

Teil A: Theoretischer Hintergrund

2 Arithmetik als theoretischer Inhaltsbereich

„Die Mathematik ist die Königin der Wissenschaften, und die Arithmetik ist die Königin der Mathematik.“

(Carl Friedrich Gauss)

2.1 Arithmetik in Grundschule und Sekundarstufe 1

Die Bedeutung der Arithmetik für den Mathematikunterricht der Grundschule und der Sekundarstufe 1 ist unbestritten und grundlegend. Sie bildet die Basis, auf der der gesamte Mathematikunterricht bzw. die gesamte Mathematik aufbaut. Der Arithmetikunterricht stellt somit sowohl in der Grundschule als auch in den unteren Klassen der Sekundarstufe 1 das Kerncurriculum des Mathematikunterrichts dar. Dabei sind mit Unterricht

„im Allgemeinen solche Situationen gemeint, in denen professionell tätige Lehrende innerhalb eines bestimmten institutionellen Rahmens mit pädagogischer Absicht und in organisierter Weise Lernprozesse initiieren, fördern und erleichtern“ (Reinmann 2006, S. 615).

Während der Begriff des Unterrichtens also klar umrissen wird, ist die Frage nach den Inhaltsbereichen und Zielen von Arithmetik wesentlich schwammiger. Für Lehrkräfte scheint es nicht wichtig zu sein, was genau zu diesem mathematischen Teilbereich zählt, eine klare Definition ist für ihr unterrichtliches Handeln unnötig. Vielmehr orientieren sich angehende und erfahrene Lehrpersonen bei ihrer Inhaltsauswahl an den vorhandenen Schulbüchern, vereinzelt auch an dem pädagogischen Konzept, das als internes Schulcurriculum ihrer Schule zu Grunde liegt, an Angeboten im Internet und oder an fachdidaktischer Literatur in Form von Zeitschriften oder praxisnahen Büchern (Rezat 2008, S. 46; Pepin, Birgit & Haggarty, Linda 2001, S. 162ff; Institut für Medien- und Kompetenzforschung mmb 2008). Referendare und Referendarinnen sind vor allem zu Beginn ihrer zweiten Ausbildungsphase noch stark von den theoretischen Erfahrungen ihres Studiums geprägt und greifen des Öfteren auf Erfahrungen und Erlebnisse aus einzelnen Seminaren zurück (vgl. Kap. 7). Um das Lehrerdenden und –handeln nachvollziehbarer zu machen, soll im Folgenden

zunächst aufgezeigt werden, wie Lehrkräfte ihre Unterrichtsinhalte zum Arithmetikunterricht auswählen. Danach wird der Begriff Arithmetik für diese Studie genauer beleuchtet und im Anschluss die Ziele und Inhalte dieses mathematischen Teilgebiets aufgeführt.

2.1.1 Orientierungsaspekte von Lehrkräften bei der Planung und Durchführung von Arithmetikunterricht

Lehrkräfte orientieren sich bei ihrer Unterrichtsplanung hauptsächlich an den eingesetzten Schulbüchern, die wiederum Bezug zur Fachliteratur und den jeweiligen Bildungsplänen nehmen (Biehl und Ohlhaver 1999). Im baden-württembergischen Bildungsplan der Grundschule heißt es:

„In der Arithmetik können die Kinder mit Zahlen reflektiert umgehen, sie können z.B. ordnen, vergleichen, strukturieren und Beziehungen entdecken. Zur Sicherheit im Zahlenrechnen gehört das abrufbare Wissen der Ergebnisse des Einsundeins und des kleinen Einmaleins mit seinen Umkehrungen sowie das Kennen und Nutzen von Rechen Vorteilen und Kontrollverfahren. Oberstes Ziel ist der aufgabenadäquate Einsatz flexibler Rechenstrategien“ (Ministerium für Kultus, Jugend und Sport 2004a, S. 55).

Unter Arithmetik werden hier also in erster Linie der Umgang mit Zahlen und das (flexible) Rechnen verstanden. Im Bildungsplan Baden-Württemberg der Werkrealschule von 2012 erfolgt eine eher inhaltliche Beschreibung:

„Die arithmetischen Inhalte der Leitidee Zahl sind das Rechnen mit Variablen, das Aufsuchen von Beziehungen zwischen Zahlen und die mit den Zahlen möglichen Operationen. Die Schülerinnen und Schüler lernen die Leistung von Algorithmen kennen, dabei steht jedoch das dezidierte Abarbeiten von Algorithmen nicht im Mittelpunkt des Unterrichts“ (Ministerium für Kultus, Jugend und Sport 2012, S. 56).

Schulbücher⁷ greifen die in den Bildungsplänen formulierten Kompetenzen auf und setzen sie in unterschiedlicher Art und Weise um. Sie bilden neben Medien wie z.B. der Tafel, Arbeitsblättern oder Modellen und Anschauungsmaterialien das Hauptmedium des Unterrichts und spielen eine entscheidende Rolle bei der Gestaltung von Lernprozessen (Barzel 2011, S. 90ff). Im Folgenden werden die in den Interviews meist genannten Schulbücher tabellarisch aufgeführt und beschrieben:⁸

7 Für eine detaillierte Analyse von Schulbüchern vgl. z.B. die Dissertation von Rezat 2009.

8 Die Beschreibung der einzelnen Bücher basiert auf der Meinung der Autorin, die sich mit anderen Expertinnen und Experten darüber ausgetauscht und die Lehrerhandrei-

Schul-form	Schulbuch (Verlag)	Beschreibung des Schulbuchs
P	Zahlenbuch (Klett)	Das Zahlenbuch veranschaulicht viele Inhalte über Materialien und ikonische Darstellungen, es ermöglicht multiple Lösungswege und unterstützt das flexible Rechnen. Darüber hinaus orientiert es sich an der Lebenswirklichkeit der Schülerinnen und Schüler.
P	Die Matheprofis (Oldenbourg)	Die Matheprofis fördern das mathematische Denken und das tiefere Durchdringen von Inhalten über offene Lernumgebungen und Problemstellungen. Sie ermöglichen das Lernen auf unterschiedlichen Niveaus und unterstützen das flexible Rechnen und die Anwendung von Rechenstrategien.
P	Einstern (Cornelsen)	Der Einstern deckt die gesamten Inhaltsbereiche des Grundschulmathematikunterrichts umfassend ab und lässt die Kinder individuell mit den vielen Übungsheften und passenden Materialien arbeiten. Er enthält viele Übungsaufgaben und fördert weniger das problemlösende Denken bzw. das flexible Rechnen.
SEK	Schnittpunkt (Klett)	Das Schulbuch Schnittpunkt startet jedes neue Thema mit einer informierenden Überblicksseite, liefert dann umfangreiche Übungsaufgaben und am Schluss Testvorbereitungsseiten. Es ist eher lehrerzentriert und bietet kaum Möglichkeiten zum problemorientierten Arbeiten. Auch das flexible Rechnen wird in diesem Schulbuch wenig unterstützt.
SEK	Mathewerkstatt (Cornelsen)	Die Mathewerkstatt ist das jüngste dieser Schulwerke auf dem Markt. Sie umfasst differenzierende Aufgaben, die sich für heterogene Lerngruppen eignen, fördert mathematisches Denken und die Durchdringung von Inhalten, benutzt dazu inner- und außer-mathematische Kontexte und ermöglicht verschiedene Lösungszugänge.

Tab. 1: Schulbuchanalyse

Neben dem eher schulbuchorientierten Unterricht gibt es aber auch Lehrkräfte, die sich beim Unterrichten und bei der Planung ihres Unterrichts an ein bestimmtes pädagogisches Konzept anlehnen, das das interne Curriculum ihrer Schule darstellt. Diese Lehrkräfte haben meist eine Zusatzausbildung in diesem Bereich absolviert und bilden sich intern stetig weiter.⁹ Unter den in dieser Arbeit untersuchten Lehrkräften befinden sich zwei Lehrerinnen, die seit vielen Jahren in einer Montessori-Grundschule arbeiten und ihren Mathematikunter-

chungen der jeweiligen Bücher gelesen hat, erhebt aber keinen Anspruch auf Objektivität und Vollständigkeit.

9 Unter der Internetadresse <http://www.netzwerk-innovativer-schulen.de/alternative-schulkonzepte> (Stand Oktober 2015) findet sich eine gute Übersicht und Beschreibung der alternativen Schulkonzepte, die es momentan in Deutschland gibt.

richt fast ausschließlich auf diesem pädagogischen Konzept aufbauen. Um auch ihre Unterrichtsplanung und -durchführung besser nachvollziehen zu können, sollen die Grundgedanken der Montessoripädagogik unter der Perspektive des Arithmetikunterrichts im Folgenden kurz skizziert werden (vgl. Waldschmidt 2001; Ludwig 2008; Waldschmidt 2009):

- in Montessorischulen erfolgt Freiarbeit in einer vorbereiteten Umgebung
- Ziel der Montessoripädagogik ist es, dass das Kind „Baumeister seiner selbst“ (Waldschmidt 2001, S. 39) wird, d.h. Wissen und Fertigkeiten selbst- und eigenständig erlernt
- der Lehrer ist Lernbegleiter und Beobachter, der dem Kind „hilft, es selbst zu tun“ (Waldschmidt 2001, S. 41)
- im Mathematikunterricht und speziell im Arithmetikunterricht bedeutet dies, dass das Kind didaktische (Montessori)-Materialien gezeigt und vorgeführt bekommt und im Anschluss selbstständig damit arbeiten soll
- von Beginn an wird dem Kind ein großer Zahlenraum zur Verfügung gestellt mit dem Ziel, frühzeitig ein Zahl- und Rechenverständnis in diesem Zahlenraum aufzubauen

Maria Montessori geht davon aus, dass Kinder nur nach langer Auseinandersetzung mit dem konkreten Material und nur nach Erreichen einer bestimmten geistigen Reife in der Lage sind, den notwendigen Abstraktionsprozess zu vollziehen.

„Arbeitet das Kind, nachdem es angeleitet ist, längere Zeit in seinem eigenen Tempo [...] am Material, dann strömt nach und nach [...] vom Material selbst das Wesen der Operationen aus. [...] Nahezu alle arithmetischen Operationen [...] macht das Kind so lange in konkreten Verfahren, bis das Wesen der Regel ihm vollkommen klar ist“ (Ludwig 2008, S. 108).

Inwiefern Lehrkräfte bei ihrer Inhaltsauswahl Zeitschriften und Fachliteratur heranziehen, wurde in den geführten Interviews nicht erfragt. Persönliche Erfahrungen und Gespräche mit verschiedenen Lehrkräften lassen aber vermuten, dass Lehrpersonen diese Quellen nur selten oder gar nicht für ihre Unterrichtsplanung nutzen.

2.1.2 Arithmetik als mathematischer Teilbereich

Sichtet man Fachliteratur zum Thema Arithmetik (Schwarz 1999; Bender und Müller 2004; Krauthausen und Scherer 2007; Schipper 2009; Padberg und Benz 2011; Gorski und Müller-Philipp 2012), fällt relativ schnell auf, dass nicht näher darauf eingegangen wird, was eigentlich unter Arithmetik verstanden wird. Lediglich Timo Leuders widmet in seinem Buch „Erlebnis Arithmetik“ der Frage „Was ist Arithmetik?“ ein eigenes Kapitel (Leuders 2010, S. 7f). Er bezeichnet Arithmetik als „das Teilgebiet der Mathematik, das die Strukturen in den natürlichen Zahlen erforscht“ (Leuders 2010, S. 7) und betont, dass ein moderner Arithmetikunterricht die Kinder als mathematisch Forschende versteht, die sich aktiv mit dem Entdecken der vielfältigen Eigenschaften von natürlichen Zahlen beschäftigen (Leuders 2010, S. 8).

Die von Leuders formulierte Frage nach den Strukturen in den natürlichen Zahlen und seine Idee des aktiven Erforschens entsprechen im Wesentlichen den Grundgedanken der vorliegenden Arbeit, so dass die Definition von Leuders hier verwendet wird. Jedoch wird der Zahlbereich um die rationalen Zahlen erweitert, d.h. Bruchrechnung und negative Zahlen werden mit eingeschlossen. Da es innerhalb der Arbeit unter anderem darum geht, die Vorstellungen von Lehrkräften der Primarstufe mit denen der Sekundarstufe 1 zu vergleichen und in Beziehung zu setzen, wird inhaltlich auf die arithmetischen Themenbereiche der Klasse 3 – 6 zurückgegriffen. Aus diesem Grund wird auch die Entwicklung des Zahlbegriffs und der Zählkompetenz weitgehend ausgespart (vgl. hierzu Krauthausen und Scherer 2007; Schipper 2009; Padberg und Benz 2011), stattdessen liegt der Fokus auf inhaltlichen Aspekten wie der Erweiterung der Zahlenräume, dem Kopfrechnen, dem halbschriftlichen Rechnen, den schriftlichen Rechenverfahren und den sogenannten „weichen Rechenverfahren“ wie Schätzen, Runden und Überschlagen. Diese Themenbereiche bilden auch Schwerpunkte des Interviewleitfadens und legen somit den Rahmen – bezogen auf die mathematischen Inhalte – der Studie fest.

2.1.3 Ziele des Arithmetikunterrichts

2.1.3.1 Allgemeine Lehr- und Lernziele

Grundvoraussetzung beim Lehren ist das Wissen darum, was gelehrt bzw. gelernt werden soll. Am Anfang jeder Unterrichtsplanung steht somit die Festlegung von Lehr-/ Lernzielen¹⁰. Lehren stellt demnach einen Prozess dar, der der Erreichung dieser Zielfestlegung dient (Leutner und Klauer 2012, S. 24). Lehr- und Lernziele nehmen dabei sowohl eine Steuerungs- als auch eine Evaluationsfunktion ein. Sie sollen den Unterricht lenken und diagnostische Entscheidungen ermöglichen. Die folgende Abbildung visualisiert diesen Prozess:

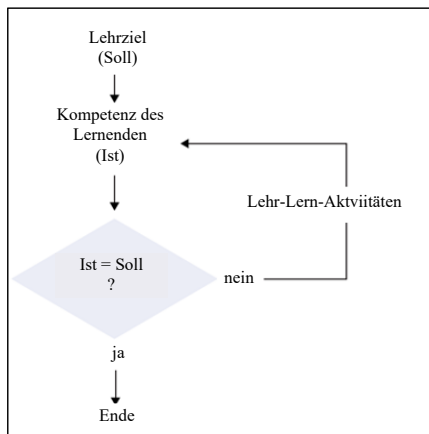


Abb. 2: Regelkreismodell des Lehr-Lern-Prozesses (Leutner und Klauer 2012, S. 26)

Der nach oben gerichtete Pfeil verdeutlicht die Steuerungsfunktion der Lehr-/ Lernziele, die nach unten gerichteten Pfeile ihre Evaluationsfunktion. Im Idealfall enden die Lehr-Lern-Aktivitäten erst dann, wenn bei den Schülerinnen und Schülern der erwünschte Ist-Zustand erreicht wurde. Somit dient die Evaluation in diesem Modell weniger der Überprüfung des Lernerfolgs der Schülerinnen und Schüler, sondern vielmehr der Überprüfung des Unterrichtsaufbaus und der Lehrmethoden der Lehrkraft (Zielerreichung) (Leutner und Klauer 2012, S. 26).

10 Die beiden Begriffe Lehr- bzw. Lernziel werden oft synonym benutzt, zur genaueren Unterscheidung der beiden Begrifflichkeiten vgl. Leutner und Klauer 2012, S. 24

Neben den hier beschriebenen kognitiven Lehr- und Lernzielen, spielen bei der Planung und Durchführung von Unterricht aber auch soziale und affektive Unterrichtsziele eine entscheidende Rolle (Preiser und Dresel 2003, S. 280). Leutner und Klauer sprechen in diesem Zusammenhang davon, dass „Wissen und Können, Kompetenzen, Interessen, Einstellungen und Neigungen [...] Persönlichkeitsmerkmale [sind], die durch Lehr-Lern-Prozesse modifiziert werden sollen“ (Leutner und Klauer 2012, S. 27f). Somit wird das Lehr-/ Lernziel zum Persönlichkeitsmerkmal. Persönlichkeitsmerkmale können wiederum in Kompetenzen und Verhaltensdispositionen unterteilt werden (Leutner und Klauer 2012, S. 28). Besonders der Kompetenzbegriff ist seit den internationalen Leistungsvergleichen aus TIMSS (Baumert und Rainer 1997) und PISA (Deutsches PISA-Konsortium 2000a, 2000b) in den Mittelpunkt der Überlegungen gerückt. Unter Kompetenzerwerb wird dabei

„eine sichere und flexible Anwendung mathematischer Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten in komplexen Anforderungssituationen“ (Käpnick 2014, S. 10f) verstanden. Nach Weinert sind Kompetenzen „die bei Individuen verfügbaren oder von ihnen erlernbaren kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten, bestimmte Probleme zu lösen, sowie die damit verbundenen motivationalen, volitionalen und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten, die Problemlösungen in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können“ (Weinert 2014, S. 27f).

Das Entwickeln von Bildungsstandards und Kompetenzmodelle ersetzt teilweise den Begriff der Lehr- und Lernziele. Bildungsstandards werden dabei als Leistungsnormen oder angestrebte Lernergebnisse verstanden, die es zu erfüllen gilt. Sie sollen durch die Präzisierung des Kompetenzbegriffs, der dem Unterricht zu Grunde liegt, die Bildungsziele konkretisieren und möglichst überprüfbar machen. Die enge Verzahnung der unterschiedlichen Begrifflichkeiten wird beispielsweise bei Wiater (2011, S. 211) deutlich, der von Kompetenzzielen spricht und so den Kompetenzaspekt in den Zielaspekt integriert:

„Kompetenzziele sind Lehr-Lern-Ziele, die der Lehrer für den jeweiligen Schüler – teilweise auch mit ihm zusammen – für Unterrichtsabschnitte [...] differenziert angibt, damit dieser in einem bestimmten Lernbereich seine Kenntnisse, Fähigkeiten/Fertigkeiten und Einstellungen/Haltungen in Richtung auf das vorgegebene Bildungsprofil schrittweise vergrößern und verbessern kann“ (Wiater 2010, S. 211).

2.1.3.2 Ziele im Arithmetikunterricht

Die drei Hauptkompetenzen „Zahldarstellungen und Zahlbeziehungen verstehen“, „Rechenoperationen verstehen und beherrschen“ und „in Kontexten rechnen“ bilden das Fundament eines kompetenzorientierten Arithmetikunterrichts (Walther 2010, S. 66). Für den Arithmetikunterricht bedeutet das, dass inhaltliche Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten und das flexible Rechnen geschult werden. Oberstes Ziel des Mathematikunterrichts ist das Erlangen von mathematischem Verständnis (Schipper 2009, S. 33). Dies beinhaltet auf der einen Seite ein Verständnis für den Zahlbegriff und das Stellenwertsystem, auf der anderen Seite ein Verständnis für Rechenoperationen und Rechengesetze (Krauthausen und Scherer 2007, S. 16ff). Sowohl in den Bildungsplänen für das Land Baden-Württemberg (Ministerium für Kultus, Jugend und Sport 2004a, 2004b, 2012), als auch in den von der Kultusministerkonferenz (KMK) formulierten Bildungsstandards (KMK 2004, 2005) finden sich diese Ziele in den inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen und in den allgemeinen mathematischen Kompetenzen (Argumentieren, Darstellen, Kommunizieren, Modellieren und Problemlösen) wieder. Dabei ermöglichen es vor allem die allgemeinen mathematischen Kompetenzen, dass auch fachübergreifende Ziele wie „Freude an Mathematik“, „Vorbereitung auf das alltägliche Leben“ oder „Strukturorientierung“ erreicht werden können (KMK 2005, S. 6). Für den Unterricht bedeutet dies, dass neben den inhaltlichen Kompetenzen auch diese allgemeinen oder prozessbezogenen mathematischen Kompetenzen gefördert und realisiert werden. Welche Bereiche der Arithmetikunterricht dazu aufgreifen sollte und was diese Bereiche genau beinhalten, wird im nächsten Unterkapitel beschrieben.

2.1.4 Kanonische Inhalte des Arithmetikunterrichts

Die Arithmetik ist in der Grundschule vor allem in den Kompetenzbereichen (Leitideen) *Zahlen und Operationen* und *Muster und Strukturen* angesiedelt. Da aber eine enge Verbindung zwischen den einzelnen Bereichen besteht, werden arithmetische Kenntnisse auch für das Lösen von Aufgaben aus den Leitideen *Größen und Messen*, *Raum und Form* und *Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit* benötigt (Ministerium für Kultus, Jugend und Sport 2004a).

In der weiterführenden Schule findet sich die Arithmetik unter der Leitidee *Zahl*, doch auch hier gibt es Verbindungen zu den anderen Kompetenzbereichen/ Leitideen (*Messen, Raum und Form, Funktionaler Zusammenhang, Daten und Zufall*) (Ministerium für Kultus, Jugend und Sport 2012). In der Unterstufe der weiterführenden Schulen werden die arithmetischen Inhalte der Grundschule wiederholt und erweitert. So erfolgt hier mit der Bruchrechnung und den negativen Zahlen die Ausdehnung in neue Zahlbereiche (Padberg 2009; Siebel und Wittmann 2014). Mit zunehmender Klassenstufe kommen aber auch andere mathematische Teilbereiche verstärkt zum Tragen, die größtenteils auf der Arithmetik aufbauen, so dass die Arithmetik als eine Art Fundament der Schulmathematik verstanden werden kann.

Die kanonischen Inhaltsbereiche des Grundschulunterrichts zur Arithmetik, die sich in einem jahrhundertelangen Prozess entwickelt haben, lassen sich nach Käpnick (2014) folgendermaßen überblicksartig darstellen (Käpnick 2014, S. 13f):

- Zahldarstellungen und -bezeichnungen
- Zahlvorstellungen
- *Operationsvorstellungen*
- Kopfrechnen
- Halbschriftliches und schriftliches Rechnen
- Überschlagsrechnen
- *Nutzen von Zahlbeziehungen und Rechengesetzen*
- *flexibles Rechnen*¹¹
- in Kontexten rechnen

In der Sekundarstufe 1 finden sich ähnliche Inhaltsaspekte. „Zahl und Variable“ als Hauptinhalt des Arithmetikunterrichts will, dass die Schülerinnen und Schüler eine Zahlvorstellung (Variablenvorstellung) entwickeln und flexibel mit Zahlen (und Variablen) rechnen können (Siebel und Wittmann 2014, S. 30).

11 *Operationsvorstellungen, Nutzen von Zahlbeziehungen und Rechengesetzen und flexibles Rechnen* sind eher Zielaspekte, die sich in die anderen Inhaltsbereiche integrieren lassen und darum in den folgenden Unterkapiteln nicht als eigene Punkte aufgeführt werden.

„Das inhaltliche Denken in Bezug auf Zahlen und Variablen umfasst das Verständnis der Eigenschaften von Zahlen verschiedener Zahlbereiche und von Variablen, der Operationen mit Zahlen und Variablen und Sachsituationen und zwar in beide Richtungen: Mathematisieren einer Sachsituation mit Hilfe von Zahlen und Variablen sowie Interpretieren einer Gleichung oder eines Terms in Bezug auf eine bestimmte Sachsituation. Um diese Verbindung herstellen zu können, sind tragfähige Grundvorstellungen zu Zahlen und Variablen nötig“ (Siebel und Wittmann 2014, S. 30).

Da sich die vorliegende Untersuchung auf die Klassenstufen 3 bis 6 konzentriert, werden weder Inhaltsaspekte des Anfangsunterrichts (vgl. Kap. 2.1.2), noch der Variablenaspekt näher betrachtet. Fokussiert wird insbesondere auf die natürlichen Zahlen, ansatzweise erfolgt auch ein Blick in den Bereich der Bruchzahlen und der ganzen Zahlen (negative Zahlen).

Die im Folgenden dargestellten arithmetischen Inhalte bilden die kanonischen Kernaspekte des Arithmetikunterrichts in der Grundschule und in den unteren Klassen der Sekundarstufe 1. Die Art und Weise wie diese Themen bearbeitet werden bzw. wann und in welchem Umfang sie zum Einsatz kommen, hängt stark von den Überzeugungen der Lehrkräfte ab und wird an späterer Stelle genauer beschrieben.

2.1.4.1 Zahlenräume und Stellenwertsystem (Zahldarstellungen, Zahlbezeichnungen und Zahlvorstellungen)

In der Grundschule wird der Zahlenraum in jedem Schuljahr schrittweise erweitert (Krauthausen und Scherer 2007, S. 8). Ziel dieser sukzessiven Zahlenraumerweiterung ist es, den Kindern eine fundierte Zahl- und Größenvorstellung zu vermitteln (Padberg und Benz 2011, S. 57). Schipper spricht in diesem Zusammenhang von drei verschiedenen Phasen der Zahlenraumerweiterung, die spätestens ab der Erschließung des Hunderterraums weitgehend gleich ablaufen. In einer ersten Phase wird zunächst an die Vorkenntnisse der Kinder angeknüpft (Wiederholung der bekannten Zahlen), dann sollen Ankerpunkte geschaffen werden (alle 10er, 100er, 1000er Zahlen) und schließlich wird der neue Zahlenraum aufgefüllt (Schipper 2009, S. 163). Eine Vorgabe der Zahlenräume (z.B. Klasse 1 bis 20, Klasse 2 bis 100, Klasse 3 bis 1000, Klasse 4 bis 1000000), wie sie in den Köpfen vieler Lehrkräfte existiert, wird weder in den Bildungsplänen noch in den Bildungsstandards vorgenommen. Dies bedeutet, dass Lehrkräfte flexibel mit der Zahlenraumerweiterung umgehen und auf den

individuellen Lernstand der Schülerinnen und Schüler Rücksicht nehmen sollten (Krauthausen und Scherer 2007, S. 8).

Als zentrale Grundlage der Zahlenraumerweiterung dient das dezimale Stellenwertsystem. Dieses ist in unserem Denken und Handeln tief verwurzelt und bestimmt größtenteils das mathematische Agieren im Mathematikunterricht der Klassen 1 bis 6. Die Selbstverständlichkeit, mit der wir mit diesem System umgehen, birgt aber auch Gefahren. So sind die grundlegenden Prinzipien, das Prinzip der fortgesetzten Bündelung und das Stellenwertprinzip, die hinter diesem System stehen, nicht direkt erkennbar, was schnell dazu führen kann, dass Kinder zwar mit dem System umgehen können, es aber nicht unbedingt verstanden haben (Krauthausen und Scherer 2007, S. 16). Ziel im Unterricht ist es, dass die Kinder eine Grundvorstellung der Idee der (dezimalen) Bündelung erwerben und gleichzeitig die Stellenwertschreibweise von mehrstelligen Zahlen beherrschen lernen (Schipper 2009, S. 119). Voraussetzung ist das Verständnis, dass jede Ziffer unserer Zahlschrift zwei Informationen vermittelt. So gibt die *Ziffer* die Anzahl der Bündel an (Zahlenwert der Ziffer), die *Stellung* der Ziffer innerhalb der Zahl hingegen bestimmt die Mächtigkeit des entsprechenden Bündels (Stellenwert der Ziffer). Dies erklärt auch die Bedeutung der Null, die an nicht besetzte Stellen gesetzt werden muss, um diese kenntlich zu machen (Padberg und Benz 2011, S. 82).

Um natürliche Zahlen in verschiedenen Kontexten verstehen zu können, wird über unterschiedliche Zahlaspekte (Kardinalzahl, Ordinalzahl, Maßzahl, Operator, Rechenzahl, Codierung) der zentralen Frage nachgegangen, wann natürliche Zahlen auftreten und wie sie in den jeweiligen Kontexten verwendet werden. Enaktive und ikonische Darstellungen von natürlichen Zahlen sollen die Zahlvorstellungen bezüglich des Kardinalzahlaspekts vertiefen und eine Verbindung zwischen Symbol, Bild und Handlung herstellen (Siebel und Wittmann 2014, S. 33f). Ein flexibles Wechseln zwischen den verschiedenen Darstellungsebenen unterstützt Verstehensprozesse und ermöglicht dadurch „eine stabile Vernetzung eines ‚begreifenden‘, eines ‚durchschauenden‘ und eines ‚verstehenden‘ Lernens“ (Käpnick 2014, S. 55). Im 5. und 6. Schuljahr wird der Bereich der natürlichen Zahlen um den Bereich der positiven rationalen Zahlen (Bruchzahlen) und der negativen Zahlen erweitert (Padberg 2009, S. 1). Hier erfolgen

zum ersten Mal Zahlbereichserweiterungen weg von den natürlichen Zahlen, die von den Schülerinnen und Schülern neue und komplexere Gedankengänge erfordern.¹²

2.1.4.2 Kopfrechnen

„Mit ‚Kopfrechnen‘ wird ein Verfahren bezeichnet, das auf jede weitere Hilfe in Form von schriftlichen Notizen verzichtet; alle Prozesse, auch die des Merkens von Zwischenergebnissen, finden ‚im Kopf‘ statt“ (Schipper 2009, S. 126).

Padberg betont, dass das Festhalten *eines* Zwischenergebnisses nicht zwangsläufig aus dem Kopfrechnen/ mündlichen Rechnen halbschriftliches Rechnen (siehe Kapitel 2.1.4.3) macht, sondern dass es dafür umfangreicherer Notizen bedarf. Entscheidend für das Kopfrechnen (und auch für das halbschriftliche Rechnen) in Abgrenzung zu den schriftlichen Rechenverfahren ist die Tatsache, dass hier mit Zahlen und nicht ziffernweise gerechnet wird. Kopfrechnen und halbschriftliches Rechnen werden darum auch zusammenfassend als Zahlenrechnen bezeichnet (Padberg und Benz 2011, S. 87).

Während traditionell mit Kopfrechenübungen das Aufsagen und Abfragen von automatisierten Aufgaben (kleines Einmaleins, Addition-/ Subtraktionsaufgaben im Hunderterbereich, etc.) verstanden wird, ist unter mathematikdidaktischer Perspektive ein wichtiges Ziel des Kopfrechenunterrichts, den Kindern ein Gefühl für Zahlen und den Umgang mit ihnen zu vermitteln. Kopfrechenübungen sollten darum nicht eine sture und unstrukturierte Pflichterfüllung sein, sondern auch hier gilt es Zusammenhänge, Strategien und Beziehungen der Aufgaben untereinander aufzuzeigen und für das Kopfrechnen zu nutzen (Krauthausen und Scherer 2007, S. 43).

Sobald Aufgaben mehr als einen Rechenschritt erfordern, ist die Frage, ob man sie im Kopf oder mit schriftlicher Unterstützung rechnen sollte, nur noch individuell beantwortbar. Weniger entscheidend ist dabei die Größe der Zahlen, wichtig sind jedoch ein Stellenwert- und Analogieverständnis, sowie das Auswendigwissen von Grundaufgaben (Schipper 2009, S. 141).

12 Da diese Zahlbereiche innerhalb der empirischen Untersuchung kaum Relevanz besitzen, werden sie hier nicht näher ausgeführt, sondern lediglich der Vollständigkeit halber erwähnt.

2.1.4.3 Halbschriftliches Rechnen

Das halbschriftliche Rechnen oder gestützte Kopfrechnen¹³ unterliegt keiner vorgeschriebenen Notationsform. Sobald zum Lösen einer Aufgabe mehr als ein Rechenschritt erforderlich ist und Rechenteilschritte schriftlich fixiert werden, wird in der Literatur von dieser Rechenform gesprochen. Da das halbschriftliche Rechnen genauso wie das Kopfrechnen ein Rechnen mit Zahlen (siehe oben) darstellt, sollten im Idealfall die Besonderheiten von Zahlen ausgenutzt werden und flexible Rechenstrategien zum Tragen kommen (Padberg und Benz 2011, S. 170).

„Um diesem Anspruch gerecht zu werden, ist vielfältiges Wissen über Zahlen und Zahlbeziehungen, über Verknüpfungsmöglichkeiten in Verbindung mit Rechengesetzen Voraussetzung“ (Walther 2010, S. 70).

Die Verwendung geeigneter Strategien und das Ausnützen von Rechengesetzen und Rechenvorteilen sind dabei Kernbestandteile und zielen darauf ab, das mündliche Rechnen zu unterstützen¹⁴ (Bauer 1998, S. 180). Da beim halbschriftlichen Rechnen die Wege zur Lösung freigestellt sind, bietet es Schülerinnen und Schülern die Chance, sich auf ihr eigens Können und Wissen zu verlassen und nicht vorgeschriebenen Wegen, die eventuell nicht verstanden wurden, folgen zu müssen. Lässt man Kinder vorgegebene Aufgaben individuell lösen, fällt auf, dass in der Regel eine überschaubare Anzahl an Lösungswegen angewendet wird. Diese „Hauptstrategien“, die natürlich nicht immer in Reinform vorkommen, zeigen auf, dass Kinder zwar spontan bevorzugten Vorgehensweisen nachgehen, diese aber oftmals auch innermathematischen Strukturen, Beziehungen oder Gesetzen entsprechen (Krauthausen und Scherer 2007, S. 47).

13 Radatz und Schipper kritisieren, dass die Bezeichnung „halbschriftlich“ den Begriff „halb“ mathematisch nicht korrekt verwendet und fehlgedeutet werden kann. Darum benutzen sie den Ausdruck „gestütztes Kopfrechnen“ und verweisen darauf, dass diese Rechenform in erster Linie Kopfrechnen bedeutet und die gewählten Notationsformen im Gegensatz zu den schriftlichen Rechenverfahren keinerlei Verbindlichkeit beinhalten (Schipper 2009, S. 126).

14 In der klassischen Version zielt das halbschriftliche Rechnen vor allem darauf ab, auf das schriftliche Rechnen vorzubereiten und wird als eine rasch zu durchlaufende „unelegante Durchgangsstation“ bezeichnet. Seit den neunziger Jahren des letzten Jahrhunderts hat sich diese Sichtweise aber zu Gunsten des halbschriftlichen Rechnens gewandelt (Krauthausen 1993, S. 202).

Sowohl das Kopfrechnen als auch das halbschriftliche Rechnen ermöglichen einen flexiblen Umgang mit Zahlen und Rechenoperationen.¹⁵ Ob und wie intensiv Lehrkräfte ihre Schülerinnen und Schüler zum flexiblen Rechnen animieren, hängt jedoch wiederum von deren individuellen Überzeugungen ab, die im dritten Teil der Arbeit näher betrachtet werden.

2.1.4.4 Schriftliche Rechenverfahren

Bei den schriftlichen Rechenverfahren sind Lösungsweg und Notation vorgegeben, die Kinder erlernen also „Verfahren“ bzw. „Algorithmen“. Ein Algorithmus ist dadurch gekennzeichnet, dass er

„ein für seine spezifischen Anwendungsfälle (z.B. Multiplikationen) allgemein gültiges, in seiner Abfolge festgelegtes, eindeutig beschriebenes Verfahren [darstellt], das nach endlich vielen Schritten und unabhängig von der Person, die diesen Algorithmus durchführt, zur Lösung führt“ (Krauthausen 1993, S. 192; Krauthausen und Scherer 2007, S. 49).

Im Gegensatz zum Kopfrechnen und zum halbschriftlichen Rechnen wird beim schriftlichen Rechnen nicht mit Zahlen, sondern mit Ziffern gerechnet. Dies birgt auf der einen Seite die Gefahr, dass die Zahl als Ganzes aus dem Blick gerät, auf der anderen Seite ermöglicht es aber eine starke Vereinfachung der durchzuführenden Rechnungen (Padberg und Benz 2011, S. 218). Die Diskussion der letzten Jahre zum Stellenwert und zur Umsetzung des schriftlichen Rechnens im Unterricht hat zu grundlegenden Veränderungen geführt. Die sogenannten *Normalverfahren*, die Lösungsgang, Notation und Sprechweise genau vorgeschrieben haben, sind aus den Bildungsplänen verschwunden, dafür spielt in der aktuellen Mathematikdidaktik die Betonung von Verständnis bei der Durchdringung der schriftlichen Rechenverfahren eine zentrale Rolle. Darüber hinaus werden der konstruktive Umgang mit Fehlern und Schwierigkeiten, das kontrollierende und überschlagende Rechnen und das flexible Rechnen betont. Die Kinder sollen aufgrund der jeweiligen Zahlen flexibel entscheiden, welche Rechenmethode sie anwenden wollen (Padberg und Benz 2011, S. 217). Denn „erst die Gesamtheit der Rechenarten und das flexible Zugreifen auf die-

15 Zum flexiblen Rechnen vergleiche z.B. Rathgeb-Schnierer (2006); Selter und Spiegel (1997).

se, führen zum Rechnen als Denk- und Alltagsinstrument“ (Walther 2010, S. 76).

2.1.4.5 Schätzen, Runden, Überschlagen

Wenn in der Mathematik geschätzt, gerundet oder überschlagen wird, befinden wir uns nicht mehr unbedingt im Teilbereich der Arithmetik, sondern betreten Inhaltsbereiche wie den Bereich des Sachrechnens, der Größen oder auch der Geometrie. Da besonders im Grundschulunterricht die Grenzen zwischen den einzelnen Teilbereichen aber fließend zu sein scheinen (vgl. hierzu den Ergebnisteil C), soll an dieser Stelle trotzdem die Bedeutung dieser weichen Rechenarten aufgezeigt und in Beziehung zu den anderen arithmetischen Inhalten gesetzt werden.

Aufgrund der reduzierten Bedeutung des schriftlichen Rechnens im Alltag¹⁶ hat sich vor allem die Rolle des Kopfrechnens und des halbschriftlichen Rechnens in den letzten drei Jahrzehnten stark verändert. Während sich diese Veränderung bereits in den Lehrplänen und Bildungsstandards widerspiegelt, sind Schätzen, Runden und Überschlagen jedoch noch nicht in gleicher Weise in der Praxis verankert (Schipper 2009, S. 173f).

Schätzen als nicht-zählende, schnelle Anzahlerfassung hilft wesentlich beim Aufbau eines soliden Zahlenverständnisses. Während des Schätzvorgangs findet ein direkter oder indirekter Vergleich mit einer bekannten Größe oder Anzahl statt, somit ist Schätzen immer eine begründbare und nachvollziehbare Äußerung, die nicht mit Raten verwechselt werden darf. Um Kinder tatsächlich zum begründeten Schätzen zu erziehen, müssen ihnen zwei Teilaspekte vermittelt werden. So benötigen sie einerseits einen Grundstock an Vergleichsgrößen, die als Stützpunktvorstellungen genutzt werden können, andererseits müssen sie die Technik des Schätzens erlernen. Hierbei ist besonders entscheidend, dass die Kinder lernen, große Anzahlen in kleinere Teile aufzuteilen, diese abzuschätzen und schließlich wieder auf die Gesamtanzahl hochzurechnen

16 Im Beruf und Alltag haben elektronische Rechner das genaue Rechnen weitestgehend übernommen, so dass in der Mathematikdidaktik der letzten 30 Jahre die Rolle der schriftlichen Rechenverfahren im Schulunterricht immer wieder hinterfragt und neu diskutiert worden ist (vgl. hierzu Padberg und Benz 2011; Schipper 2009; Krauthausen und Scherer 2007).

(Schipper 2009, S. 174). Leuders (2010) spricht in diesem Zusammenhang auch vom Überschlagszählen und betont, dass bereits Kinder im Grundschulalter bei solchen Vorgängen mathematische Begriffe und Strategien entwickeln (Leuders 2010, S. 13).

Genauso wie beim Schätzen, geht es auch beim Runden um ein Verständnis für diesen Vorgang. Fragen wie „Wann sollte gerundet werden, wann ist eine exakte Zahlangabe sinnvoll?“, „Was bedeutet eine gerundete Zahlangabe überhaupt und wie weit darf sie von der exakten Zahl abweichen?“ oder „Wann muss ich auf welche Stelle runden, dass meine Angabe noch Sinn ergibt?“ gilt es im Unterricht zu stellen und an konkreten Alltagsbeispielen zu besprechen (Schipper 2009, S. 176f).

In den Bildungsstandards von 2004 werden dem Überschlagsrechnen zwei unterschiedliche Kompetenzerwartungen zugeordnet. So soll es einerseits zur Kontrolle beim Rechnen mit (großen) Zahlen eingesetzt werden, andererseits sollen Kinder „bei Sachaufgaben entscheiden, ob eine Überschlagsrechnung ausreicht oder ein genaues Ergebnis nötig ist“ (KMK 2005, S. 9). Kinder müssen also sowohl das Verfahren beherrschen, als auch die Wahl dafür inhaltlich begründen können. Dies erfordert wiederum ein gut entwickeltes Zahlverständnis, das das Beherrschen der Grundaufgaben, den Überblick über den Zahlenraum, ein Stellenwertverständnis, Sicherheit im Umgang mit vielen Nullen, das Beherrschen des Auf- und Abrundens und ein Verständnis für gegen- und gleichsinniges Verändern beinhaltet (Schipper 2009, S. 177).

Während sich dieses Kapitel mit den Inhaltsbereichen der Arithmetik, die für die Studie Relevanz haben, beschäftigt hat und dabei das zugrundeliegende Verständnis von Arithmetik aufgezeigt wurde, soll es im nächsten Kapitel um die Auseinandersetzung mit dem Lehren und Lernen von Arithmetik gehen. Auch hier werden Aspekte aufgeführt, die für die Durchführung der empirischen Untersuchung von Bedeutung sind.

2.2 Lehren und Lernen im Arithmetikunterricht

2.2.1 Allgemeine Didaktik und psychologische Lehr- und Lerntheorien

Die Fülle an Veröffentlichungen, empirischen Studien und Theorien zum Bereich des Lehrens und Lernens ist immens und kann im Rahmen dieser Arbeit nicht einmal ansatzweise wiedergegeben und reflektiert werden. Zum besseren Verständnis der Begrifflichkeiten soll aber an dieser Stelle trotzdem ein kurzer Überblick erfolgen, der weniger die philosophische Sichtweise auf Unterricht, sondern vielmehr die psychologischen und pädagogischen Grundhaltungen aufzeigen will, da sich diese in den Überzeugungen der Lehrkräfte in unterschiedlicher Ausprägung wiederfinden.

Historisch gesehen haben sich in der allgemeinen Didaktik vor allem die didaktischen Modelle von Wolfgang Klafki (Klafki 1996) und Heimann, Otto und Schulz (Heimann 1970) durchgesetzt. Während Klafki den Bedeutungsgehalt eines Themas in den Mittelpunkt seiner didaktischen Überlegungen stellt, unterscheidet die Berliner Schule um Heimann, Otto und Schulz die vier Entscheidungsfelder Ziele, Inhalte, Verfahren und Medien des Unterrichts, sowie die beiden Bedingungsfelder anthropogene und soziokulturelle Lernvoraussetzungen der Lernenden.¹⁷ Im deutschsprachigen Raum hat sich neben diesen Ansätzen auch die Didaktik von Hans Aebli etabliert (Aebli 1976), der als Schüler Piagets eine stark kognitionspsychologische Sichtweise vertritt und davon ausgeht, dass Lernende ihr Wissen selbst aufbauen. Nach Aebli sollte Unterricht aus diesem Grund die vier Schritte problemlösendes Aufbauen, Durcharbeiten, Üben und Anwenden durchlaufen (Lipowsky 2009, S. 75).

Dringt man tiefer in das Feld der pädagogischen Psychologie ein, finden sich neben der z.B. von Aebli vertretenen, kognitionspsychologischen Richtung noch zwei weitere Lerntheorien, die sich im Laufe der letzten 100 Jahre entwickelt haben. Im Folgenden sollen diese drei Theorien (Behaviorismus, Kognitionspsychologie und Konstruktivismus) kurz umrissen und ihre Relevanz für die vorliegende Studie aufgezeigt werden.

17 Trotz des Vorwurfs an die allgemeine Didaktik, empirische Forschungsbefunde nicht genug zu berücksichtigen, beinhalten diese Modelle wichtige Leitfragen zur Planung und Analyse von Unterricht und werden auch heute noch vielfach zur Lehrerbildung und -fortbildung herangezogen (Lipowsky 2009, S. 74f).

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts entstand die Theorie des „Behaviorismus“ oder die „Reiz-Reaktions-Theorie“, die Psychologie als Naturwissenschaft des Verhaltens und Lernen als Erwerb neuer Verhaltensweisen und Reaktionen verstand. Wissenschaftler wie Edward L. Thorndike (1874 – 1949), John B. Watson (1878 – 1958) oder Burrhus F. Skinner (1904 – 1990) erforschten tierisches und menschliches Verhalten und kamen zu dem Schluss, dass Lernen durch Übung/Nachahmung erfolgt und durch positive und negative Verstärkung initiiert bzw. gebremst werden kann (Fritz et al. 2010, S. 224f). Für den Unterricht hatte diese Sichtweise verschiedene, teils problematische Konsequenzen, so wurde der Lernstoff in kleine „Häppchen“ gegliedert, dem Lernenden eine eher passive Rolle zugesprochen und die Lehrkraft zu remedialer¹⁸ Instruktion gehalten (Lipowsky 2009, S. 77).

Mit der kognitiven Wende in den 50er und 60er Jahren des letzten Jahrhunderts wurde das Paradigma des Behaviorismus weitestgehend verdrängt und durch die Kognitionsforschung, d.h. die Erforschung von Prozessen der Wahrnehmung, des Denkens und der Erinnerung, abgelöst (Leutner und Klauer 2012, S. 15f). Der Mensch wird nun als informationsverarbeitendes System gesehen. Lehren bedeutet in diesem Kontext, Prozesse der Informationsverarbeitungen so zu unterstützen, dass wohl-strukturiertes Wissen vom Lernenden in einem aktiven Prozess sinnvoll aufgebaut werden kann (Renkl 2010, S. 738). Für Lehren wird meist der Begriff der Instruktion benutzt, was bedeutet, dass Lernprozesse, die den Wissensaufbau fördern, angeregt werden sollen. Die wissens- und könnensbezogenen Ziele von Lehren und Lernen beziehen sich dabei einerseits auf domänenspezifisches deklaratives und prozedurales Wissen, andererseits auf inhaltsbereichsübergreifendes Wissen, wie z.B. Lernstrategien und metakognitives Wissen (Renkl 2010, S. 740). Lernziele, Lernvoraussetzungen und Rahmenbedingungen werden gleichermaßen berücksichtigt, allerdings umfasst das kognitive Paradigma hauptsächlich wissensbezogene Lernziele und vernachlässigt beispielweise identitätsbezogene, verhaltensbezogene und wertbezogene Komponenten (Renkl 2010, S. 743).

18 „remedial“ aus dem Englischen: „Hilfs-“, das „remedial teaching“ ist der Förder- oder Hilfsunterricht und der remedial course“ der Förderkurs (Langenscheidt 2006, S. 978).

Genau wie die kognitivistische Lerntheorie geht auch die konstruktivistische von einem aktiven Lerner aus, der sich zielgerichtet mit seiner Umwelt auseinandersetzt (Fritz et al. 2010, S. 231). Lernen wird als

„ein konstruktiver, kumulativer, selbstgesteuerter, situativer, individuell unterschiedlicher, gleichzeitig auf die Interaktion mit anderen angewiesener Prozess des Aufbaus von Wissen und der Konstruktion von Bedeutung verstanden“ (Lipowsky 2009, S. 78).

Begriffe wie *situierendes*¹⁹ oder *problemorientiertes Lernen* bezeichnen die Kontextgebundenheit von Lernen und weisen auf ein hohes Maß an Selbststeuerung im Lernprozess hin (Lipowsky 2009, S. 78). Obwohl es viele unterschiedliche konstruktivistische Theorien gibt²⁰, existieren nach Woolfolk (2008) zumindest fünf übereinstimmende Bedingungen für Lehren und Lernen. So sollte Lernen in komplexe Lernumwelten eingebettet sein und soziale Verantwortung beinhalten, der Lehrende sollte das Benutzen von multiplen Repräsentationen unterstützen, die Konstruktion von Wissen beachten und den Lerner an sich immer im Auge behalten (Hoy und Schönpflug 2008, S. 424).

Die Analyse der durchgeführten Interviews hat gezeigt, dass Lehrkräfte unterschiedliche Vorstellungen davon haben, wie Lehren und Lernen funktioniert, dass diese Vorstellungen mit ihrem jeweiligen Menschenbild zusammenhängen und auf der Basis der benannten Lehr- und Lerntheorien zu verorten sind. Da die Lehrkräfte in erster Linie zum Lehren und Lernen von Arithmetik befragt wurden, soll im folgenden Abschnitt nochmals ein besonderer Fokus auf diesen fachdidaktischen Aspekt gelegt werden.

2.2.2 Theorien zum Lehren und Lernen aus fachdidaktischer Perspektive

Erich Wittmann fasst die Geschichte des Lehrens und Lernens zusammen, indem er von zwei gegensätzlichen Positionierungen spricht, die bis heute im Mathematikunterricht wiederzufinden sind. So nennt er einerseits eine *passivistische Position*, die auf der Philosophie des Empirismus und der Psychologie

19 Renkl (2010) spricht in diesem Zusammenhang vom *Situiertheitsansatz*, der durch das Problem des „trägen Wissens“ Ende der 1980er Jahre entstanden ist und neben den fachlichen Aspekten vor allem die sozio-kulturellen Dimensionen von Lernaktivitäten betont (Renkl 2010, S. 744ff).

20 Während der kognitive Konstruktivismus von einer existierenden Umwelt ausgeht, leugnet z.B. der radikale Konstruktivismus alle objektive Existenz außerhalb des geschlossenen Systems Mensch (vgl. z.B. Glasersfeld 1997).

des Behaviorismus gründet und Lernen auf äußere Einflüsse zurückführt. Andererseits spricht er von der *aktivistischen Position*, die auf der Philosophie von Leibnitz und Kant basiert und sich der Kognitionspsychologie²¹ bedient. Lernen wird hier als aktive Konstruktion verstanden, das in einer Wechselwirkung zwischen ‚innen‘ und ‚außen‘ entsteht. Bereits 1916 hat Kühnel die Unterschiede der beiden Sichtweisen mit den Begriffen ‚Leitung und Rezeptivität‘ versus ‚Organisation und Aktivität‘ beschrieben (Kühnel 1966; 1916). Noch heute werden diese Begriffe zur Beschreibung der zentralen Unterschiede von traditionellen Lehr- und Lerntheorien und aktuellen Unterrichtskonzepten benutzt (Winter 1987; Wittmann 1991; Krauthausen 1998; Krauthausen und Scherer 2007). Die extremen Ausprägungen der beiden Positionen (Behaviorismus auf der einen Seite und Radikaler Konstruktivismus auf der anderen) versteht Wittmann als die äußeren Pole eines Kontinuums, auf dem sich jede einzelne Lehrkraft verorten lässt (Wittmann 1991, S. 153).

Ende der 60er Jahre des letzten Jahrhunderts bemühte sich die Reformbewegung der „Neuen Mathematik“ um einen Wechsel weg von der passivistischen Sichtweise, die bis dahin die Unterrichtspraxis und die Theorie bestimmte, hin zu einer aktivistischeren Sicht auf Unterricht. Allerdings kam es erst Anfang der 80er Jahre durch neue Bildungspläne und eine Ablösung von der sogenannten „Mengenlehre“ zu einem tatsächlichen Paradigmenwechsel, indem das Prinzip der kleinen und kleinsten Schritte durch das Prinzip des aktiven und entdeckenden Lernens ersetzt wurde (Wittmann 1991, S. 152f; Krauthausen und Scherer 2007, S. 112). Da sich diese Prinzipien in den Überzeugungen der Lehrkräfte in unterschiedlichster Ausprägung wiederfinden, sollen sie im Folgenden kurz dargestellt und in Beziehung gesetzt werden.

2.2.2.1 *Passivistische Position und das Prinzip der kleinen und kleinsten Schritte*

Beim Prinzip der kleinen und kleinsten Schritte werden Lerninhalte isoliert nach Schwierigkeit und Schritt für Schritt behandelt. Es dominieren Belehrung, ein systematischer Aufbau der Inhalte in kleine „Lernatome“ und eine extensive

21 Wittmann spricht hier nicht explizit vom Konstruktivismus, allerdings betont er die Bedeutung der genetischen Psychologie um Piaget, die konstruktivistische Grundpositionen vertritt.

Übungspraxis mit meist beziehungslosem Aufbau („graue Päckchen“ und „bunte Hunde“). Die Kontrolle der Aufgaben erfolgt durch die Lehrkraft, der Unterrichtsablauf ist genau vorgegeben und basiert auf der Vermittlung normierter Kenntnisse und Fertigkeiten und deren konformer Anwendung (Winter 1987, S. 9; Wittmann 1991, S. 154; Krauthausen und Scherer 2007, S. 112). Als Sinnbild eines solchen Unterrichts steht der „Nürnberger Trichter“, der visuell verdeutlicht, wie den Schülerinnen und Schülern das Wissen nach und nach in kleinen Portionen verabreicht wird (Krauthausen 1998, S. 14).

Welches Mathematikbild liegt dieser Sichtweise nun aber zu Grunde und welche Auswirkungen hat das auf das Lehren und Lernen von Mathematik? Die folgende Übersicht beinhaltet nicht nur Antworten auf diese Fragen, sondern kann auch als eine Zusammenfassung von Kritikpunkten gelesen werden, die dem Prinzip der kleinen und kleinsten Schritte bzw. der gesamten passivistischen Position zu Grunde liegen (vgl. Krauthausen 1998, S. 13ff; Krauthausen und Scherer 2007, S. 120f):

Mathematikbild	Auswirkungen auf Lehren und Lernen
Mathematik als rein formale, streng deduktiv vorgehende Wissenschaft	Wissen wird passiv und eher kurzfristig gelernt und behalten
Mathematik als Ansammlung von Definitionen, Regeln und Rezepten	automatisiertes Wissen, mathematische Sinnzusammenhänge bleiben verschlossen

Tab. 2: *Passivistische Position – zu Grunde liegendes Mathematikbild und Auswirkungen*

Diese formalistische und schematische Sicht auf Mathematik, versteht diese als statisches Gebilde, das wenig Veränderungspotential beinhaltet. Dieses Verständnis von Mathematik steht in engem Zusammenhang zu den späteren Überlegungen in Bezug auf die Strukturmerkmale der Arithmetik (vgl. Kapitel 3.2.1) und wird an dieser Stelle auch intensiver ausgeführt.

2.2.2.2 Aktivistische Position und das Prinzip des aktiven und entdeckenden Lernens

Eine Konsequenz des bereits erwähnten Paradigmenwechsel ab etwa 1985 war, dass die bis dahin existierende Bereichsunabhängigkeit der Lerntheorien aufgebrochen und um fachspezifische Theorien erweitert wurde (Krauthausen 1993, S. 19). Die spezifischen Fragestellungen der einzelnen Fächer bekamen wesentlich mehr Beachtung und werden mittlerweile in unzähligen Studien be-

forscht und analysiert (Selter 1993; Rathgeb-Schnierer 2006; Rechtsteiner-Merz 2013).

Allgemein gesprochen ist ein aktiv-entdeckender Lernprozess durch Eigenaktivität, Selbstorganisation und Selbstverantwortlichkeit gekennzeichnet (Krauthausen 1998, S. 21; Hugener und Klieme 2006, S. 85). Für die Wissenschaft der Mathematik wurde darüber hinaus betont, dass neben diesem neuen Lehr- und Lernverständnis auch ein Umdenken in Bezug auf das Selbstverständnis der Fachwissenschaft stattfinden muss. Statt Mathematik als ein Anhäufen von Wissen zu verstehen, sollte es als produktive Tätigkeit bzw. Geisteshaltung gesehen werden (Freudenthal 1982, S. 140; Winter 1987, S. 28; Gallin und Ruf 1998, S. 21). Aus diesem neuen Selbstverständnis heraus ergeben sich konzeptionelle Überlegungen und Konsequenzen für einen aktiv-entdeckenden Mathematikunterricht, die im Folgenden anhand ausgewählter Aspekte dargestellt werden sollen.

Entdeckendes Lernen

Erstmals in Lehrplänen verschriftlicht wurde das Prinzip des entdeckenden Lernens im Jahr 1985 in NRW (Krauthausen und Scherer 2007, S. 112). Hier heißt es, dass den Aufgaben und Zielen des Mathematikunterrichts vor allem eine Konzeption gerecht wird, die Mathematiklernen durchgängig als konstruktiven und entdeckenden Prozess versteht (Strübing 2008, S. 26). Im baden-württembergischen Bildungsplan der Grundschule von 2004 wird entdeckendes Lernen als Unterrichtsprinzip in allen Schuljahren bezeichnet, das Neugierde weckt und Lehrkräfte wie Lernende fördert und fordert (Reusser 2010, S. 56). Auch der Bildungsplan für die Realschule umschreibt dieses Prinzip mit den Worten:

„Das Kennenlernen verschiedener Zugangsmöglichkeiten zum Lösen eines Problems, das Wählen eines eigenständigen Lösungswegs und seine Präsentation sowie das Reflektieren über eine Lösung im Hinblick auf das Ausgangsproblem fördert den Erwerb von Kompetenzen wie Durchhaltevermögen, Zuverlässigkeit und Ausdauer, sowie Genauigkeit, Sorgfalt und Verantwortungsbereitschaft, zudem Urteilsfähigkeit und kritisches Reflektieren“ (Ministerium für Kultus, Jugend und Sport 2004b, S. 60).

Konzeptionelle Überlegungen zum entdeckenden Lernen und zum produktiven/ beziehungsreichen Üben wurden bereits in den 80er und 90er Jahren des 20. Jahrhunderts z.B. von Winter (1987; vgl. auch Groeben et al. 1988; Schirmer

2009) oder Wittmann (1991; 1992) formuliert. Über herausfordernde Lernsituationen und ganzheitliche Lernzugänge soll den Kindern die Möglichkeit gegeben werden, sich selbstständig mit den Lerninhalten auseinanderzusetzen, um Neues herausfinden, eigene Lernwege zu gehen und Zusammenhänge selbst entdecken zu können (Grassmann 2006, S. 25). Die Aufgabe der Lehrkraft besteht darin, die Schülerinnen und Schüler zu unterstützen ohne sich aufzudrängen, Hilfen anzubieten ohne vorschnell Lösungen zu präsentieren und Denkprozesse anzuregen ohne den Kindern ihre eigenen Gedanken überzustülpen. Darüber hinaus muss sie aber auch über ausreichende mathematische, mathematikdidaktische und methodische Fachkompetenz verfügen, um optimale Förderung zu ermöglichen (Krauthausen 1998, S. 26f).

Winter nennt im Prozess des entdeckenden Lernens vier Stufen, die den Mathematikunterricht verändern und vor allem Einfluss auf die Übungspraxis haben (Winter 1987, S. 17):

- *Phänomenstufe*: Auseinandersetzung mit einer herausfordernden Situation; Beobachtungen; Fragestellungen und erste Lösungsansätze
- *Modellstufe*: Nachbilden der Situation auf praktische, bildhafte oder symbolische Art; Erkundungen in diesem Modell; konstruktive Fassung des neuen Lerninhalts als Lösung von Problemen
- *Systemstufe*: Einordnen des neuen in das vorhandene Wissen; Herstellen von Beziehungen; operatives Durcharbeiten und produktives Üben
- *Reflexionsstufe*: Bewertende Rückschau auf das Gelernte; Übertragung auf neue Situationen

Übungs- und Aufgabenformate

Das Üben ist ein entscheidender Faktor im Arithmetikunterricht. Es stellt einen integralen Bestandteil von Lernprozessen dar und gilt als unverzichtbar (Schipper 2009, S. 304). Im Unterricht existieren verschiedene Übungsformate, die alle ihre Berechtigung haben. So betont Schipper (2007), dass das Ziel des Übens sowohl darin liegen kann, Beziehungen und Zusammenhänge herzustellen, als auch darin, Erlerntes zu festigen und zu automatisieren. Unterschiedliche Aufgabenformate beinhalten demnach divergierende Zielsetzungen. Schipper er-

wähnt drei unterschiedliche Übeformen, die im Folgenden dargestellt sind (Schipper 2009, S. 307ff):²²

Produktives/ beziehungsreiches Üben

Während das Üben traditionell der Festigung von Wissen diene und getrennt vom Lernen betrachtet wurde (Krauthausen und Scherer 2007, S. 112ff), kommt ihm innerhalb des entdeckenden Lernens eine ganz neue Rolle zu. In Form „gelenkter Entdeckung“ (Winter 1984, S. 6) durchdringt es alle vier Stufen des Lernprozesses (siehe oben) und wird somit als integraler Bestandteil dieses Prozesses verstanden (vgl. Wittmann 1991; Wittmann 1992; Krauthausen und Scherer 2006; Krauthausen und Scherer 2006a; Krauthausen und Scherer 2007). Winter fasst diese Durchdringung prägnant mit dem Ausspruch zusammen, dass „*entdeckend geübt und ühend entdeckt*“ wird (Winter 1984, S. 6f), Wittmann visualisiert sie in seinem ‚didaktischen Rechteck‘:

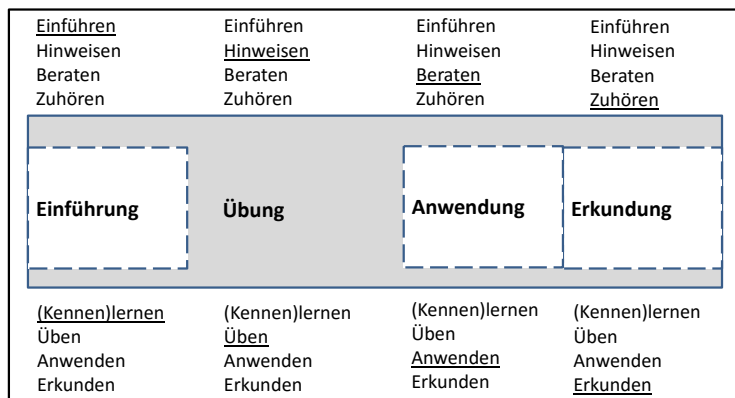


Abb. 3: Didaktisches Rechteck nach Wittmann (1992, S. 178)

Für die Umsetzung dieser Durchdringung sind produktive Übungsformen erforderlich, die ein breites Repertoire an Übungstypen erfordern (Wittmann 1992, S. 175). Entscheidend dabei ist, „*dass im Prozess des Übens auch neue Aspekte entdeckt bzw. bekannte Aspekte vernetzt werden und dass die Aufgabenstellungen ein gewisses Maß an Komplexität und Offenheit aufweisen, um den*

22 Eine gute Übersicht über die verschiedenen Übungstypen und darüber, nach welchen Aspekten man sie klassifizieren kann, findet sich auch bei Wittmann (1992, S. 178ff).

Schülerinnen und Schülern unterschiedliche Zugänge und unterschiedliche Entdeckungen zu ermöglichen“ (Krauthausen und Scherer 2006, S. 4).

Anwendungsorientiertes Üben

Beim anwendungsorientierten Üben bedarf es eines exemplarisch aufgebauten Unterrichts, der den Aufbau von Grundvorstellungen ermöglicht und Anwendungssituationen schafft. Ziel dieser Übungsform ist es, Wissen in vielfältigen Kontexten und Situationen anwenden zu können. Aufgabenformate mit Sachkontext und Bezug zur Realität unterstützen diese Zielsetzung und ermöglichen, je nach dem Grad ihrer Offenheit, ganz unterschiedliche Zugangsweisen. Im Unterrichtsaltag existiert eine Bandbreite von ganz geschlossenen Sachaufgaben, die einem festen Schema unterliegen (Frage – Rechnung – Antwort), bis hin zu offenen Modellierungsaufgaben, die von den Schülerinnen und Schülern mit Hilfe eines Modellierungskreislaufes durchlaufen werden (Maass 2007, S. 10ff; Franke und Ruwisch 2010). Entscheidend für eine Anwendungsaufgabe ist der Mathematisierungsprozess. Nur wenn die Realsituation in ein passendes mathematisches Modell übersetzt werden kann, das am Ende überprüft und mit der Realität in Beziehung gesetzt wird, gelingt eine echte Anwendung (Schipper 2009, S. 320ff).

Automatisierendes Üben

Ziel des automatisierenden Übens ist das Beherrschen und Auswendigkönnen grundlegender Kenntnisse und Fertigkeiten. Dadurch soll das Arbeitsgedächtnis entlastet und somit Kapazitäten für das Lösen anspruchsvollerer Aufgaben geschaffen werden. In der Grundschule geht es in erster Linie darum, Grundkenntnisse wie die Zahlzerlegung bis 10, Verdopplungs- und Halbierungsaufgaben und das kleine Einpluseins und Einmaleins zu automatisieren. Weniger wichtig ist dagegen die Automatisierung von Fertigkeiten und Techniken, wie beispielsweise den schriftlichen Rechenverfahren. Obwohl diese Übungsform durchaus ihre Berechtigung im Mathematikunterricht hat, muss darauf hingewiesen werden, dass auswendiges Wissen nie isoliert, sondern immer im Zusammenhang mit den entsprechenden Grundvorstellungen und einem tiefergehenden Verständnis stehen muss (Schipper 2009, S. 308ff).

Arbeitsmittel und Veranschaulichungen

Arbeitsmitteln und Veranschaulichungen kommen im Mathematikunterricht und speziell im Arithmetikunterricht eine große Bedeutung zu (Lorenz 1998; Krauthausen und Scherer 2007; Schipper 2009; Scherer und Moser Opitz 2010; Henn und Meyer 2014). Sie sollen den Aufbau von Einsicht und Verständnis in mathematische Strukturen und die mathematische Begriffsbildung unterstützen (Scherer und Moser Opitz 2010, S. 75). Damit der Aufbau mentaler Vorstellungsbilder sinnvoll erfolgen kann, müssen Veranschaulichungen passend ausgewählt und Arbeitsmittel gut geplant eingesetzt werden. Nur dann können Schülerinnen und Schüler die mathematischen Strukturen erkennen und interpretieren und den richtigen Umgang mit dem jeweiligen Material erlernen (Krauthausen und Scherer 2007, S. 245ff). In der Literatur finden sich vielfältige Hinweise zum didaktisch-methodischen Einsatz von Arbeitsmitteln und Veranschaulichungen (Lorenz und Radatz 1993; Lorenz 1998; Krauthausen und Scherer 2007; Scherer und Moser Opitz 2010), die für die Studie relevanten Aspekte werden im Folgenden kurz skizziert.

Auswahl und Gütekriterien

„Materialgebundene und bildliche Darstellungen stellen einerseits eine wichtige Lernhilfe, andererseits aber auch Lernstoff mit eigenen Anforderungen für die Schülerinnen und Schüler dar“ (Ministerium für Schule, Jugend und Kinder des Landes Nordrhein-Westfalen [MSJK] 2003, S. 74).

Dementsprechend sollte die Auswahl und Menge der Arbeitsmittel und Veranschaulichungen im Vorfeld gut durchdacht und auf aktuelle fachdidaktische Konzepte bezogen sein. Eine entscheidende Voraussetzung um Arbeitsmaterialien im Unterricht sachgerecht und zielführend einsetzen zu können, ist das Wissen um Hintergrundinformationen und Gütekriterien einzelner Materialien und Veranschaulichungen (Krauthausen und Scherer 2007, S. 240). In der Literatur finden sich dazu unterschiedliche Kriterienkataloge (Scherer 1995, S. 87ff; Lorenz und Radatz 1993; Lorenz 1998), die von Krauthausen/ Scherer in Form eines Fragenkatalogs zusammengefasst wurden (Krauthausen und Scherer 2007, S. 262f):²³

23 Im Folgenden werden einige Beispiele aufgeführt, genauere Erklärungen dieser Aspekte sind in der angegebenen Literatur zu finden.

- Wird die jeweilige mathematische Grundidee angemessen verkörpert?
- Ist eine Übersetzung in grafische [...] Bilder möglich? (Ikonisierung)
- Werden die Ausbildung von Vorstellungsbildern und das mentale Operieren mit ihnen unterstützt?
- Werden verschiedene individuelle Bearbeitungs- und Lösungswege zu ein und derselben Aufgabe ermöglicht?
- Wird die Ausbildung heuristischer Rechenstrategien unterstützt?

Funktionen

Die didaktische Verortung und Zielsetzung, die mit dem Einsatz von Arbeitsmitteln und Veranschaulichungen einhergeht, hängt von der jeweiligen Funktion des Arbeitsmittels bzw. der Veranschaulichung ab. Krauthausen (2007, 257ff) unterscheidet drei Funktionen:

1. Mittel zur Zahldarstellung
2. Mittel zum Rechnen
3. Argumentations- und Beweismittel

Im Schulalltag liegt der Fokus oftmals auf den ersten beiden Funktionen, was dazu führt, dass Arbeitsmittel und Veranschaulichungen hauptsächlich zur Einführung in ein neues Thema oder zur Unterstützung von lernschwachen Kindern genutzt werden. Vor dem Hintergrund der allgemeinen mathematischen Kompetenzen wie z.B. dem Argumentieren, Darstellen oder Kommunizieren gewinnt aber besonders die dritte Funktion zunehmend an Bedeutung und sollte im Mathematikunterricht nicht vernachlässigt werden (Krauthausen und Scherer 2007, S. 257).

„So sehr der Gebrauch als Argumentations- und Beweismittel deutlich unterrepräsentiert ist, so geeignet ist gerade diese Funktion, um zu belegen, dass Arbeitsmittel und Veranschaulichungen keineswegs nur eine >Stützfunktion<, sondern eine eigenständige Bedeutung haben, besonders im Hinblick auf die fundamentalen **allgemeinen Ziele** des Mathematikunterrichts“ (Krauthausen und Scherer 2007, S. 259, Hervorhebung im Original).

Der Unterschied zwischen den verschiedenen Funktionen sollte den Lehrkräften bewusst sein, so dass sie Schülerinnen und Schüler darin unterstützen können, Materialien in allen Bereichen adäquat einzusetzen und zu nutzen.

Ablösung von Arbeitsmitteln und Veranschaulichungen

Sowohl der zu lange Umgang mit, als auch die zu frühe Ablösung von Arbeitsmaterialien birgt Gefahren (Krauthausen und Scherer 2007, S. 224ff; Scherer und Moser Opitz 2010, S. 85f). Da viele Lehrkräfte davon ausgehen, dass insbesondere bei lernschwachen Kindern jede Aktivität mit Arbeitsmitteln zu Einsicht und Verständnis führt, wird Material oft als „permanente Krücke“ (Schmassmann 2008, S. 41) eingesetzt, was aber einem wirklichen Verständnis eher im Wege steht (Scherer und Moser Opitz 2010, S. 86). Auf der anderen Seite erschwert oder verhindert eine zu frühe Ablösung von Arbeitsmitteln und Veranschaulichungen eine echte Einsicht in mathematische Zusammenhänge und ermöglicht es Kindern nicht, tragfähige Vorstellungsbilder aufzubauen (Krauthausen und Scherer 2007, S. 254ff). Der sinnstiftende Einsatz von Materialien und Anschauungsmitteln in Situationen, in denen der handelnde Umgang damit sachlich angebracht und kein Selbstzweck ist (Krauthausen und Scherer 2007, S. 224) und das Mitbestimmen der Kinder, wann und wie lange sie Material benutzen wollen, sind somit entscheidend für einen kompetenzorientierten Mathematikunterricht und fördern eine positive Einstellung gegenüber Arbeitsmitteln und Veranschaulichungen (Scherer 1995, S. 46).

Differenzierung und Individualisierung

Der Bildungsplan für die Werkrealschule in Baden-Württemberg betont in seinen Leitgedanken die besondere Bedeutung eines differenzierten und individualisierten Unterrichts:

„Da die Schülerinnen und Schüler über unterschiedliche Lernvoraussetzungen verfügen, werden sie in einem differenzierenden Mathematikunterricht in jeder Unterrichtseinheit unterschiedliche Kompetenzstufen erreichen. Durch differenzierende Aufgabenstellungen auf verschiedenen Niveaus erzielen die Schülerinnen und Schüler auf unterschiedliche Weise Erfolg, gewinnen dadurch Sicherheit und werden in ihrem Selbstbewusstsein gestärkt“ (Ministerium für Kultus, Jugend und Sport 2012, S. 61).

Entsprechend der Aufbereitung des Unterrichts können Differenzierungsmaßnahmen auf drei unterschiedlichen Ebenen verortet werden (Scherer und Moser Opitz 2010, S. 49ff):

- *äußere Differenzierung*

Es werden möglichst homogene Leistungsgruppen geschaffen, die gemeinsam an gleichschweren Aufgaben arbeiten. Jahrgangsklassen, diffe-

renzierende Kurse in den Sekundarstufen, verschiedene Schultypen, aber auch Förderunterricht sind Beispiele einer solchen Differenzierungsweise.

- *innere Differenzierung*

Innerhalb einer Klasse oder Lerngruppe wird den Schülerinnen und Schülern der Lernstoff differenziert und individualisiert aufbereitet. Dies kann in offener Form (Freie Arbeit, Wochenplan, Stationen lernen, Werkstattunterricht usw.) oder in geschlossener Form geschehen (vgl. Peschel 2009). Letztere meint, dass den Kindern ein sehr detailliertes Curriculum vorgegeben wird, das die Lehrkraft engmaschig und möglichst genau kontrolliert und an die Schülerin bzw. den Schüler anpasst.²⁴

- *natürliche Differenzierung*

Die Schülerinnen und Schüler arbeiten auf verschiedenen Stufen bzw. Anspruchsniveaus am gleichen Lerngegenstand. Bei diesem Lerngegenstand handelt es sich um ein ganzheitliches Themenangebot, das Aufgaben mit unterschiedlichem Schwierigkeitsniveau umfasst. Das jeweilige Anspruchsniveau wird von den Kindern selbst gewählt, so dass die Differenzierung hier vom Kind aus passiert und nicht fremdgesteuert ist (Wittmann 1994, S. 12; Wittmann 2004, S. 15).

Da *äußere Differenzierung* eine kontinuierliche Lernbegleitung einzelner leistungshomogener Gruppen bedeutet, die in der Schule meist nicht realisiert werden kann bzw. so gar nicht vorkommt, ist diese Art der Differenzierung oftmals wenig erfolgsversprechend bzw. überfordert die Lehrkräfte (Nührenbörger und Pust 2006, S. 17). Aber auch *innere Differenzierung* greift oft nicht weit genug, weil sie sich vorrangig auf ein begrenztes Angebot an Aufgaben beschränkt und hauptsächlich die Bearbeitung dieser Aufgaben in unterschiedlicher Reihenfolge und Geschwindigkeit vorsieht (Zehnpfennig 2005, S. 197). Soziales Lernen und gemeinsame Arbeitsphasen kommen hierbei oft zu kurz oder werden komplett ausgespart (Scherer und Moser Opitz 2010, S. 56).

Ein weiterer Kritikpunkt an beiden Differenzierungsformen ist die Tatsache, dass alle Differenzierungsmaßnahmen von der Lehrkraft initiiert werden. Dies

24 Zu den Grenzen und Möglichkeiten dieser Differenzierungsart vergleiche Scherer und Moser Opitz 2010, S. 51ff.

setzt voraus, dass die Lehrperson einen guten Überblick über die bestehenden Lernauffälligkeiten und Lernprobleme hat und dass eine optimale Passung der Aufgaben und Angebote an die individuellen Voraussetzungen jedes Schülers/ jeder Schülerin stattfindet. Letzteres scheint im Unterricht jedoch kaum umsetzbar (Zehnpfennig 2005, S. 196).

Bei der *natürlichen Differenzierung* oder Selbstdifferenzierung werden ganzheitliche Lernzugänge und komplexe Lernumgebungen eingesetzt, die mehrere Fragestellungen mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad beinhalten (Wittmann 1994, S. 12). Die Differenzierung geht vom Kind aus und entspricht somit dem Prinzip des entdeckenden Lernens (vgl. S. 26/ 27).

„Komplexe Lernumgebungen werden der Heterogenität gerecht, denn sie fordern alle Kinder heraus, sie bieten orientierende Grenzen an und regen den Austausch mit den Zugangsweisen und Ideen der anderen Kinder und den Anregungen des Lehrers an“ (Nührenbörger und Pust 2006, S. 18).

Durch die Wahl des Schwierigkeitsgrads und des Lösungsweg werden qualitative Differenzierungsaspekte berücksichtigt, durch die Beantwortung mehrere Problemstellungen und durch die Anzahl der gefundenen Lösungswege und Lösungen auch eine quantitative Differenzierung ermöglicht (Krauthausen und Scherer 2007, S. 231). Das flexible Anpassen des Anspruchsniveaus bei offenen Aufgaben bietet den Vorteil, dass diese Formate die Kinder kaum über- oder unterfordern können. Darüber hinaus stellt der Einsatz solcher Aufgaben im Unterricht ein wichtiges Instrument der Diagnose für die Lehrkraft dar. Lösungswege und gewählte Schwierigkeitsgrade geben Auskunft über den Leistungsstand der Schülerinnen und Schüler und zeigen somit eventuellen Förderbedarf (Scherer 2006, S. 162). Der oben zitierten Forderung des Bildungsplans wird demnach durch die natürliche Differenzierung Rechnung getragen und sollte auch zentrales Thema in der Lehreraus- und -fortbildung sein.

Umgang mit Fehlern und Lernschwierigkeiten

„Der konstruktive Umgang mit Fehlern wird als Chance zum Lernen genutzt“ (Ministerium für Kultus, Jugend und Sport 2012, S. 60). Schülerinnen und Schülern soll vermittelt werden, dass Fehler Bestandteil ihres Lernprozesses sind und diesen unterstützen und voranbringen. Während im traditionell belehrenden Unterricht versucht wird, Fehler möglichst zu vermeiden, indem man sie

umgehend erkennt und verbessert (Wittmann 2004, S. 11; Krauthausen und Scherer 2007, S. 204), ist das Ziel eines modernen konstruktiven Unterrichts der produktive Umgang mit Fehlern. Allerdings werden im Unterrichtsalltag nach wie vor Fehler oft negativ beurteilt und zu vermeiden versucht (Scherer und Moser Opitz 2010, S. 66). Dies geschieht weniger in Einführungsphasen (hier sind Fehler in Explorationsphasen durchaus toleriert oder sogar erwünscht), sondern vielmehr bei generellen Lernschwierigkeiten einzelner Kinder. Das Wissen um Kinder, denen es schwer fällt, Mathematik zu verstehen, sollte Lehrkräften aber bewusst sein und dazu führen, dass auch an diesen Stellen eine kompetenzorientierte Haltung entsteht (Krauthausen und Scherer 2007, S. 205; Scherer und Moser Opitz 2010, S. 67).

„Schülerfehler im Mathematikunterricht haben nur selten ihre Ursache in Gedankenlosigkeit, situationsspezifischen Zufällen oder Nachlässigkeit. Sie sind ganz überwiegend das Ergebnis individuellen, regelhaften Vorgehens der einzelnen Kinder“ (Schipper 2009, S. 136).

Um konstruktiv mit Fehlern umgehen zu können, sollte die Lehrkraft über individuelle Denkwege und über mögliche Fehlvorstellungen Bescheid wissen. Dies kann durch unterschiedliche Arten von Standortbestimmungen erfolgen, hierfür finden sich in der Literatur verschiedene Verfahren wie z.B. Beobachtung, Fehleranalyse, lautes Denken, diagnostische Interviews oder Lerntagebücher (Lorenz und Radatz 1993, S. 59ff; Krauthausen und Scherer 2007, S. 210ff; Scherer und Moser Opitz 2010, S. 31ff). Neben einer veränderten Sichtweise auf Kinder mit Lernschwierigkeiten scheint aber auch ein anderer Umgang mit Kontrolle notwendig zu sein. Fremdkontrolle durch die Lehrkraft führt dazu, dass Schülerinnen und Schüler die Verantwortung zur Prüfung ihrer Ergebnisse nicht wahrnehmen (Wittmann 1994, S. 14). Das kann vermieden werden, indem man Kindern frühzeitig vermittelt, wie sie Fehlerursachen selbstständig aufdecken und produktiv nutzen können.

„Anstatt die richtige Lösung vorzugeben, sollte der Lehrer versuchen, den Rechenweg des Schülers zu verstehen, um dann eine Rückmeldung zu geben, die auf die Herstellung eines Verständniszusammenhangs abzielt“ (Harrass 2007, S. 53; vgl. auch Wittmann 2004, S. 11).

Motivation

Intrinsische und extrinsische Motivation, Interesse und Emotionen, Anstrengungsbereitschaft, Selbstverantwortung und Kausalattribution sowie Über- und Unterforderung stellen wesentliche Motivationsaspekte des Mathematikunterrichts dar (Krauthausen und Scherer 2007, S. 219ff). Da für Lehrkräfte diese Aspekte bei der Planung und Durchführung ihres Arithmetikunterrichts eine wichtige Rolle spielen, sollen sie im Folgenden kurz ausgeführt werden.

Intrinsische und extrinsische Motivation

In der Fachdidaktik werden intrinsische und extrinsische Motivation besonders im Bereich des Übens diskutiert (Krauthausen und Scherer 2007, S. 219). Wenn eine Sache an sich Interesse und Begeisterung auslöst, wird von intrinsischer Motivation gesprochen. Müssen dagegen äußere Anreize geschaffen werden, um einen Lerngegenstand interessant zu machen, wird dies als extrinsische Motivation bezeichnet. Dabei kann es sich um Belohnungen für richtige Lösungen oder auch um Verpackungen von Lerninhalten in Spielsituationen oder in veränderten Darstellungsformen handeln. Oftmals führt extrinsische Motivation aber zu zusätzlichem Lernstoff, weil die Aufgaben immer wieder in anderer Form präsentiert werden. Das ist besonders für schwächere Kinder keine Hilfe im Lernprozess, sondern vielmehr zusätzlicher Arbeitsaufwand (Scherer und Moser Opitz 2010, S. 63).

Somit ist die intrinsische Motivation der extrinsischen vorzuziehen, was sich auch in der folgenden Auflistung zeigt (vgl. Krauthausen und Scherer 2007, S. 219ff):

- ein dauerhaftes Interesse an einer Sache entsteht eher durch intrinsische als durch extrinsische Motivation
- extrinsische Motivation lenkt vom eigentlichen Lerngegenstand ab und lenkt das Interesse auf äußere Gegebenheiten
- extrinsische Motivation kann das Gefühl vermitteln, dass die Lerninhalte an sich uninteressant und langweilig sind
- wenn intrinsische Motivation vorherrscht, geht es primär um die Auseinandersetzung mit der Sache selbst, extrinsische Motivation ist dann nicht mehr notwendig

Interessen und Emotionen

„Intrinsische Motivation kann somit gefördert werden, wenn im Unterricht Situationen geschaffen werden, die die Auseinandersetzung mit der Sache anregen“ (Scherer und Moser Opitz 2010, S. 63).

Vor allem bei vorherrschendem Interesse sind Schülerinnen und Schüler bereit, sich mit einer Sache auseinanderzusetzen und sich anzustrengen. Dabei werden Lernen und Informationsverarbeitung auch durch Emotionen beeinflusst.

„Schüler beachten, lernen und erinnern eher Ereignisse, Bilder und Lesestoff, die emotionale Reaktionen hervorrufen oder mit ihren persönlichen Interessen verbunden sind“ (Hoy und Schönpflug 2008, S. 497).

Auch wenn es nicht gelingen wird, bei allen Kindern gleichzeitig und in gleicher Intensität Interesse für einen Lerngegenstand zu wecken, so gibt es doch

„Lernumgebungen, in denen mit größerer Wahrscheinlichkeit als bei anders gestalteten Lernumgebungen das individuelle Interesse mehrerer Kinder berücksichtigt werden kann“ (Krauthausen und Scherer 2007, S. 220f).

Offene Aufgaben und substanzielle Lernumgebungen sind hierbei geeignete Übungsformate, weil sie auf der einen Seite verschiedene Zugänge ermöglichen und auf der anderen Seite ein großes Repertoire an Eigenaktivität beinhalten (Krauthausen und Scherer 2007, S. 221).

Anstrengungsbereitschaft, Selbstverantwortung und Kausalattribution

Ziel des Unterrichts ist es, die Anstrengungsbereitschaft, die normalerweise in jedem Kind vorhanden ist, aufrecht zu erhalten und zu fördern (Krauthausen und Scherer 2007, S. 121f). Im Laufe eines Lernprozesses beeinflussen Willenskraft und Selbstüberzeugung die anfängliche Motivation und Anstrengungsbereitschaft der Schülerinnen und Schüler. Ablenkungen oder Probleme während des Lernens können zur Folge haben, dass die eigene Motivation nachlässt und die Zielerreichung gefährdet wird. Selbstverantwortung ist dabei ein entscheidender Faktor, der vor Ablenkung schützen kann und die eigene Lernbereitschaft fördert (Mietzel 2007, S. 325ff).

Einen weiteren Faktor für die Anstrengungsbereitschaft von Schülerinnen und Schülern stellen die eigenen Zuschreibungen in Bezug auf Erfolg und Misserfolg dar.

„Wenn man seinen Erfolg einer leichten Aufgabenstellung oder dem Zufall zuschreibt statt dem eigenen Können und/ oder der eigenen Anstrengung, ist das nicht sehr förderlich für die zukünftige Anstrengungsbereitschaft“ (Leutner und Klauer 2012, S. 52).

Zusätzlich hängt die Anstrengungsbereitschaft davon ab, ob bei den Kindern *„die Hoffnung auf Erfolg“* oder die *„Furcht vor Misserfolg“* überwiegt (Edelmann 2000, S. 253ff). Für den Mathematikunterricht bedeutet das aber nicht, dass Misserfolge immer vermieden werden sollten, vielmehr wäre es wünschenswert, dass Schülerinnen und Schüler Interesse an herausfordernden Aufgaben entwickeln, dass Durchhaltevermögen beim Bearbeiten dieser Aufgaben entsteht und dass sie sich nicht von kleinen Misserfolgserlebnissen demotivieren lassen. Diese Einstellung kann auch durch Lehrkräfte und Eltern gefördert werden. Studien haben gezeigt, dass die Kausalattribution von außen das Selbstbewusstsein und die Anstrengungsbereitschaft von Kindern enorm beeinflussen (vgl. Ziegler 1998; Dickhäuser 2003). So wird gerade im Fach Mathematik Jungen oftmals eine höhere Begabung und ein stärkeres Interesse nachgesagt, bei Mädchen hingegen wird behauptet, dass sie gute Mathematikleistungen allerhöchstens durch Fleiß und Anstrengung erreichen können.

„Die Erwartung der Lehrkräfte, der Eltern und des (fach-)öffentlichen Diskurses, dass Jungen in Mathematik begabter, fähiger und interessierter sind, kann somit schwache Leistungen bei Mädchen verstärken und als eine zentrale Blockade bei der Herstellung von Chancengleichheit wirken“ (Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF) 2009, S. 43).

Um ein geschlechtersensibles und leistungsförderliches Klima im Unterricht aufzubauen, ist nicht zuletzt ein konstruktiver Umgang mit Fehlern wichtig und zielführend (vgl. S. 33).

Über- und Unterforderung

Wie bereits erwähnt, hängt das Vertrauen in die eigenen Fähigkeiten, das die Lernmotivation entscheidend mitbestimmt, stark von Erfolgs- und Misserfolgserlebnissen ab. Durch ständige Überforderung werden Schülerinnen und Schüler immer wieder mit Misserfolgen konfrontiert, was meist zu einer Reduktion der Motivation führt. Aber auch Unterforderung schmälert das Interesse am Lerngegenstand und verringert aufgrund fehlender Herausforderung die Motivation. Entscheidend für den Lernerfolg ist demnach, den Unterricht auf dem Vorwissen der Kinder aufzubauen, die vorhandenen Fähigkeiten der Kinder

ernst zu nehmen und eine „Passung zwischen dem vorhandenen und dem neu zu erwerbenden Wissen“ (Krauthausen und Scherer 2007, S. 222) herzustellen, also sowohl Über- als auch Unterforderung zu vermeiden.

2.2.2.3 Unterrichtsform und Unterrichtsstruktur

Wie bereits aufgeführt kann Unterricht auf vielfältige Weise konzipiert und durchgeführt werden. Egal welchen Grad an Offenheit oder Geschlossenheit Lernumgebungen und Unterricht allgemein aufweisen, die in ihm verankerten Lernprozesse müssen sowohl zeitlich strukturiert als auch methodisch organisiert werden (Barzel 2011, S. 80). Unter Methoden werden dabei plan- und zielorientierte Vorgehensweisen verstanden, die die Lehrkraft einsetzt, um von einem Ausgangs- zu einem Zielpunkt zu gelangen (Barzel et al. 2007, S. 21f). Unterricht basiert also auf verschiedenen methodischen Grundbausteinen, die beispielsweise bei Wiater (2010) in Sozialformen, Arbeitsformen, Kommunikationsformen und Artikulationsformen unterteilt werden, jedoch im Unterricht alle miteinander vernetzt sind. Da diese Formen wesentlich dazu beitragen, die Lernprozesse im Arithmetikunterricht zu organisieren, werden sie im Folgenden kurz dargestellt.

Sozialformen

Sozialformen stellen Organisationsformen der Lehrer-Schüler-Interaktion dar und können in vier verschiedenen Varianten (Klassenunterricht, Gruppenarbeit, Partnerarbeit und Einzelarbeit) auftreten. Während die direkte Interaktion zwischen Lehrperson und Kindern den Klassenunterricht kennzeichnet, stehen bei der Gruppen- und Partnerarbeit die Schüler-Schüler-Beziehungen und bei der Einzelarbeit die individuelle Auseinandersetzung mit einem Thema im Vordergrund (Wiater 2010, S. 171ff).

Aktionsformen

Unter Aktionsformen sind Grundmuster gemeint, die die Aktivitäten der Lehrenden und Lernenden beschreiben. Dazu gehören das Darbieten von Inhalten, der Aufbau von Denkopoperationen und das Anbieten passender Aufgaben und Lernumgebungen durch die Lehrperson, das gemeinsame Erarbeiten von Inhalten, das selbstgesteuerte Lernen der Kinder und das Lernen durch Spiel (Wiater 2010, S. 179ff).

Kommunikationsformen

Die Art der Kommunikation bestimmt die Interaktionen im Unterricht wesentlich mit. Gängige Kommunikationsformen sind Vorträge (durch die Lehrkraft oder die Schülerinnen und Schüler), Impulse, Fragen und Antworten, Unterrichtsgespräche, Diskussionen, Reflexionsrunden oder auch nonverbales Kommunizieren (z.B. der stumme Impuls) (Wiater 2010, S. 175ff).

Artikulationsformen

Anhand von Artikulationsformen wird die zeitliche Einteilung des Unterrichts beschrieben. Die drei Grundphasen *Einstieg*, *Erarbeitung* und *Ergebnissicherung* bilden das Kerngerüst des Unterrichts, jeder dieser drei Phasen kommt dabei eine andere Funktion zu. So dient der *Einstieg* zur Motivation und Interessensweckung, indem z.B. an Vorwissen angeknüpft oder aktuelle Themenaspekte, die bei den Schülerinnen und Schülern Interesse auslösen, aufgegriffen werden. Darüber hinaus besitzt der Einstieg aber auch eine Orientierungsfunktion. Die individuelle Auseinandersetzung der Schülerinnen und Schüler mit dem Lerngegenstand ist Ziel der *Erarbeitungsphase*. Abhängig von der jeweiligen Unterrichtskonzeption (offener oder geschlossener Unterricht) ist diese Phase mehr oder weniger schülerzentriert bzw. lehrergelenkt. Sie nimmt im Unterrichtsablauf die meiste Zeit in Anspruch. Die *Ergebnissicherung* bildet den Abschluss des Unterrichts und dient der Sicherung und Überprüfung der Ergebnisse, kann aber auch eine Reflexion über das Erlernte beinhalten (Wiater 2010, S. 183ff).

Während die hier aufgeführten Bereiche eine allgemein-pädagogische Betrachtung von Unterricht aufzeigen, gilt für die Mathematikdidaktik eine nochmals spezifizierte Darstellung. So unterscheiden z.B. Barzel et al. (2011, 81) zwischen den Phasen ‚*Einstieg*‘, ‚*Erkunden und Entdecken*‘, ‚*Systematisieren und Absichern*‘, ‚*Üben und Wiederholen*‘ sowie ‚*Überprüfen und Diagnostizieren*‘. Die Autoren listen diese ‚*Unterrichtsfunktionen*‘ auf, weisen aber darauf hin, dass keine zwangsläufige Reihenfolge besteht. Die Phasen können

„im Unterricht auf durchaus verschiedene Weisen aufeinanderfolgen, z.B. wenn erste Erkenntnisse direkt nach dem Entdecken in anderen Zusammenhängen angewendet werden oder wenn aus einer Übung wieder neue Entdeckungen erwachsen“ (Barzel et al. 2011, S. 81).

Wie das vorangegangene Kapitel gezeigt hat, bringen unterschiedliche pädagogische Grundorientierungen verschiedenen Auffassungen zum Lehren und Lernen mit sich, die wiederum die Gestaltung des Unterrichts entscheidend prägen (Reinmann 2006, S. 616). Es kann somit allgemein gesprochen zwischen zwei grundsätzlich verschiedenen Positionen zum Lehren und Lernen differenziert werden, bei denen entweder die Instruktion oder die Konstruktion im Fokus steht, wobei betont werden muss, dass die Grenzen zwischen den beiden Positionen in Bezug auf Unterricht fließend und nicht eindeutig sind (Reinmann 2006, S. 617). Da die Lehr- und Lernorientierung also eine entscheidende Rolle einnimmt und da davon ausgegangen werden kann, dass die subjektiven Vorstellungen/ Überzeugungen von Lehrkräften zu dieser Orientierung eine wichtige Bedeutung für die Planung und Durchführung von Unterricht haben, erfolgt in Kapitel 3 eine detailliertere Betrachtung dieser Vorstellungen/ Überzeugungen.

Beliefs von Lehrkräften zum Lehren und Lernen von
Arithmetik

Bräunling, K.

2017, XX, 480 S. 80 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-15092-1