Mechanik I: Grundlagen

1

1.1 Modellannahmen – Bewegung auf einer geraden Bahn

Um in die Wissenschaft der Mechanik, der ältesten Disziplin der Physik, möglichst einfach einführen zu können, werden ihre Grundgrößen und Grundgesetze im Folgenden auf der Basis nachstehender Annahmen erläutert:

1. Alle auftretenden Geschwindigkeiten sind gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sehr gering ($v \ll c$); relativistische Effekte existieren nicht.
2. Die Masse der Körper wird in deren Schwerpunkt vereinigt gedacht. Derartige Punktmassen sind drallfrei. Kräfte greifen im Schwerpunkt an.
3. Alle Punktmassen bewegen sich auf einer Geradenbahn.

Durch diese Annahmen kann auf eine vektorielle Darstellung verzichtet werden. In Kap. 2 wird die Darstellung auf gekrümmte Bahnen erweitert, im Wesentlichen bei Aufrechterhaltung der 1. und 2. Annahme. Um eine beliebige krummlinige Bewegung darstellen zu können, bedarf es des Vektorkalküls.

1.2 Weg (s)

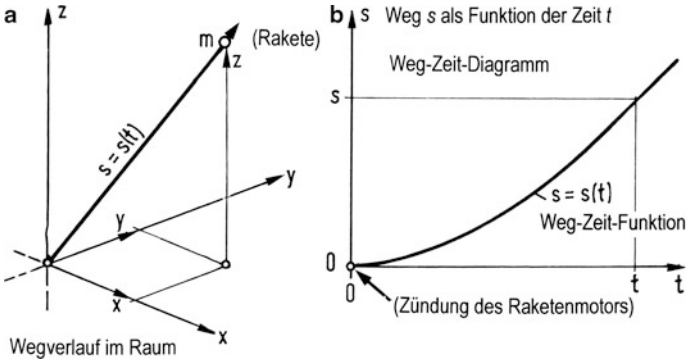
Abb. 1.1a zeigt, wie sich eine Punktmasse m in einem dreidimensionalen Raum, in dem ein rechtwinkliges Koordinatensystem x, y, z aufgespannt ist, auf einer geraden Bahn bewegt, Formelkürzel für den Weg ist s.

Bei der Masse m möge es sich um eine Trägerrakete, die einen Satelliten in den Weltraum befördert, handeln: Der Startpunkt falle mit dem Nullpunkt des Koordinatensystems zusammen, im Augenblick des Starts werde die Zeit t zu $t = 0$ angenommen. In Teilabbildung b ist der Weg s über der Zeit t aufgetragen,

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2017

C. Petersen, *Naturwissenschaften im Fokus II*, DOI 10.1007/978-3-658-15298-7_1

Abb. 1.1



man spricht von einem Weg-Zeit-Diagramm. Wie erkennbar, ist die Weg-Zeit-Funktion nicht geradlinig: Im Startzeitpunkt ist die Beschleunigung a und damit die auf m ausgeübte Kraft durch den Raketenmotor am größten, m bewegt sich von Null aus zunächst langsam, dann immer schneller. Der Raketenmotor muss gegen die Erdanziehung an arbeiten. Aus der Beschreibung wird deutlich: Weg s, Geschwindigkeit v und Beschleunigung a sind Funktionen der Zeit t; s, v und a sind kinematische Größen, sie kennzeichnen den Bewegungsablauf.

1.3 Geschwindigkeit (v)

Unter Geschwindigkeit versteht man die Änderung des Weges in der Zeiteinheit, also die in der Zeiteinheit dt zurück gelegte Wegstrecke ds:

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

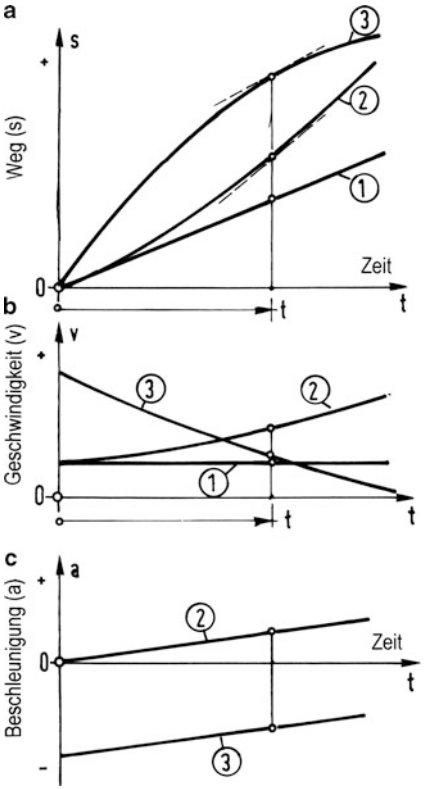
Zeitableitungen $d(\cdot)/dt$ und $\partial(\cdot)/\partial t$ werden hier und im Folgenden durch einen hochgestellten Punkt gekennzeichnet. Die Einheit der Geschwindigkeit folgt aus

$$[v] = \frac{[ds]}{[dt]} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \mathrm{m\,s^{-1}}$$

(Eine Einheit für die Geschwindigkeit v in der Seefahrt (außerhalb des SI) ist der Knoten kn: $1\,\mathrm{kn} = 0{,}5144\,\mathrm{m/s} = 1{,}852\,\mathrm{km/h}$.)

Abb. 1.2a zeigt drei unterschiedliche Weg-Zeit-Kurven. Im Falle der Kurve ① verläuft die Bewegung über der Zeit linear, d. h. die Geschwindigkeit ist konstant

Abb. 1.2

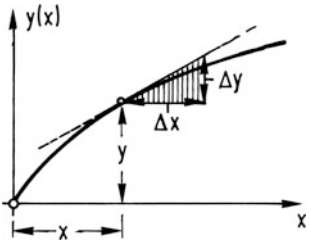


(= gleichförmige Bewegung). Die Kurven ② und ③ zeigen ungleichförmige Bewegungen, ② verläuft progressiv (‚immer schneller'), ③ verläuft degressiv (‚immer langsamer'). Teilabbildung b zeigt die zugehörigen Geschwindigkeiten als Funktion der Zeit, ①: v = konst. ②: v steigt an, ③: v sinkt. Teilabbildung c zeigt, wie sich die Beschleunigung in den drei Fällen mit der Zeit ändert.

1. Anmerkung

Die Änderung einer Funktion, z. B. der Funktion $y = y(x)$, kann geometrisch als deren Steigung (+) oder Neigung (−) gedeutet werden. Wie Abb. 1.3 zu entnehmen ist, ist die Steigung an der Stelle x der Quotient $\Delta y/\Delta x$, was gleichbedeutend mit der Steigung der Tangente an die Kurve an der Stelle x ist, man spricht daher auch vom Tangens. Lässt man Δt immer kleiner werden, geht man also von einer finiten Länge Δx zu einer infinitesimalen (unendlich kurzen) Länge dx über, erhält man die lokale Steigung der Kurve im Punkt x, das ist die lokale Änderung von $y = y(x)$. Der Differenzenquotient wird bei diesem

Abb. 1.3



Grenzübergang zu einem Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

In diesem Sinne ist die obige Definition der Geschwindigkeit zu begreifen. – Ist s als Funktion von t gegeben, muss $s = s(t)$ nach t differenziert werden, um v, also die Geschwindigkeit, zu erhalten, v ist i. Allg. selbst wieder eine Funktion der Zeit t.

Beispiel
$s = c_1 \cdot t + c_3 \cdot t^3$ (diese Funktion entspricht der Kurve ② in Abb. 1.2a). Die Ableitung nach t lautet in diesem Falle: $\dot{s} = c_1 + 3\,c_3 \cdot t^2 = v(t)$, man vgl. mit dem Verlauf der Kurve ② in Abb. 1.2b.

2. Anmerkung
Die Umrechnung der Einheit m/s in km/h (Kilometer durch Stunde, umgangssprachlich: Stundenkilometer) lautet mit

$$1\,\mathrm{m} = \frac{1}{1000}\,\mathrm{km} = 10^{-3}\,\mathrm{km}; \quad 1\,\mathrm{s} = \frac{1}{60 \cdot 60}\,\mathrm{h} = \frac{1}{3600}\,\mathrm{h} = \frac{1}{3{,}6} \cdot 10^{-3}\,\mathrm{h}:$$

$$1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 1\,\frac{10^{-3}\,\mathrm{km}}{\frac{1}{3{,}6} \cdot 10^{-3}\,\mathrm{h}} = 3{,}6\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}; \quad \text{Kehrwert: } 1\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = \frac{1}{3{,}6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 0{,}2778\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

1.4 Beschleunigung (a)

Unter der Beschleunigung a versteht man die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit. Nimmt sie zu, spricht man von Beschleunigung, nimmt sie ab von Verzögerung (Bremsung). Im Falle einer gleichförmigen Bewegung (v = konst., Kurve ① in Abb. 1.2) ist die Beschleunigung Null, im Falle einer ungleichförmigen Bewegung ist die Beschleunigung verschieden von Null (Kurve ②: a: positiv und

Kurve ③: a: negativ). Mathematisch formuliert gilt:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s}$$

$$\text{Einheit: } [a] = \frac{[dv]}{[dt]} = \frac{\text{m/s}}{\text{s}} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Anmerkungen
Die Einführung der physikalischen Größe ‚Beschleunigung' geht auf G. GALILEI (1564–1642) zurück. Bei Rollversuchen auf geneigten Bahnen, auch solchen in Kreisform, hatte er das Gesetz für die Bahnkurve des fallenden Körpers zu $s = s(t) = (1/2) \cdot g \cdot t^2$ erkannt, zudem, dass die Erdbeschleunigung g eine stoffunabhängige Konstante ist. Durch Differenzieren von $s = s(t)$ nach t folgt: $v = g \cdot t$ und $a = g$. Hiermit waren erstmals Begriffe wie Schwere und Trägheit eingeführt, was den Begriff der Kraft bereits beinhaltete. Die Ursache für die Wechselbeziehung zwischen Beschleunigung und Kraft wurde erst 50 Jahre später von I. NEWTON (1643–1727) zutreffend erkannt und in seinem Werk ‚Mathematische Prinzipien der Naturphilosophie' im Jahre 1686 veröffentlicht. Da G. GALILEI das Prinzip des systematisch angelegten Experiments mit Variation der Versuchsparameter und die Erfassung und Beschreibung des experimentellen Ergebnisses mit den Mitteln der Mathematik in die Naturforschung einführte, steht sein Tun für den Anfang der Mechanik und damit der Physik überhaupt, auch gehen noch weitere Erkenntnisse und Erfindungen auf ihn zurück. Sein Konflikt mit der katholischen Amtskirche ist bekannt, siehe Bd. I, Abschn. 1.4 und [1].

Zur historischen Entwicklung der mechanischen Prinzipien mit umfangreichem Schrifttum wird auf [1] verwiesen. Die Klassische Mechanik wird in vielen Werken abgehandelt, vgl. z. B. [2–5], anschauliche Darstellung in [6, 7].

1.5 Kraftaxiome nach I. NEWTON – Kraft ($F = m \cdot a$)

Die von I. NEWTON (1642–1727) formulierten Grundgesetze lauten:

Lex I Ohne Krafteinwirkung tritt keine Änderung des Zustandes eines Körpers mit der Masse m ein, weder im Zustand der Ruhe, noch im Zustand der Bewegung. In heutiger Ausdeutung: Eine Punktmasse m verharrt im Zustand der Ruhe oder bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit auf einer geradlinigen Bahn, wenn keine äußere Kraft auf sie einwirkt. Dieses **Trägheitsgesetz** geht im Kern auf GALILEI zurück (s. o.). In einer noch weitergehenden Auslegung kann man folgern: $v =$ konst. bedeutet $a = 0$, somit gilt: $F = 0$. F ist das Kürzel für die Kraft.

Lex II Die Änderung des Impulses ist der von außen einwirkenden Kraft proportional und gleichgerichtet. Der Impuls (auch Bewegungsgröße genannt) ist das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit (und insofern, wie die Kraft, eine vektorielle Größe): $p = m \cdot v$. p ist das Kürzel für den Impuls.

In heutiger Ausdeutung lautet das **Bewegungsgesetz**:

$$dp = d(m \cdot v) = F \cdot dt \quad \rightarrow \quad F = \frac{d}{dt}(m \cdot v) = \frac{d}{dt}p = \dot{p}$$

Ist m konstant, also zeitinvariant, gilt:

$$F = m \cdot a = m \cdot \ddot{s}$$

In Worten: Kraft und Beschleunigung sind gleichgerichtet und zueinander proportional. (In dieser Form geht das Gesetz nicht auf NEWTON sondern auf L. EULER (1707–1783) zurück). Mit dem obigen Kraftgesetz findet man die Definition für die Krafteinheit zu:

$$[F] = [m] \cdot [a] = \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2} = \mathrm{N} \quad \text{(gesprochen: Newton)}$$

Ist $F = 0$, folgt Lex I aus Lex II.

Lex III Die Kräfte, die zwei Körper aufeinander ausüben, sind ihrer Größe nach gleich und einander entgegen gerichtet: **Wechselwirkungsgesetz** (auch als Gegenwirkungsgesetz oder als Gesetz von *actio et reactio* bezeichnet).

Das Bewegungsgesetz lässt sich quasi-statisch anschreiben:

$$F + (-m \cdot a) = 0$$

Der Term $(-m \cdot a)$ wird Trägheitskraft genannt. Der Term beschreibt den ‚Widerstand' der Masse m gegen eine sie beschleunigende Kraft F. Die in dieser (kinetischen) ‚Gleichgewichtsgleichung' zum Ausdruck kommende Schreibweise des Newton'schen Bewegungsgesetzes wird als d'Alembert'sches Prinzip nach J.R. d'ALEMBERT (1717–1783) bezeichnet. Das Prinzip, im Jahre 1743 veröffentlicht, erweist sich bei vielen dynamischen Untersuchungen als sehr hilfreich. –

Wird das Gleichgewicht aus dem Prinzip der virtuellen Verrückung (wonach die Arbeit der Kräfte bei einer virtuellen Verrückung Null ist) entwickelt, kommt

man zur Fassung des d'Alembert'schen Prinzips nach J.L. LAGRANGE (1736–1813) [1].

Anmerkung
Mit der Postulierung des Trägheitssatzes gilt I. NEWTON als Begründer der modernen Mechanik. R. DESCARTES (1596–1650) hatte die ‚bewegende Kraft' noch als Produkt aus Masse und Geschwindigkeit angesetzt gehabt und G.W. LEIBNIZ (1646–1716) als Produkt aus Masse und dem Quadrat der Geschwindigkeit. I. KANT (1724–1804) glaubte, von beiden Ansätzen sei mal der eine, mal der andere richtig (da war er noch 22 Jahre jung).

1.6 Das gravitative Kraftgesetz nach I. NEWTON

Das erstmals von NEWTON im Jahre 1666 formulierte Massenanziehungsgesetz lautet:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

G: Gravitationskonstante: $G = 6{,}6742 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$.

Die Anziehungskraft zwischen zwei Massen, die auf der Erdoberfläche ruhen, ist von sehr geringer Größe und kann bei technischen Fragestellungen i. Allg. vernachlässigt werden.

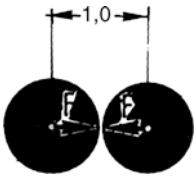
Hierzu ein **Beispiel**: Für zwei sich gegenseitig berührende Stahlkugeln mit je 1 Meter Durchmesser, berechnet sich die gegenseitige Massenanziehungskraft wie folgt (Abb. 1.4):

$$\rho_{\mathrm{Stahl}} = 7850\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}; \quad V_{\mathrm{Kugel}} = \frac{4}{3}\,\pi \cdot 0{,}5^3 = 0{,}5236\,\mathrm{m^{-3}}; \quad m_{\mathrm{Kugel}} = 4110\,\mathrm{kg}$$

$$F = 6{,}6742 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{4110 \cdot 4110}{1{,}0^2} = \underline{0{,}0011\,\mathrm{N}}$$

Das entspricht dem Gewicht (der Gewichtskraft) eines kugelförmigen Wassertropfens von ca. 3 mm!

Abb. 1.4



1.7 Erdschwere – Gewicht – Fallbeschleunigung – Gravimetrie

In einem Gravitationsfeld (Schwerefeld) wirkt auf einen Körper der Masse m eine Kraft ein. Im Schwerefeld der Erde nennt man diese Gewichtskraft das Gewicht des Körpers:

$$F_G = m \cdot g \quad \text{in N.}$$

g ist die Erdbeschleunigung, Näherungswert in europäischen Breiten:

$$g = 9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}} \quad (\approx 10\,\mathrm{m \cdot s^{-2}})$$

Die abgeleitete Einheit für die Kraft ist N (Newton):

$$[F] = [m] \cdot [a] = \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-2}},$$

gesprochen ‚Newton'. – Mit $g = 10\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ kann gerechnet werden, wenn eine Genauigkeit von 2 % ausreicht.

Der exakte Wert für g in $\mathrm{m/s^2}$, der die Erdrotation und Erdabplattung berücksichtigt, beträgt für einen Ort mit der geografischen Breite φ und der Höhe H über dem Meeresspiegel (NN):

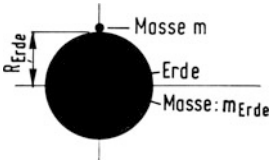
$$g = 9{,}780327 \cdot [1 + 0{,}0053024 \cdot \sin^2\varphi - 0{,}00000558 \cdot \sin^2(2\varphi)] - 3{,}086 \cdot 10^{-6} \cdot H$$

Anstelle des additiven Terms wird auch mit $-3{,}088 \cdot 10^{-6} \cdot (1 - 0{,}00138 \cdot \sin^2\varphi) \cdot H$ gerechnet. Bei $H = 300\,\mathrm{m}$ macht diese Änderung nur 1 ‰ aus.

Wendet man das Gravitationsgesetz auf einen Körper mit der Masse m an, der auf der Erdoberfläche ruht (Abb. 1.5), folgt aus der Gleichsetzung der Gewichtskraft F_G mit der auf die Masse m ausgeübten Anziehungskraft durch die Masse der Erde (als Kugel):

$$m \cdot g = G \cdot \frac{m \cdot m_{\mathrm{Erde}}}{R_{\mathrm{Erde}}^2} \quad \rightarrow \quad g = G \cdot \frac{m_{\mathrm{Erde}}}{R_{\mathrm{Erde}}^2} \quad (R_{\mathrm{Erde}} = \text{Erdradius})$$

Abb. 1.5



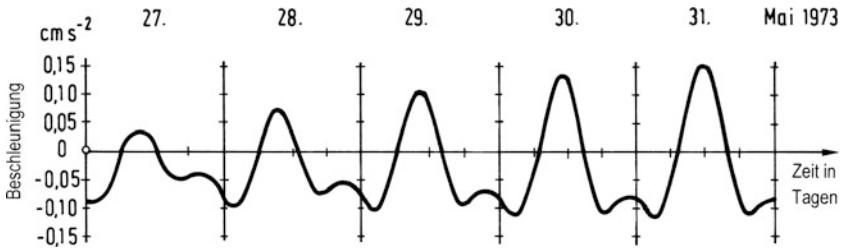


Abb. 1.6

Insofern sind g und G miteinander verknüpft. Mit

$$m_{\text{Erde}} = 5{,}976 \cdot 10^{24}\,\text{kg}, \quad R_{\text{Erde}} = 6{,}371 \cdot 10^{6}\,\text{m}$$

folgt g zu $9{,}826\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$. Dieser Wert gilt für die Erde als Kugel. Bedingt durch die Geoidform der Erde und ihrer ungleichförmigen Massenverteilung einerseits und die Erdrotation andererseits, erfährt der berechnete Wert eine Änderung. Die oben angegebene Gleichung für g gilt als beste Annäherung.

Interessehalber sei in dem Zusammenhang erwähnt, dass täglich, verursacht durch die Gezeitenwirkung des Mondes, zwei Niveauänderungen der Erdkruste als Folge der elastischen Nachgiebigkeit des Erdballs auftreten. Die Doppelamplituden der in Abb. 1.6 gezeigten Schwankungen von ca. $25 \cdot 10^{-2}\,\text{cm} \cdot \text{s}^{-2}$ entsprechen etwa 30 cm. Die Erde ist somit keinesfalls ein starrer statischer Körper [8]. Für die überwiegende Zahl der erdgebundenen Probleme sind die Schwankungen ohne Belang.

Anmerkung 1

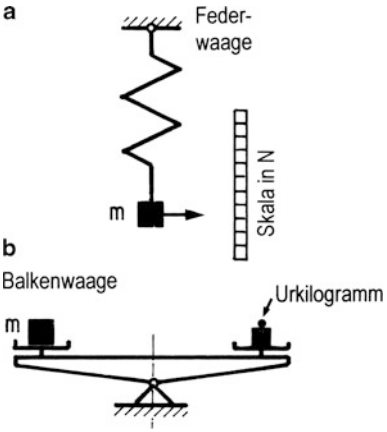
Landläufige Bezeichnungen wie ‚Mein Gewicht beträgt 75 kg' oder ‚Das Bruttogewicht des Warenpakets beträgt 5,4 kg' sind streng genommen falsch. Wenn es das Gewicht ist, gemessen mit einer Federwaage (Abb. 1.7a), müsste es eigentlich heißen: ‚Mein Gewicht beträgt 750 N' und, wenn es sich tatsächlich um die Masse des Pakets handelt (gemessen mit einer Balkenwaage, Abb. 1.7b), müsste es heißen: ‚Die Bruttomasse des Pakets beträgt 5,4 kg'. Auf eine solche wünschenswerte sprachliche Einheitenbereinigung wird man wohl noch lange warten müssen.

Anmerkung 2

Die Bestimmung der Masse eines Körpers erfolgt gängiger Weise (mit einer zumindest für technische Zwecke ausreichenden Genauigkeit) aus dem Gewicht:

$$m = \frac{F_G}{g}; \quad [m] = \frac{[F_G]}{[g]} = \frac{\text{N}}{\text{m} \cdot \text{s}^{-2}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}{\text{m} \cdot \text{s}^{-2}} = \text{kg}$$

Abb. 1.7



Die Dichte ρ der Materie eines Körpers ist der Quotient aus Masse m und Volumen V:

$$\rho = \frac{m}{V}; \quad [\rho] = \frac{[m]}{[V]} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$$

Die Wichte γ (auch spezifisches Gewicht genannt) ist der Quotient aus Gewicht F_G und Volumen V:

$$\gamma = \frac{F_G}{V}; \quad [\gamma] = \frac{[F_G]}{[V]} = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-3} = \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}}{\mathrm{m}^3} = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{s}^{-2}$$

(In DIN 1306 wird empfohlen, die Wichte nicht mehr zu verwenden.)

Ist γ in $\mathrm{N/m^3}$ angegeben, folgt hieraus ρ zu:

$$\rho = \frac{\gamma}{g} = \frac{\gamma}{9{,}81} \approx 0{,}1 \cdot \gamma \quad \text{in kg m}^{-3}$$

Ist das Gewicht F_G in N angegeben, folgt hieraus die Masse m zu:

$$m = \frac{F_G}{g} = \frac{F_G}{9{,}81} \approx 0{,}1 \cdot F_G \quad \text{in kg}$$

1.8 Spannung (σ) und Druck (p)

1.8.1 Spannung (σ) = Kraft je Flächeneinheit

Die Spannung σ ist als die auf den Querschnitt A bezogene Kraft definiert (das bedeutet: σ = Kraft durch Fläche):

$$\sigma = \frac{F}{A}; \quad [\sigma] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-2}$$

A ist die Querschnittsfläche normal (senkrecht) zur Kraftrichtung.

Abb. 1.8a zeigt eine Tragstruktur in seitlicher Ansicht. Die Struktur stehe stellvertretend für ein turmartiges Bauwerk. In den Schwerpunkten der drei aufeinander stehenden Teile wirken die lotrechten (Gewichts-) Kräfte F_1, F_2, F_3.

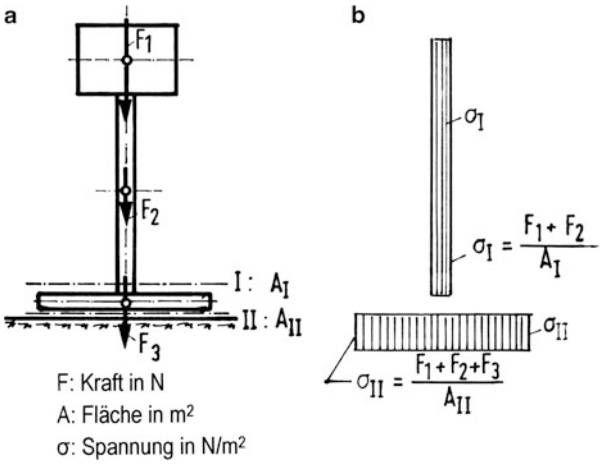
Die Querschnittsflächen in den Schnitten I (durch die Säule unten) und II (unterhalb der Fundamentplatte) seien A_I und A_II.

Die (Normal-)Spannungen in diesen Schnitten betragen:

$$\sigma_\mathrm{I} = \frac{F_1 + F_2}{A_\mathrm{I}}; \quad \sigma_\mathrm{II} = \frac{F_1 + F_2 + F_3}{A_\mathrm{II}}$$

Es handelt sich um Druckspannungen. In Teilabbildung b sind Höhe und Verteilung der Spannungen angedeutet. Tatsächlich biegt sich die Fundamentplatte etwas durch. Dadurch stellt sich keine konstante Spannung (= Druckpressung) unter der

Abb. 1.8



Fundamentplatte ein, sondern eine ungleichförmige, mit einer höherer Pressung zur Mitte hin, insofern hat σ_{II} hier die Bedeutung eines Mittelwertes.

1.8.2 Wasserdruck

Infolge der Wasserauflast stellt sich im Wasser ein Druck ein. In der Tiefe h ruht auf der Fläche A eine Wassersäule. Die aufliegende Masse und die auf die Bodenfläche der Wassersäule einwirkende Gewichtskraft betragen (Abb. 1.9):

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot A \cdot h; \quad F_G = g \cdot m = g \cdot \rho \cdot A \cdot h$$

Mit der Dichte des Wassers $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$ und der Erdbeschleunigung $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ folgt für F_G:

$$F_G = 9{,}81 \cdot 1000 \cdot A \cdot h = 9810 \cdot A \cdot h$$

Der Druck p (Pressung, pressure) auf die Fläche A, beträgt:

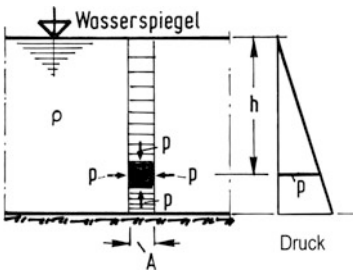
$$p = \frac{F_G}{A} = g \cdot \rho \cdot h = 9810 \cdot h$$

p ist der hydrostatische Druck, hier in der Tiefe h, er wächst linear mit der Tiefe. Der Druck wirkt allseitig auf das lokale Volumenelement und damit senkrecht (normal) auf eine das Wasser begrenzende Wand.

Die Druckeinheit (allgemein Spannungseinheit) $\mathrm{N/m^2}$ heißt im SI: ‚Pascal', abgekürzt:

$$1\,\mathrm{Pa} = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^2}} = 1\,\mathrm{N \cdot m^{-2}}$$

Abb. 1.9



Anmerkung
Die bislang tiefste Tauchfahrt gelang am 23.01.1960 J. PICCARD (1922–2008) und D. WALSH mit dem von ihnen und Vater A. PICCARD (1884–1962) konstruierten, 14 t wiegenden Tieftauchgerät ‚Trieste'. Sie erreichten im Marianengraben (Challenger Tief), der tiefsten Stelle aller Weltmeere, eine Tiefe von 10.916 m. Sie saßen in einer Stahlkugel. Als Auftriebskörper waren am Tauchgerät zylindrische Tanks mit einer ca. 110 t fassenden Benzinfüllung untergebracht ($\rho \approx 670\,\mathrm{kg/m^3}$). Der aus Stahlkörpern bestehende Ballast (ebenfalls ca. 14 t wiegend) wurde durch Elektromagnete gehalten. Bei einem Ausfall der Stromversorgung wären die Ballastkörper abgefallen und das Boot wäre sofort selbsttätig aufgestiegen (so erfolgte auch der planmäßige Aufstieg). – Eine Tauchfahrt auf 10.916 m Tiefe bedeutet ein Druck von:

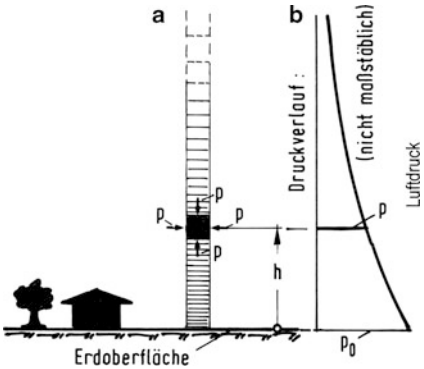
$$p = 9810 \cdot 10.916 = 107.085.960\,\mathrm{Pa} = 107\,\mathrm{MPa}.$$

Das entspricht einer Pressung pro Quadratmeter durch einen $10.916/7{,}87 = 1387$ m hohen Turm aus massivem Eisen oder einem $10.916/2{,}4 = 4548$ m hohen Turm aus massivem Beton. Die Tauchkugel hatte eine Wanddicke von 120 mm, im Bereich der beiden Fenster von 180 mm, und einen Durchmesser von ca. 2 m. Sie bestand aus hochfestem Chrom-Nickel-Molybdän-Stahl. – Am 26.03.2012 wiederholte J. CAMERON (*1955) die Tauchfahrt im Alleingang mit seinem ca. 8 m lagen U-BOOT ‚Deepsea Challenger'. Es gelang ihm, mit einem Greifarm Proben vom Tiefseeboden zu nehmen und Filmaufnahmen zu machen (Temperatur hier etwa 2 °C).

1.8.3 Luftdruck

Durch das Gewicht der Lufthülle herrscht auf dem Erdboden und oberhalb davon ein Luftdruck. Der Verlauf ist nicht geradlinig (wie beim weitgehend inkompressiblen Wasser), sondern ungleichförmig, wie in Abb. 1.10 dargestellt. Luft ist ein kompressibles Gas. Die Dichte der Luft ist vom Druck abhängig, außerdem von

Abb. 1.10



der Temperatur (Bd. I, Abschn. 2.7.3). Die exponentielle Abnahme des Luftdrucks mit der Höhe gehorcht der sogenannten barometrischen Höhenformel (vgl. Abschn. 2.4.1.2):

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-g \cdot \frac{\rho_0}{p_0} \cdot h}; \quad [p] = \text{Pa}$$

p_0 ist der Luftdruck und ρ_0 die Luftdichte in Höhe der Erdoberfläche:

$$p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5\,\text{Pa}; \quad \rho_0 = 1{,}225\,\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

Die vorstehende Formel ist eine Näherung, sie unterstellt eine isotherme Atmosphäre, d. h. eine konstante Temperatur über die Höhe h. h ist die Höhe über dem Meeresspiegel, also über N.N. (Normal Null). Für diese Höhe gelten die angeschriebenen Werte p_0 und ρ_0 als Standard, man spricht bei dem Standard auch von Normal- oder Normbedingung, vgl. folgenden Abschnitt.

Beispiel
Befindet sich ein Bergsteiger im Gebirge auf 1000 m Höhe (Zustand ①) und steigt er von hier aus auf einen Gipfel mit 2500 m Höhe (Zustand ②), betragen die Druckverhältnisse auf diesen Höhen mit:

$$-g\frac{\rho_0}{p_0} = -9{,}81 \cdot \frac{1{,}225}{1{,}013 \cdot 10^5}\,\text{m}^{-1} = -11{,}863 \cdot 10^{-5}\,\text{m}^{-1}$$

Zustand ①, $h = 1000\,\text{m}$:

$$-g \cdot \frac{\rho_0}{p_0} \cdot h = -0{,}11863 \quad \rightarrow \quad p(1000) = 1{,}013 \cdot 10^5 \cdot 0{,}8881 = 0{,}900 \cdot 10^5\,\text{Pa}$$

Zustand ②, $h = 2500\,\text{m}$:

$$-g \cdot \frac{\rho_0}{p_0} \cdot h = -0{,}29680 \quad \rightarrow \quad p(2500) = 1{,}013 \cdot 10^5 \cdot 0{,}7434 = 0{,}753 \cdot 10^5\,\text{Pa}$$

Bezogen auf den Ausgangszustand ① beträgt die Abnahme des Drucks: $0{,}147 \cdot 10^5$ Pa: 14,5 %.

1.8.4 Druckeinheiten

Neben der SI-Einheit Pascal sind folgende Druckeinheiten im Gebrauch:

- Bar: $1\,\text{bar} = 10^5\,\text{Pa} = 100\,\text{kPa}$ (1 bar = atmosphärischer Druck auf der Erdoberfläche),
- Physikalische Atmosphäre: $1\,\text{atm} = 1{,}01325 \cdot 10^5\,\text{Pa}$;
- Technische Atmosphäre: $1\,\text{at} = 0{,}98066 \cdot 10^5\,\text{Pa}$;
- Torr: $1\,\text{Torr} = 1{,}33322 \cdot 10^2\,\text{Pa}$.

	Pa	bar	mbar	at	atm	Torr	mm WS
1 Pa	1	10^{-5}	10^{-2}	$1{,}0197\cdot10^{-5}$	$0{,}9869\cdot10^{-5}$	$7{,}5006\cdot10^{-3}$	0,1020
1 bar	10^{5}	1	10^{3}	1,0197	0,9869	750,06	$10{,}20\cdot10^{3}$
1 mbar	10^{2}	10^{-3}	1	$1{,}0197\cdot10^{-3}$	$0{,}9869\cdot10^{-3}$	0,7506	10,20
1 at	$9{,}807\cdot10^{4}$	0,9807	980,7	1	0,9678	735,56	10^{4}
1 atm	$1{,}0133\cdot10^{5}$	1,0133	1013,3	1,0333	1	760,06	$1{,}0332\cdot10^{4}$
1 Torr	133,32	$1{,}3332\cdot10^{-3}$	1,3332	$1{,}3595\cdot10^{-3}$	$1{,}3157\cdot10^{-3}$	1	13,595
1 mm WS	9,807	$9{,}807\cdot10^{-5}$	$9{,}807\cdot10^{-2}$	10^{-4}	$0{,}9678\cdot10^{-4}$	$7{,}3556\cdot10^{-2}$	1

Von links nach rechts ablesen!

Abb. 1.11

Mittels der Tabellenwerte in Abb. 1.11 können die unterschiedlichen Druckeinheiten (einschl. WS = Wassersäule) untereinander umgerechnet werden. Näherung: 1 bar $\approx$ 1 at $\approx$ atm. atü steht für Überdruck, z. B. 3 atü $= 1 + 3 = 4$ at. 1 psi $=$ 6895 Pa.

1.9 Kraftmoment (M)

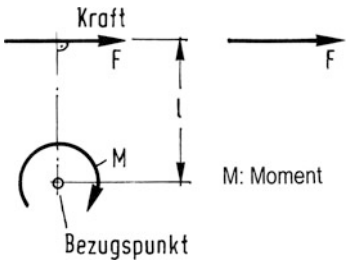
In einem engen Zusammenhang mit der Kraft steht der Begriff des (Kraft-)Momentes: Betrachtet man einen festen Bezugspunkt außerhalb des momentanen Wirkungsortes der Kraft F und ist l der senkrechte Abstand zur Wirkungslinie von F, ist das Moment von F zu

$$M = F \cdot l \quad [M] = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$$

definiert (vgl. Abb. 1.12): (‚Moment = Kraft mal Hebelarm'). Der positive Drehsinn von M ist frei vereinbar.

Abb. 1.13a zeigt als **Beispiel** einen mittig gelagerten Balken. Die Längen betragen zu beiden Seiten l_1 und l_2. Bezogen auf den mittigen Stützpunkt betragen die gegenläufigen Momente

Abb. 1.12



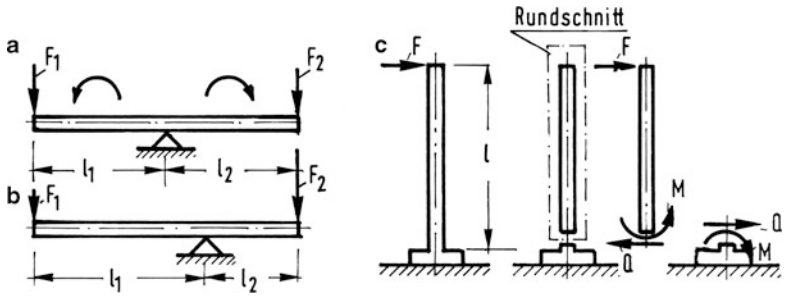


Abb. 1.13

der an den Enden des Balkens wirkenden Kräfte F_1 und F_2: $M_1 = F_1 \cdot l_1$ und $M_2 = F_2 \cdot l_2$. Der Balken verbleibt im Falle $l_1 = l_2 = l$ nur dann im Gleichgewicht, also in einer horizontalen Gleichgewichtslage, wenn die Gleichung $M_1 - M_2 = 0 \rightarrow F_1 \cdot l - F_2 \cdot l = 0$ erfüllt ist. Die Lösung ist: $F_1 = F_2$, das ist plausibel. – Im Falle des in Teilabbildung b dargestellten Balkens mit unterschiedlich langen überkragenden Längen lautet die Gleichgewichtsgleichung:

$$M_1 - M_2 = 0 \quad \rightarrow \quad F_1 \cdot l_1 - F_2 \cdot l_2 = 0 \quad \rightarrow \quad F_2 = \frac{F_1 \cdot l_1}{l_2}$$

Man spricht vom **Hebelgesetz**. Es geht, wie andere einfache mechanische Werkmittel (Flaschenzug, Keil) auf ARCHIMEDES VON SYRAKUS (287–212 v. Chr.) zurück [3].

Abb. 1.13c zeigt als weiteres **Beispiel** einen im Fußpunkt (in der Fundamentplatte) eingespannten Biegestab. Am freien Ende wirke die Kraft F. Das System steht stellvertretend für ein turmartiges Bauwerk, belastet durch Wind. Um die Beanspruchung im Fußpunkt berechnen zu können, wird durch den Balken im Übergang zum Fundament ein Rundschnitt gelegt. An der Schnittstelle werden die (Quer-)Kraft Q und das (Biege-)Moment M definiert. Der Schnitt ist eine Fiktion, eine Hilfsvorstellung, um die Beanspruchung im Inneren des Stabquerschnittes berechnen bzw. beurteilen zu können. Die Gleichgewichtsgleichungen für den oberhalb des gedachten Schnittes liegenden Stabbereich liefern:

Summe aller Kräfte in horizontaler Richtung gleich Null:

$$\sum H = 0: \quad Q - F = 0 \quad \rightarrow \quad Q = F$$

Summe aller Momente gleich Null:

$$\sum M = 0: \quad F \cdot l - M = 0 \quad \rightarrow \quad M = F \cdot l$$

($\sum$ ist das Summenzeichen.) Ausgehend von den Schnittgrößen Q und M kann die Beanspruchung an der Schnittstelle im Querschnitt berechnet und anschließend der Stabquerschnitt dimensioniert werden. Derartige Aufgaben fallen in das Gebiet der Statik und Festigkeitslehre, vgl. Abschn. 2.1.5.

1.10 Impuls (p)

1.10.1 Impulssatz – Impulserhaltungsgesetz

Der Impulsbegriff wurde bereits in Abschn. 1.5 mit

$$p = m \cdot v \quad [p] = [m] \cdot [v] = \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$$

eingeführt.

Anmerkung
Für den Impuls gibt es im SI keinen eigenständigen Einheitennamen und auch kein eigenständiges Einheitenkürzel. Hier wird p gewählt, wie in der Physik üblich. Eine Verwechslung mit p für Druck (= Kraft bezogen auf die Flächeneinheit, vgl. Abschn. 1.8) ist eher nicht zu befürchten.

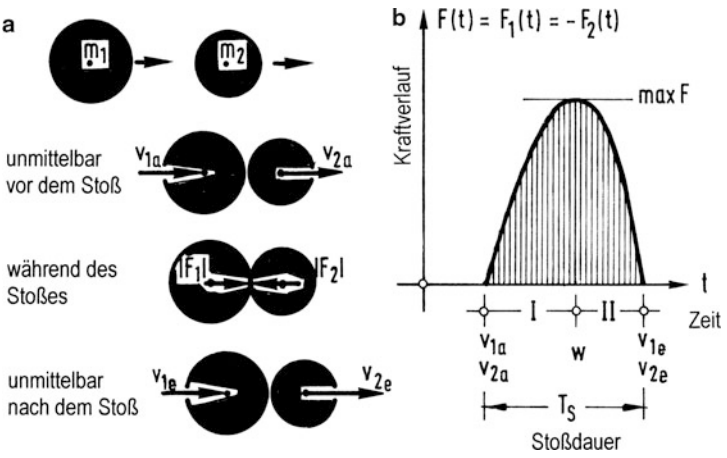
Eine zeitliche Änderung des Impulses kann durch eine Änderung der Masse m, der Geschwindigkeit v oder beider zustande kommen (p ist, wie v, eine vektorielle Größe). Wie ebenfalls ausgeführt, geht die zeitliche Änderung des Impulses mit der Wirkung einer Kraft einher, oder anders formuliert: Kraft ist gleich der zeitlichen Änderung des Impulses (Lex II):

$$F = \frac{dp}{dt} = \dot{p} = \frac{d(m \cdot v)}{dt} = \frac{dm}{dt} \cdot v + m \cdot \frac{dv}{dt} = \dot{m} \cdot v + m \cdot \dot{v} = \dot{m} \cdot v + m \cdot a$$

Der Sonderfall $m =$ konstant, d. h. $\dot{m} = 0$, liegt am häufigsten vor, in diesem Falle gilt: $F = m \cdot a$ (‚Kraft ist gleich Masse mal Beschleunigung‘).

Das Impulserhaltungsgesetz besagt, dass in einem abgeschlossenen System der Impuls der sich bewegenden Massen konstant bleibt oder anders formuliert: Ein abgeschlossenes System ist u. a. ein solches, in das keine Impulsänderung von außen (in Form von Kräften) eingeprägt wird. Wirken äußere Kräfte, ist die Änderung des Gesamtimpulses proportional zur Resultierenden dieser Kräfte, das System ist dann nicht abgeschlossen. Der Impulssatz hat in der Theorie stoßender Körper große Bedeutung, vgl. den folgenden Abschnitt. Innerhalb der Kontaktphase werden Kräfte an den Kontaktstellen der beteiligten Körper bei gleichzeitiger Änderung ihrer Geschwindigkeit und damit des ihnen innewohnenden Impulses geweckt. Wird die obige Definitionsgleichung für den Impuls für den Fall $m =$konstant umgestellt, gilt:

$$dp = F \cdot dt \quad \rightarrow \quad p = \int_{t_p} F(t) \cdot dt + C$$



Die angeschriebene Größe p ist hier jene Impulsänderung, die auf der Wirkung der Kraft $F = F(t)$ innerhalb der Impulsdauer t_p beruht; der Freiwert C dient zur Einrechnung der Anfangsbedingung.

1.10.2 Prallstoß (Körperstoß)

1.10.2.1 Zentrischer Prallstoß

Von den verschiedenen Aufprallstößen hat der gerade zentrische Stoß zweier Körper die größte Bedeutung. Bei diesem Stoß treffen zwei drallfreie Körper zusammen. Liegen deren Geschwindigkeitsvektoren auf der Verbindungsgeraden der beiden Körperschwerpunkte, kommt es zu einem zentralen Stoß. Die Wirkungslinie der Stoßkräfte fällt mit dieser Geraden zusammen, wie z. B. bei zwei zentrisch aufeinander treffenden Kugeln, Abb. 1.14a. Auf das System sollen während des Stoßes keine weiteren Kräfte einwirken, es handelt sich dann um ein abgeschlossenes System. Für ein solches System bleibt der Gesamtimpuls konstant, s. o. Der Gesamtimpuls ist gleich der (Vektor-)Summe der Einzelimpulse. Die Stoßzeit (Kontaktzeit während des Stoßes) ist i. Allg. sehr kurz. Innerhalb dieser Kontaktzeit werden in den Kontaktzonen der beiden Körper Kräfte induziert. Sie bauen sich von Null aus auf, erreichen einen Größtwert und bauen sich bei der Trennung der Körper wieder auf Null ab, sie sind demnach zeitveränderlich, Funktionen der Zeit: $F_1 = F_1(t)$ und $F_2 = F_2(t)$. Sie bilden während der gesamten Kontaktphase ein Gleichgewichtspaar, sie sind gegengleich. Über deren zeitlichen Verlauf und

über die Höhe des Kraftmaximums kann zunächst keine Aussage gemacht werden, sie gilt es im Folgenden zu bestimmen.

Die betrachteten Körper haben eine unterschiedliche Masse: m_1 und m_2. Sie bewegen sich gleichgerichtet mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten. Unmittelbar vor dem Zusammentreffen, also unmittelbar vor dem Kontakt, betragen die Geschwindigkeiten: v_{1a} und v_{2a} und unmittelbar nach der Trennung: v_{1e} und v_{2e} (Annahme: $v_{1a} > v_{2a}$), vgl. Abb. 1.14b. Der Index a steht für Anfang, der Index e für Ende der Kontaktphase. Die sich während des Stoßes einstellenden Deformationen an den Kontaktstellen der beiden Körper seien so gering, dass sich deren Masseverteilung und Schwerpunktlage nicht ändert; eine Zertrümmerung der Körper finde nicht statt, die Größe der Massen bleibe konstant. Unbekannte des Problems sind die Geschwindigkeiten v_{1e} und v_{2e} sowie $F(t)$, also der Verlauf der Kontaktkraft als Funktion der Zeit. Das Impulserhaltungsgesetz verlangt, dass der Impuls am Ende der Kontaktphase gleich jenem am Anfang ist:

$$m_1 \cdot v_{1a} + m_2 \cdot v_{2a} = m_1 \cdot v_{1e} + m_2 \cdot v_{2e}$$

Der Stoß zerfällt in zwei Phasen (Abb. 1.14b): I: Zusammendrückung (Kompression) und II: Entspannung (Restitution). Während dieser Phasen sind die Geschwindigkeiten von m_1 und m_2 unterschiedlich. Es gibt einen Augenblick, in welchem die Geschwindigkeiten gleich groß sind. Diese gemeinsame Geschwindigkeit wird mit w abgekürzt. Die Relativgeschwindigkeit zwischen den Körpern ist in diesem Augenblick Null; der Schwerpunktabstand zwischen den Körpern erreicht ein Minimum und die inneren, gegengleichen Kontaktkräfte ein Maximum:

$$\max F_1 = -\max F_2.$$

Weiter gilt:

$$v_{1a} > w > v_{2a} \quad \text{und} \quad v_{1e} < w < v_{2e}.$$

Im Augenblick des Übergangs von Phase I auf II verlangt das Impulserhaltungsgesetz:

$$m_1 \cdot v_{1a} + m_2 \cdot v_{2a} = (m_1 + m_2) \cdot w = m_1 \cdot v_{1e} + m_2 \cdot v_{2e}$$
$$\rightarrow \quad w = \frac{m_1 \cdot v_{1a} + m_2 \cdot v_{2a}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \cdot v_{1e} + m_2 \cdot v_{2e}}{m_1 + m_2}$$

Abb. 1.14b zeigt einen möglichen Verlauf der Kontaktkraft. Die Zeitdauer der Kompressionsphase betrage t_{I} und jene der Restitutionsphase t_{II}. Indem einmal

über $F(t)$ während der Zeitdauer t_I und einmal über $F(t)$ während der Zeitdauer t_II integriert wird, lässt sich jeweils die der Masse m_1 bzw. die der Masse m_2 zugeordnete Impulsänderung zwischen Kontaktbeginn und Übergangzeitpunkt I/II bzw. zwischen diesem Zeitpunkt und dem Kontaktende anschreiben:

$$\Delta p_\mathrm{I} = -m_1 \cdot (w - v_{1a}) = +m_2 \cdot (w - v_{2a}) = \int_{t_\mathrm{I}} F(t)\,dt$$

$$\Delta p_\mathrm{II} = -m_1 \cdot (v_{1e} - w) = +m_2 \cdot (v_{2e} - w) = \int_{t_\mathrm{II}} F(t)\,dt$$

Bildet man die Summe, bestätigt man:

$$\Delta p = \Delta p_\mathrm{I} + \Delta p_\mathrm{II} = \int_{t_\mathrm{I}+t_\mathrm{II}} F(t)\,dt$$

Nach wie vor steht nur eine Gleichung für zwei Unbekannte (v_{1e}, v_{2e}) zur Verfügung. Da über den Verlauf von $F(t)$ keine Aussage gemacht werden kann, lässt sich die Aufgabe mittels obiger Gleichungen allein nicht lösen. Allenfalls kann man schließen, dass die Beziehung zwischen v_{1a} und v_{1e} einerseits und v_{2a} und v_{2e} andererseits vom Verhältnis der Restitutions-Impulsänderung Δp_I zur Kompressions-Impulsänderung Δp_II abhängig sein wird. Dieser Quotient werde mit ε abgekürzt:

$$\varepsilon = \frac{\Delta p_\mathrm{II}}{\Delta p_\mathrm{I}} = \frac{\int_{t_\mathrm{II}} F(t)\,dt}{\int_{t_\mathrm{I}} F(t)\,dt} = \frac{v_{1e} - w}{w - v_{1a}} = \frac{v_{2e} - w}{w - v_{2a}}$$

In Verbindung mit der obigen Gleichung für w ist der Quotient gleichwertig mit

$$\varepsilon = \frac{v_{2e} - v_{1e}}{v_{1a} - v_{2a}},$$

wie man durch Einsetzen bestätigt. Im Zähler steht die Relativgeschwindigkeit von m_1 und m_2 am Ende des Stoßes, im Nenner jene zu Beginn des Stoßes. Beide lassen sich messen, damit wäre auch ε bekannt. ε nennt man **Stoßzahl**, auch Restitutionszahl; ihre Einführung geht auf I. NEWTON zurück. Damit ergeben sich die Geschwindigkeiten der beiden Massen am Ende des Stoßes zu:

$$v_{1e} = v_{1a} - \frac{(v_{1a} - v_{2a}) \cdot (1 + \varepsilon)}{1 + m_1/m_2}, \quad v_{2e} = v_{2a} + \frac{(v_{1a} - v_{2a}) \cdot (1 + \varepsilon)}{1 + m_2/m_1}$$

http://www.springer.com/978-3-658-15297-0

Naturwissenschaften im Fokus II
Grundlagen der Mechanik einschließlich solarer Astronomie und Thermodynamik
Petersen, C.
2017, XVII, 516 S. 387 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-658-15297-0