,\text{cm}$$

Das Minuszeichen besagt, die untere Feder verschiebt sich nach unten und wird auf Druck beansprucht.

F 2 Lagerung einer starren Platte

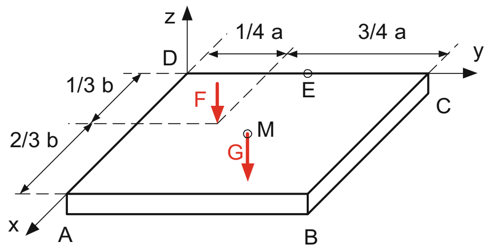

Bild F 2

Eine starre, homogene, rechteckige Tischplatte *A, B, C, D* (Eigengewicht *G*) ist durch eine Einzelkraft *F* belastet.

Gegeben

$G = 500\,\text{N}$; $F = 300\,\text{N}$, $a = 2{,}5\,\text{m}$; $b = 1{,}2\,\text{m}$

Gesucht

Man bestimme die Stützkräfte, wenn die Platte

1) durch 3 starre Stützen *A, B, E* aufgelagert ist (*E* ist die Mitte von *CD*),
2) mit 4 gleichen elastischen Stützen (Federn) *A, B, C, D* am Boden steht.

Bei dieser Aufgabe wird der Unterschied zwischen den Problemen aus der Statik und der Festigkeitslehre deutlich. In der Statik (Fall 1) genügen die Gleichgewichtsbedingungen zur Lösung, in der Festigkeitslehre (Fall 2) bei statisch unbestimmten Systemen sind zusätzlich noch Verformungsbedingungen nötig.

Lösung

1) 3 starre Stützen *A, B, E* (Bild FL 2a)
Momente um eine Parallele zur *y*-Achse durch *A* und *B*
I) $\sum M_y^{(AB)} = 0$

$$F_E \cdot b - G \cdot \tfrac{b}{2} - F \cdot \tfrac{2}{3} b \mid : b \Rightarrow$$
$$F_E = \tfrac{1}{2} G + \tfrac{2}{3} F = \tfrac{1}{2} \cdot 500 + \tfrac{2}{3} \cdot 300 = 450\,\text{N}$$

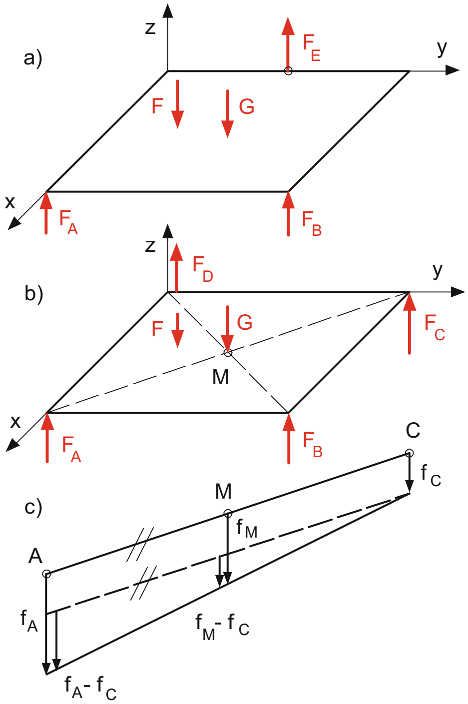

Bild FL 2

II) $\sum M_x = 0$

$F_B \cdot a + F_E \cdot \frac{a}{2} - G \cdot \frac{a}{2} - F \cdot \frac{a}{4} \mid : a \Rightarrow$

$F_B = \frac{1}{2} G + \frac{1}{4} F - \frac{1}{2} F_E$

$F_B = \frac{1}{2} \cdot 500 + \frac{1}{4} \cdot 300 - \frac{1}{2} \cdot 450 = 100\,\text{N}$

III) $\sum F_z = 0 \Rightarrow F_A = G + F - F_B - F_E$

$F_A = 500 + 300 - 100 - 450 = 250\,\text{N}$

2) 4 elastische Stützen *A, B, C, D* (Bild FL 2b)

I) $\sum M_y = 0 = -F_A \cdot b - F_B \cdot b + G \cdot \frac{b}{2} + F \cdot \frac{b}{3} \mid : b \Rightarrow$

$F_A + F_B = \frac{1}{2} G + \frac{1}{3} F = \frac{1}{2} \cdot 500 + \frac{1}{3} \cdot 300 = 350\,\text{N}$

II) $\sum M_x = 0 = F_B \cdot a + F_C \cdot a - G \cdot \frac{a}{2} - F \cdot \frac{a}{4} \mid : a \Rightarrow$

$F_B + F_C = \frac{1}{2} G + \frac{1}{4} F = \frac{1}{2} \cdot 500 + \frac{1}{4} \cdot 300 = 325\,\text{N}$

III) $\sum F_z = 0 \Rightarrow F_A + F_B + F_C + F_D = G + F = 500 + 300 = 800\,\text{N}$

Zur Bestimmung der 4 unbekannten Stützkräfte stehen nur 3 statische Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung. Das System ist also einfach statisch unbestimmt. Eine vierte Gleichung wird durch eine Verformungsaussage gewonnen.

Da die Platte starr (nicht verformbar) ist, bleibt sie in sich gerade und kann sich insgesamt nur schief stellen. Die Stützen passen sich der Platte an, so dass auch zwischen den

Verschiebungen der Stützen ein linearer Zusammenhang besteht. Die Auflagepunkte *A, C* und der Plattenmittelpunkt *M* liegen dann auf einer Geraden, ebenso wie die Punkte *B, D, M*.

Die Verschiebung f_M der Tischmitte *M* kann über die Diagonale *AC* und über die Diagonale *BD* aus den Absenkungen der Stützen mit dem Strahlensatz bestimmt werden.

Nach Bild FL 2c ist

$$\frac{f_\mathrm{A} - f_\mathrm{C}}{f_\mathrm{M} - f_\mathrm{C}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{MC}} = \frac{2}{1} \Rightarrow f_\mathrm{A} - f_\mathrm{C} = 2f_\mathrm{M} - 2f_\mathrm{C} \Rightarrow f_\mathrm{M} = \frac{f_\mathrm{A} + f_\mathrm{C}}{2}$$

analog ergibt sich über die Diagonale *BD*: $f_\mathrm{M} = \dfrac{f_\mathrm{B} + f_\mathrm{D}}{2}$

Gleichsetzen: IV) $2f_\mathrm{M} = f_\mathrm{A} + f_\mathrm{C} = f_\mathrm{B} + f_\mathrm{D}$

Federsteifigkeit $c = \frac{F_\mathrm{S}}{f}$, wobei F_S = Stützkraft, f = Federweg (Absenkung der Stütze)

Elastische Tischbeine mit gleicher Federsteifigkeit c (bzw. der Tisch steht auf weichem, nachgiebigem Boden z. B. auf einem dicken Teppich).

Dann sind die Stützkräfte proportional den Federwegen:

$$F_\mathrm{A} = c \cdot f_\mathrm{A}; \quad F_\mathrm{B} = c \cdot f_\mathrm{B}; \quad F_\mathrm{C} = c \cdot f_\mathrm{C}; \quad F_\mathrm{D} = c \cdot f_\mathrm{D}$$

IV) $f_\mathrm{A} + f_\mathrm{C} = f_\mathrm{B} + f_\mathrm{D} \,|\cdot c \Rightarrow c \cdot f_\mathrm{A} + c \cdot f_\mathrm{C} = c \cdot f_\mathrm{B} + c \cdot f_\mathrm{D}$ bzw.
$F_\mathrm{A} + F_\mathrm{C} = F_\mathrm{B} + F_\mathrm{D} \Rightarrow F_\mathrm{A} - F_\mathrm{B} + F_\mathrm{C} - F_\mathrm{D} = 0$

III + IV = III′: $2F_\mathrm{A} + 2F_\mathrm{C} = 800 \,|:2 \Rightarrow F_\mathrm{A} + F_\mathrm{C} = 400\,\mathrm{N}$

III′ − II = II′: $F_\mathrm{A} - F_\mathrm{B} = 400 - 325 = 75\,\mathrm{N}$

I + II′: $2F_\mathrm{A} = 350 + 75 = 425 \Rightarrow F_\mathrm{A} = 212{,}5\,\mathrm{N}$

aus I: $F_\mathrm{B} = 350 - F_\mathrm{A} = 350 - 212{,}5 = 137{,}5\,\mathrm{N}$

aus II: $F_\mathrm{C} = 325 - F_\mathrm{B} = 325 - 137{,}5 = 187{,}5\,\mathrm{N}$

aus IV: $F_\mathrm{D} = F_\mathrm{A} - F_\mathrm{B} + F_\mathrm{C} = 212{,}5 - 137{,}5 + 187{,}5 = 262{,}5\,\mathrm{N}$

Ähnliche Verhältnisse mit entsprechend größeren Kräften liegen bei einem durch die Kraft *F* ungleichmäßig beladenem LKW mit dem Eigengewicht *G* vor, wenn dessen Obergestell als starr angenommen wird und die Nachgiebigkeit durch die Federung und durch die Bereifung bei allen vier Rädern gleich ist.

F 3 Abgesetzter Stab zwischen 2 starren Wänden

Ein abgesetzter Stab (Querschnitte A_1 und A_2, Elastizitätsmodul *E*) liegt ohne Spiel zwischen zwei starren Wänden.

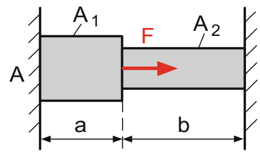

Bild F 3

Gesucht

Man bestimme die Kräfte, die von den Wänden auf den Stab ausgeübt werden,

a) wenn eine Kraft F am Übergang der Querschnitte wirkt (allgemein und Sonderfall $A_1 = A_2 = A$),
b) wenn der Stab um ΔT erwärmt wird und der Ausdehnungskoeffizient α beträgt (allgemein und Sonderfall $A_1 = A_2 = A$).
c) Der Stab sei jetzt bei A eingespannt und bei B klaffe eine Lücke der Breite Δs zwischen dem Stab und der Wand. Welche Zugkraft F muss am rechten Stabende wirken, um die Lücke zu schließen?

Lösung

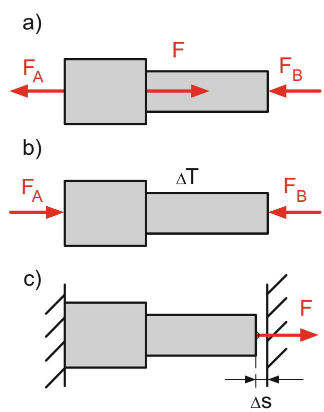

Bild FL 3

a) Kraft am Querschnittsübergang (Bild FL 3a)

$$\text{I)} \sum F_x = 0 = F - F_A - F_B$$

Die statischen Gleichgewichtsbedingungen reichen nicht aus zur Ermittlung der Auflagerkräfte, d. h. das System ist (hier einfach) statisch unbestimmt. Zur Berechnung der Kräfte sind Verformungsbedingungen nötig.

Stabteil a wird auf Zug beansprucht und um Δa verlängert.
Stabteil b wird auf Druck beansprucht und um Δb verkürzt.
Hookesches Gesetz

$$\sigma = E \cdot \varepsilon; \quad \frac{F}{A} = E \cdot \frac{\Delta\ell}{\ell} \Rightarrow \Delta\ell = \frac{F \cdot \ell}{E \cdot A}$$
$$\Delta a = \frac{F_\mathrm{A} \cdot a}{E \cdot A_1}; \quad \Delta b = -\frac{F_\mathrm{B} \cdot b}{E \cdot A_2}$$

Die starren Wände an den Stabenden sind unnachgiebig, daher muss die Summe der Längenänderungen Null sein.
Verformungsbedingung: $\Delta a + \Delta b = 0 \Rightarrow \Delta a = -\Delta b$

$$\text{II)}\ \frac{F_\mathrm{A} \cdot a}{E \cdot A_1} = \frac{F_\mathrm{B} \cdot b}{E \cdot A_2} \Rightarrow F_\mathrm{B} = F_\mathrm{A} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{A_2}{A_1}$$
$$\text{II in I: } F - F_\mathrm{A} = F_\mathrm{A} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{A_2}{A_1} \Rightarrow F_\mathrm{A} = \frac{F}{1 + \frac{a}{b} \cdot \frac{A_2}{A_1}}$$
$$\text{aus II: } F_\mathrm{B} = \frac{F}{1 + \frac{a}{b} \cdot \frac{A_2}{A_1}} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{A_2}{A_1} = \frac{F}{1 + \frac{b}{a} \cdot \frac{A_1}{A_2}}$$

Sonderfall: $A_2 = A_1 = A$

$$F_\mathrm{A} = \frac{F}{1 + \frac{a}{b}} = \frac{b}{a+b} \cdot F; \quad F_\mathrm{B} = \frac{F}{1 + \frac{b}{a}} = \frac{a}{a+b} \cdot F$$

speziell für $a = b$: $F_\mathrm{A} = F_\mathrm{B} = \frac{1}{2}F$

b) Temperaturerhöhung um ΔT (Bild FL 3b)
Lässt man den Stab (nach vorübergehender Wegnahme einer Wand) sich erst frei um $\Delta\ell$ thermisch dehnen, so muss er anschließend durch eine äußere Kraft um das gleiche Maß mechanisch verkürzt werden, damit er wieder die Länge des Wandabstands annimmt.
thermische Dehnung = mechanische Dehnung

$$\Delta\ell = \alpha \cdot (a + b) \cdot \Delta T$$
$$\sum F_\mathrm{x} = 0 \Rightarrow F_\mathrm{A} = F_\mathrm{B} = F$$

da die Kräfte gleich sind, werden die Indices weggelassen

$$\Delta a = \frac{F \cdot a}{E \cdot A_1}; \quad \Delta b = \frac{F \cdot b}{E \cdot A_2}$$

Verformungsbedingung: $\Delta a + \Delta b = \Delta\ell$

$$\frac{F}{E} \cdot \left(\frac{a}{A_1} + \frac{b}{A_2}\right) = \alpha \cdot (a + b) \cdot \Delta T \Rightarrow F = \frac{\alpha \cdot (a + b) \cdot \Delta T}{\frac{a}{A_1} + \frac{b}{A_2}} \cdot E$$

Sonderfall: $A_1 = A_2 = A$

$$F = \alpha \cdot E \cdot A \cdot \Delta T$$

c) Schließen einer Lücke (Bild FL 3c)
Durch die Zugkraft F am rechten Stabende werden die beiden Stabteile a und b auf Zug beansprucht und damit gedehnt.

$$\Delta a = \frac{F \cdot a}{E \cdot A_1}; \quad \Delta b = \frac{F \cdot b}{E \cdot A_2}$$

Verformungsbedingung: $\Delta a + \Delta b = \Delta s$

$$\frac{F \cdot a}{E \cdot A_1} + \frac{F \cdot b}{E \cdot A_2} = \Delta s \Rightarrow F = \frac{\Delta s \cdot E}{\frac{a}{A_1} + \frac{b}{A_2}}$$

F 4 Einbau eines zu kurzen Fachwerkstabes

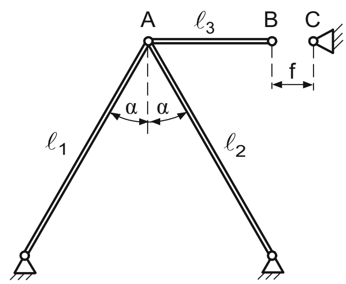

Bild F 4

Bei einem Fachwerk aus drei Stäben mit gleicher Dehnsteifigkeit EA ist der Stab 3 um das Maß f zu kurz gefertigt worden.

Gegeben

$\ell_1 = \ell_2 = \ell$; $\ell_3 = \frac{1}{2}\ell$; f; EA; $\alpha = 30°$

Gesucht

Welche Zugkraft F muss am Gelenkpunkt B bei der Montage aufgebracht werden, um die Lücke zu schließen?

Lösung

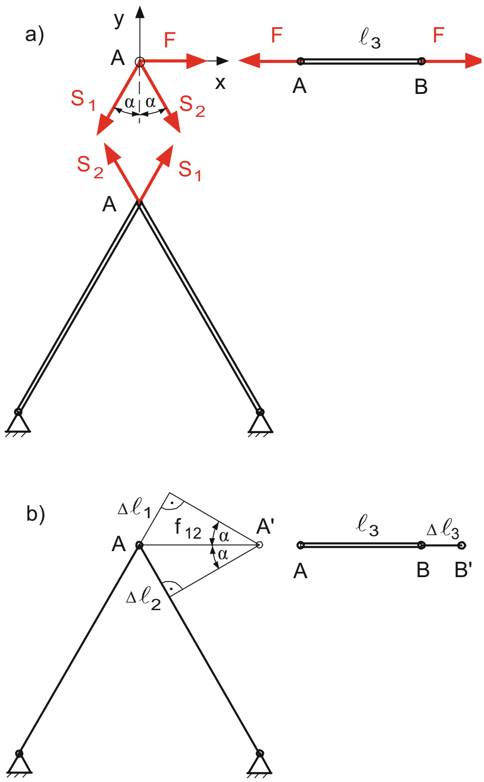

Bild FL 4

Die Stabkräfte werden zunächst als Zugkräfte angenommen. Ihre Gegenkräfte wirken auf den Bolzen.

Gleichgewicht des Bolzens A (Bild FL 4a)

I) $\sum F_y = 0 = -S_1 \cos\alpha - S_2 \cos\alpha \Rightarrow S_2 = -S_1$

II) $\sum F_x = 0 = F - S_1 \sin\alpha + S_2 \sin\alpha$

I in II: $F - S_1 \sin\alpha - S_1 \sin\alpha = 0 \Rightarrow$

$S_1 = \frac{F}{2 \cdot \sin\alpha}$ Zugstab

aus I: $S_2 = -\frac{F}{2 \cdot \sin\alpha}$ Druckstab

$\Delta\ell_1 = \frac{S_1 \cdot \ell_1}{EA} = \frac{F \cdot \ell}{2 \sin\alpha \cdot EA}$ Verlängerung

$\Delta\ell_2 = \frac{S_2 \cdot \ell_2}{EA} = -\frac{F \cdot \ell}{2 \sin\alpha \cdot EA} = -\Delta\ell_1$

$\Delta\ell_2 < 0$ Verkürzung

nach Bild FL 4b ist

$$f_{12} = \frac{\Delta \ell_1}{\sin\alpha} = \frac{F \cdot \ell}{2\sin^2\alpha \cdot EA}$$

Die Verlängerung wird am Knoten vom Stab weg, die Verkürzung zum Stab hin angetragen. In den Endpunkten werden die Lote (anstelle von Kreisbögen mit relativ großem Radius) errichtet und zum Schnitt gebracht.

$$\Delta \ell_3 = \frac{F \cdot \ell_3}{EA} = \frac{F \cdot \ell}{2EA}$$

Verformungsbedingung
Die Verschiebung f_{12} des Knotens A nach A' und die Verlängerung $\Delta\ell_3$ des Stabes 3 müssen die Lücke f schließen.

$$f_{12} + \Delta\ell_3 = f; \quad \frac{F \cdot \ell}{2\sin^2\alpha \cdot EA} + \frac{F \cdot \ell}{2EA} = f; \quad \frac{F \cdot \ell}{2EA} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin^2\alpha}\right) = f \Rightarrow$$

$$F = 2 \cdot \frac{\sin^2\alpha}{1 + \sin^2\alpha} \cdot EA \cdot \frac{f}{\ell}$$

Speziell für $\alpha = 30°$, $\left(\sin 30° = \frac{1}{2}\right)$ wird $F = \frac{2}{5} EA \cdot \frac{f}{\ell}$

F 5 Schrauben-Flanschverbindung

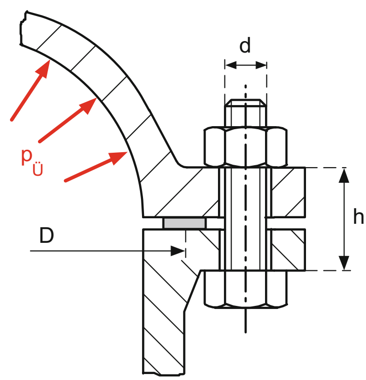

Bild F 5

Gegeben
$z = 8$; $M\ 16$; $d = 13{,}4\,\text{mm}$; $E = 2{,}1 \cdot 10^5\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, $h = 65\,\text{mm}$, $f_{S1} = 25 \cdot 10^{-3}\,\text{mm}$; $f_{P1} = 36 \cdot 10^{-3}\,\text{mm}$, $p_Ü = 20\,\text{bar}$; $D = 250\,\text{mm}$

Der Deckel einer Kolbenpumpe ist mit $z = 8$ Schrauben $M\ 16$ (Kerndurchmesser d, Elastizitätsmodul E) durch eine Flanschverbindung (Höhe h) am Gehäuse befestigt.

Die Schrauben werden so angezogen, dass ihre Verlängerung (Federweg) f_{S1} beträgt. Dabei wird der Flansch mit Zwischenlage (Dichtung) um f_{P1} zusammengedrückt. Platten Hülsen usw. werden nach dem gleichen Prinzip verspannt. Daher schreibt man den Index P für Platte.

Im Betrieb entwickelt die Kolbenpumpe einen Überdruck $p_{Ü}$. Die kreisförmige Druckfläche hat bis zur Dichtung einen Durchmesser D.

Anmerkung Die Verbindung von Flansch und Schraube hat gegenüber der geschweißten oder genieteten Ausführung den Vorteil, dass sie jederzeit wieder gelöst werden kann. Sie kommt daher im Maschinenbau sehr häufig vor.

Gesucht

a) Schraubenvorspannung bei Montage sowie die Kräfte auf die Schrauben und auf den Flansch
b) Kräfte und Schraubenspannung im Betrieb
c) Längenänderungen von Schrauben und Flansch im Betrieb
d) Verspannungs-Schaubild

Lösung

Der Index 1 beschreibt den Zustand der Vorspannung ohne Innendruck, der Index 2 den Betriebszustand mit Innendruck.

a) Montage der Schrauben

Schraubenquerschnitt $$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 13{,}4^2}{4} = 141\,\text{mm}^2$$

Hookesches Gesetz $$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{\Delta\ell}{\ell}$$

Schraubenvorspannung $$\sigma_{S1} = E \cdot \frac{f_{S1}}{h} = 2{,}1 \cdot 10^5 \cdot \frac{25 \cdot 10^{-3}}{65} = 80{,}77\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Schraubenkraft $$\sigma_{S1} = \frac{F_{S1}}{A} \Rightarrow F_{S1} = \sigma_{S1} \cdot A = 80{,}77 \cdot 141 = 11.388\,\text{N}$$

Die Kräfte von allen z Schrauben wirken zusammen auf den Flansch und üben auf ihn insgesamt eine Kraft aus

$$F_{P1} = z \cdot F_{S1} = 8 \cdot 11.388 = 91.104\,\text{N}$$

Um eine Vorspannung in den Schrauben zu erzeugen, werden die Muttern angezogen, d. h. nach unten verschoben. Dabei werden die Schrauben um f_{S1} gedehnt und der Flansch um f_{P1} gestaucht.

http://www.springer.com/978-3-658-14782-2

Klausurentrainer Technische Mechanik
Aufgaben und ausführliche Lösungen zu Statik, Festigkeitslehre und Dynamik
Jahr, A.; Berger, J.
2017, X, 505 S. 353 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-658-14782-2