

Die Potentialgleichung

Zusammenfassung. Hier wird die einfachste, aber prototypische elliptische Differentialgleichung zweiter Ordnung vorgestellt. Lösungen dieser Gleichung heißen harmonisch. Zusammen mit einer Randbedingung erhält man ein Randwertproblem. Ein wichtiges Hilfsmittel ist die Singularitätenfunktion (oder Fundamentallösung), die in **Abschnitt 2.2** definiert wird. Mit Hilfe der Green'schen Formeln ergibt sich eine Lösungsdarstellung in Satz 2.8. In **Abschnitt 2.3** werden die Funktionen mit Mittelwerteigenschaft eingeführt. Es wird gezeigt, dass diese mit den harmonischen Funktionen übereinstimmen. Aus der Mittelwerteigenschaft folgt das Maximum-Minimum-Prinzip: Die Funktionen haben keine lokalen Extrema, es sei denn, sie sind konstant. Eine wichtige Folgerung ist die Eindeutigkeit der Lösung (Satz 2.18). Schließlich wird in **Abschnitt 2.4** die stetige Abhängigkeit von den Randdaten untersucht.

2.1 Problemstellung

Die Potentialgleichung aus Beispiel 1.3 lautet¹

$$-\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad (2.1a)$$

wobei $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \dots + \partial^2/\partial x_n^2$ der *Laplace-Operator* ist. In der Physik beschreibt Gleichung (2.1a) Potentiale, beispielsweise das elektrische Potential, wenn Ω keine elektrischen Ladungen enthält, das magnetische Potential bei verschwindender Stromdichte oder das Geschwindigkeitspotential. In diesen Fällen besitzt der Gradient ∇u die unmittelbare physikalische Bedeutung.

Gleichung (2.1a) wird auch *Laplace-Gleichung* genannt, da sie von Pierre-Simon Laplace in seinem fünfbändigen Werk “*Mécanique céleste*” (geschrieben 1799–1825) beschrieben wurde. Zuerst wurde die Potentialgleichung allerdings 1751 von Euler [79] erwähnt.

Auf den Zusammenhang zwischen der Potentialgleichung für $n = 2$ und der Funktionentheorie ist schon in Beispiel 1.3 hingewiesen worden. Der Laplace-Operator ist nicht nur ein Beispiel für einen elliptischen Differentialoperator, sondern sogar der Proto-

¹ Das Minuszeichen in $-\Delta u = 0$ hat hier nur eine symbolische Bedeutung. Der Hintergrund ist, dass $-\Delta$ “schönere” Eigenschaften hat als Δ , da $-\Delta$ in mehrfachem Sinne positiv ist. Beispielsweise wird die Singularitätenfunktion in (2.4a) eine positive Singularität besitzen.

typ (Normalform). Durch Variablentransformation lässt sich ein elliptischer Differentialoperator zweiter Ordnung so umformen, dass der Hauptteil der Laplace-Operator ist (vgl. Hellwig [120, Seiten 64f]).

Definition 2.1 (Gebiet). $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt Gebiet, falls Ω offen und zusammenhängend² ist.

Im Folgenden wird Ω stets ein Gebiet sein. Sein Rand wird mit

$$\Gamma = \partial\Omega$$

bezeichnet. Die Existenz zweiter Ableitungen von u wird nur in Ω , nicht auf dem Rand gefordert. Damit eine Randwertvorgabe

$$u = \varphi \quad \text{auf } \Gamma \quad (2.1b)$$

sinnvoll ist, muss die Stetigkeit von u auf $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ vorausgesetzt werden.

Die Kombination einer (elliptischen) Differentialgleichung (hier (2.1a)) mit einer Randbedingung (hier (2.1b)) nennt man *Randwertaufgabe*.

Definition 2.2 (harmonisch). u heißt harmonisch in Ω , falls u zu $C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ gehört und der Potentialgleichung (2.1a) genügt.

Dabei bezeichnen $C^0(D)$, $C^k(D)$ und $C^\infty(D)$ die Mengen der auf D stetigen, k -fach stetig differenzierbaren bzw. unendlich oft differenzierbaren Funktionen.

Im Allgemeinen kann man nicht erwarten, dass die Lösung von (2.1a,b) in $C^2(\overline{\Omega})$ liegt, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 2.3. Sei Ω das Quadrat $(0, 1) \times (0, 1)$ (vgl. Abbildung 1.3a). Die Randwerte seien $\varphi(x, y) = x^2$ für $(x, y) \in \Gamma$. Eine Lösung der Randwertaufgabe existiert, gehört aber nicht zu $C^2(\overline{\Omega})$.

Beweis. Die Existenz einer Lösung u wird später in Satz 7.21 behandelt werden. Wäre $u \in C^2(\overline{\Omega})$, so gälte $u_{xx}(x, 0) = \varphi_{xx}(x, 0) = 2$ für $x \in [0, 1]$ und insbesondere $u_{xx}(0, 0) = 2$. Aus dem analogen Resultat $u_{yy}(0, 0) = \varphi_{yy}(0, 0) = 0$ erhalte man $\Delta u(0, 0) = 2$ im Widerspruch zu $\Delta u = 0$ in Ω . ■

Im vorliegenden Fall kann man noch $u \in C^1(\overline{\Omega})$ zeigen. Dass auch diese Aussage im Allgemeinen falsch ist, beweist das nächste Beispiel, in dem Ω das sogenannte *L-Gebiet* aus Abbildung 2.1 ist.

Beispiel 2.4. Im Gebiet $\Omega = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \setminus [0, \frac{1}{2}) \times [0, \frac{1}{2})$ führe man Polarkoordinaten ein:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (2.2)$$

Die Funktion

$$u(r, \varphi) = r^{2/3} \sin((2\varphi - \pi)/3) \quad \pi/2 < \varphi < 2\pi$$

ist Lösung der Potentialgleichung (2.1a) und besitzt glatte Randwerte auf Γ (insbesondere gilt $u = 0$ auf $\Gamma_0 \subset \Gamma$). Trotzdem sind die ersten Ableitungen in $r = 0$ unbeschränkt, d.h. $u \notin C^1(\overline{\Omega})$.

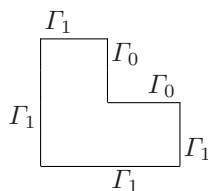


Abb. 2.1. L-Gebiet.

² Ω heißt zusammenhängend, wenn es für alle $x, y \in \Omega$ eine stetige Kurve in Ω gibt, die x mit y verbindet, d.h. $\gamma \in C([0, 1])$ mit $\gamma : s \in [0, 1] \mapsto \gamma(s) \in \Omega$ und $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$.

Beweis. Mit u_x und u_y müsste auch $u_r = u_x \cos \varphi + u_y \sin \varphi$ beschränkt sein. Jedoch gilt $u_r = \mathcal{O}(r^{-1/3})$ für $r \rightarrow 0$. Man verifiziert $\Delta u = 0$ mit Hilfe von (2.3). ■

Der Laplace-Operator ist gegen Translation, Spiegelung und Rotation invariant.

Übung 2.5. Seien $f \in C^2(\Omega)$ für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine unitäre Matrix (d.h. $UU^\top = I$). Dann beschreibt $\Phi(\mathbf{x}) := \mathbf{z} + U\mathbf{x}$ eine Kombination von Translation, Spiegelung und Rotation. Φ bildet Ω in $\Omega' := \{\mathbf{y} = \mathbf{z} + U\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \Omega\}$ ab. Die Umkehrfunktion ist $\Phi^{-1}(\mathbf{y}) = U^\top(\mathbf{y} - \mathbf{z})$. In Ω' wird die Funktion $F(\mathbf{y}) := f(\Phi^{-1}(\mathbf{y}))$ definiert. Man zeige: $\Delta F(\mathbf{y}) = (\Delta f)(\Phi^{-1}(\mathbf{y}))$.

Insbesondere folgt hieraus, dass harmonische Funktionen nach Translation, Spiegelung und Rotation harmonisch bleiben.

Übung 2.6. Man zeige: (a) Bezüglich der Polarkoordinaten (2.2) des \mathbb{R}^2 lautet der Laplace-Operator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (2.3)$$

(b) Bezüglich der drei-dimensionalen Polarkoordinaten

$$x = r \cos \varphi \sin \psi, \quad y = r \sin \varphi \sin \psi, \quad z = r \cos \psi$$

gilt

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin^2 \psi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \cot \psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right].$$

Im allgemeinen n -dimensionalen Fall führt die Transformation auf Polarkoordinaten zu

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} B,$$

wobei der sogenannte *Beltrami-Operator* B nur Ableitungen bezüglich der Winkelvariablen enthält.

2.2 Singularitätenfunktion

Als *Singularitätenfunktion* oder *Fundamentallösung*³ bezeichnet man die Funktion

$$s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} -\frac{1}{\omega_2} \log |\mathbf{x} - \mathbf{y}| & \text{für } n = 2, \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2-n} & \text{für } n > 2, \end{cases} \quad (2.4a)$$

von $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, wobei

$$\omega_n = 2 \Gamma(\tfrac{1}{2})^n / \Gamma(\tfrac{n}{2}), \quad (\Gamma: \text{Gammafunktion}) \quad (2.4b)$$

insbesondere $\omega_2 = 2\pi$, $\omega_3 = 4\pi$,

die Oberfläche der n -dimensionalen Einheitskugel ist. Mit

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

wird die *Euklidische Norm* des \mathbb{R}^n bezeichnet.

³ Genauer ist $s(\cdot, \cdot)$ die Singularitätenfunktion von $-\Delta$ (vgl. Fußnote 1).

Lemma 2.7. Für festes $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ löst $s(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ bezüglich \mathbf{x} die Potentialgleichung in $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{y}\}$.

Beweis. Ein direkter Beweis ist möglich. Einfacher führt man Polarkoordinaten mit \mathbf{y} als Zentrum ein und wendet (1.5) an, da $s(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ nur von $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ abhängt. ■

Es sei angemerkt, dass im Sinne der Distributionen $-\Delta_{\mathbf{x}} s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ gilt, wobei δ die Delta-Distribution ist. Diese Gleichung legt die Stärke der Singularität und die Skalierungskonstante fest.

Zur Vorbereitung des nächsten Satzes muss die Normalenableitung $\partial/\partial n$ eingeführt werden. Sei Ω ein Gebiet mit glattem Rand Γ . Der Vektor $\mathbf{n}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ bezeichnet die äußere Normalenrichtung in $\mathbf{x} \in \Gamma$, d.h. \mathbf{n} ist ein Einheitsvektor senkrecht zur Tangentialhyperbene in \mathbf{x} und zeigt nach außen (vgl. Abbildung 2.2). Die Normalenableitung von u in $\mathbf{x} \in \Gamma$ ist definiert als

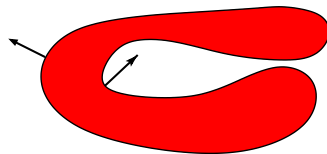


Abb. 2.2. Normalenrichtungen.

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} = \langle \mathbf{n}, \nabla u \rangle, \quad \text{wobei } \nabla u = \text{grad } u = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})^T$$

der Gradient von u und

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

das Skalarprodukt des \mathbb{R}^n sind. Im Falle der Kugel $K_R(\mathbf{y})$ (vgl. (2.8)) ist die Normalenrichtung radial. $\partial u/\partial n$ wird zu $\partial u/\partial r$ bezüglich $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, wenn man Polarkoordinaten mit Zentrum in \mathbf{y} verwendet. Da

$$\partial s(\mathbf{x}, \mathbf{y})/\partial r = -|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{1-n}/\omega_n,$$

folgt

$$\frac{\partial s(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n} = -\frac{R^{1-n}}{\omega_n} \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \partial K_R(\mathbf{y}). \quad (2.5)$$

Die erste Green'sche Formel (vgl. Green [96])

$$\int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \Delta v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \langle \nabla u(\mathbf{x}), \nabla v(\mathbf{x}) \rangle \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} u(\mathbf{x}) \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial n} \, d\Gamma \quad (2.6a)$$

gilt für $u \in C^1(\overline{\Omega})$, $v \in C^2(\overline{\Omega})$, wenn das Gebiet Ω geeignete Voraussetzungen erfüllt. Dabei bezeichnet $\int_{\partial\Omega} \dots \, d\Gamma$ das Oberflächenintegral.

Gebiete, für die (2.6a) gültig ist, heißen *Normalgebiete*. Hinreichende Bedingungen hierfür findet man in Kellogg [136, §IV] und Hellwig [120, Seite 11].

Funktionen $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ in einem Normalgebiet Ω erfüllen die *zweite Green'sche Formel*

$$\int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \Delta v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} v(\mathbf{x}) \Delta u(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \left[u(\mathbf{x}) \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial n} - v(\mathbf{x}) \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} \right] \, d\Gamma. \quad (2.6b)$$

Satz 2.8. Ω sei Normalgebiet, und $u \in C^2(\overline{\Omega})$ sei dort harmonisch. Dann gilt

$$u(\mathbf{y}) = \int_{\partial\Omega} \left[s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} - u(\mathbf{x}) \frac{\partial s(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_x} \right] \, d\Gamma_x \quad \text{für alle } \mathbf{y} \in \Omega. \quad (2.7)$$

Die Symbole $\frac{\partial}{\partial n_x}$ und $d\Gamma_x$ beziehen sich dabei auf die Variable \mathbf{x} .

Beweis. Mit

$$K_r(\mathbf{y}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < r\} \quad (2.8)$$

bezeichnen wir den Kreis (bzw. Kugel) um \mathbf{y} mit Radius r . Da die Singularitätenfunktion $s(\cdot, \mathbf{y})$ in $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ nicht differenzierbar ist, kann die Green'sche Formel nicht direkt angewandt werden. Sei

$$\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus \overline{K_\varepsilon(\mathbf{y})},$$

wobei ε so klein sei, dass $K_\varepsilon(\mathbf{y}) \subset \Omega$. Da Ω_ε wieder Normalgebiet ist, folgt aus $-\Delta u = -\Delta s = 0$ in Ω_ε (vgl. Lemma 2.7) und (2.6b) mit $v = s(\cdot, \mathbf{y})$, dass

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left[u(\mathbf{x}) \frac{\partial s(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_x} - s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} \right] d\Gamma_x = 0. \quad (2.9a)$$

Es ist $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \partial K_\varepsilon(\mathbf{y})$. In $\mathbf{x} \in \partial K_\varepsilon(\mathbf{y})$ unterscheiden sich jedoch die Normalenrichtungen von $\partial\Omega_\varepsilon$ und $\partial K_\varepsilon(\mathbf{y})$ durch das Vorzeichen. Gleiches gilt für die Normalenableitung, sodass sich das Integral aus (2.9a) zerlegen lässt in

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \dots = \int_{\partial\Omega} \dots - \int_{\partial K_\varepsilon(\mathbf{y})} \dots$$

Die Behauptung des Satzes wäre bewiesen, wenn $\int_{\partial K_\varepsilon(\mathbf{y})} \dots \rightarrow -u(\mathbf{y})$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ gezeigt werden könnte. $\partial u / \partial n$ ist auf $\partial K_\varepsilon(\mathbf{y})$ beschränkt, und $\int_{\partial K_\varepsilon(\mathbf{y})} s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma$ strebt wie $\mathcal{O}(\varepsilon |\log \varepsilon|)$ bzw. $\mathcal{O}(\varepsilon)$ gegen null, wie man aus (2.4) und

$$\int_{\partial K_\varepsilon(\mathbf{y})} d\Gamma = \varepsilon^{n-1} \omega_n \quad (2.9b)$$

abliest. Somit folgt

$$\int_{\partial K_\varepsilon(\mathbf{y})} s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} d\Gamma_x \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \quad (2.9c)$$

Aus (2.9b) und (2.5) schließt man

$$\int_{\partial K_\varepsilon(\mathbf{y})} u(\mathbf{y}) \frac{\partial s(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_x} d\Gamma_x = u(\mathbf{y}) \int_{\partial K_\varepsilon(\mathbf{y})} \frac{\partial s(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_x} d\Gamma_x = -u(\mathbf{y}). \quad (2.9d)$$

Die Stetigkeit von u in \mathbf{y} liefert

$$\left| \int_{\partial K_\varepsilon(\mathbf{y})} [u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})] \frac{\partial s(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_x} d\Gamma_x \right| \leq \max_{\mathbf{x} \in \partial K_\varepsilon(\mathbf{y})} |u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})| \rightarrow 0 \quad (2.9e)$$

für $\varepsilon \rightarrow 0$. (2.9c–e) zeigen $\int_{\partial K_\varepsilon(\mathbf{y})} [u \frac{\partial}{\partial n} s - s \frac{\partial}{\partial n} u] d\Gamma \rightarrow -u(\mathbf{y})$ ($\varepsilon \rightarrow 0$), sodass (2.9a) den Satz beweist. ■

Jede Funktion der Form

$$\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (2.10)$$

heißt *Grundlösung* (der Potentialgleichung) in Ω , wenn die Funktion $\Phi(\cdot, \mathbf{y})$ für festes $\mathbf{y} \in \Omega$ harmonisch in Ω ist und zu $C^2(\overline{\Omega})$ gehört.

Korollar 2.9. *Unter den Voraussetzungen von Satz 2.8 gilt für jede Grundlösung in Ω :*

$$u(\mathbf{y}) = \int_{\partial\Omega} \left[\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} - u(\mathbf{x}) \frac{\partial \gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_x} \right] d\Gamma_x \quad (\mathbf{y} \in \Omega). \quad (2.11)$$

Beweis. (2.6b) impliziert $\int_{\partial\Omega} [\Phi \partial u / \partial n - u \partial \Phi / \partial n] d\Gamma = 0$. ■

Wegen einer möglichen Abschwächung der Bedingung $\Phi = \gamma - s \in C^2(\overline{\Omega})$ zu $\Phi(\cdot, \mathbf{y}) \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ vergleiche man Hellwig [120, S. 34].

Übung 2.10 (Green-Funktion auf der Kugel). Es sei $\Omega = K_R(\mathbf{y})$. Man definiere

$$\gamma(\mathbf{x}, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{(n-2)\omega_n} \left[|\mathbf{x} - \xi|^{2-n} - \left(\frac{|\xi - \mathbf{y}|}{R} |\mathbf{x} - \xi'| \right)^{2-n} \right] & \text{für } n \geq 3, \\ -\frac{1}{2\pi} \left[\log |\mathbf{x} - \xi| - \log \left(\frac{|\xi - \mathbf{y}|}{R} |\mathbf{x} - \xi'| \right) \right] & \text{für } n = 2, \end{cases} \quad (2.12)$$

mit $\mathbf{x}, \xi \in \Omega$, $\xi' = \mathbf{y} + R^2 |\xi - \mathbf{y}|^{-2} (\xi - \mathbf{y})$ und zeige:

- (a) $\gamma(\mathbf{x}, \xi) = 0$ für $\xi \in \partial\Omega \setminus \{\mathbf{x}\}$,
- (b) γ ist Grundlösung in Ω ,
- (c) $\gamma(\mathbf{x}, \xi) = \gamma(\xi, \mathbf{x})$,
- (d) auf der Kugeloberfläche $\Gamma = \partial K_R(\mathbf{y})$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial n_\xi} \gamma(\mathbf{x}, \xi) = \frac{\partial}{\partial n_\xi} \gamma(\xi, \mathbf{x}) = -\frac{1}{R\omega_n} \frac{R^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{|\mathbf{x} - \xi|^n} \quad (\xi \in \Gamma).$$

2.3 Mittelwerteigenschaft und Maximumprinzip

Definition 2.11 (Mittelwerteigenschaft). *Eine Funktion u besitzt die Mittelwerteigenschaft in Ω , falls $u \in C^0(\overline{\Omega})$ und falls für alle $\mathbf{x} \in \Omega$ und alle $R > 0$ mit $K_R(\mathbf{x}) \subset \Omega$ die Darstellung*

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial K_R(\mathbf{x})} u(\xi) d\Gamma_\xi \quad (2.13)$$

gültig ist.

Da $\int_{\partial K_R(\mathbf{x})} d\Gamma = \omega_n R^{n-1}$, ist die rechte Seite in (2.13) der über die Kugeloberfläche gemittelte Wert von u . Eine äquivalente Charakterisierung ergibt sich, wenn man über die Kugel $K_R(\mathbf{x})$ mittelt.

Übung 2.12. $u \in C^0(\overline{\Omega})$ besitzt die zweite Mittelwerteigenschaft in Ω , wenn

$$u(\mathbf{x}) = \frac{n}{R^n \omega_n} \int_{K_R(\mathbf{x})} u(\xi) d\xi \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \Omega, R > 0 \quad \text{mit } K_R(\mathbf{x}) \subset \Omega.$$

Man zeige, dass die zweite Mittelwerteigenschaft äquivalent zur Mittelwerteigenschaft (2.13) ist. *Hinweis:*

$$\int_{K_R(\mathbf{x})} u(\xi) d\xi = \int_0^R \left(\int_{\partial K_r(\mathbf{x})} u(\xi) d\Gamma_\xi \right) dr. \quad (2.14)$$

Funktionen mit der Mittelwerteigenschaft erfüllen ein Maximumprinzip, wie es aus der Funktionentheorie für den Absolutbetrag holomorpher Funktionen bekannt ist.

Satz 2.13 (Maximum-Minimum-Prinzip). *Ω sei ein Gebiet und $u \in C^0(\Omega)$ sei eine nichtkonstante Funktion, die die Mittelwerteigenschaft besitzt. Dann nimmt u in Ω weder ein Maximum noch Minimum an.*

Beweis. (i) Es genügt, den Fall des Maximums zu untersuchen, da ein Minimum von u ein Maximum von $-u$ ist und $-u$ ebenfalls die Mittelwerteigenschaft besitzt.

(ii) Zur indirekten Beweisführung nehmen wir an, es gäbe ein Maximum in $\mathbf{y} \in \Omega$:

$$u(\mathbf{y}) = M \geq u(\mathbf{x}) \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \Omega.$$

In (iii) werden wir $u(\mathbf{y}') = M$ für beliebiges $\mathbf{y}' \in \Omega$ zeigen, d.h. $u \equiv M$ im Widerspruch zur Voraussetzung $u \not\equiv \text{const.}$

(iii) Beweis von $u(\mathbf{y}') = M$. Sei $\mathbf{y}' \in \Omega$. Da Ω zusammenhängend ist, existiert eine in ω verlaufende Verbindung von \mathbf{y} und \mathbf{y}' , d.h. es gibt ein stetiges $\varphi : [0, 1] \rightarrow \Omega$ mit $\varphi(0) = \mathbf{y}$ und $\varphi(1) = \mathbf{y}'$. Wir setzen

$$I := \{s \in [0, 1] : u(\varphi(t)) = M \text{ für alle } 0 \leq t \leq s\}.$$

I enthält mindestens 0 und ist abgeschlossen, da u und φ stetig sind. Damit existiert $s^* = \max\{s \in I\}$, und die Definition von I zeigt $I = [0, s^*]$. In (iv) wird $s^* = 1$ nachgewiesen, sodass $\mathbf{y}' = \varphi(1) \in I$ und somit $u(\mathbf{y}') = M$ folgt.

(iv) Beweis von $s^* = 1$. Die gegenteilige Annahme $s^* < 1$ kann zum Widerspruch geführt werden, indem $u(\mathbf{x}) = M$ in einer Umgebung von $\mathbf{x}^* := \varphi(s^*)$ nachgewiesen wird. Da $\mathbf{x}^* \in \Omega$, existiert $R > 0$ mit $K_R(\mathbf{x}^*) \subset \Omega$. Offenbar folgt $u = M$ in $K_R(\mathbf{x}^*)$, wenn $u = M$ auf $\partial K_r(\mathbf{x}^*)$ für alle $0 < r \leq R$ gezeigt wird.

(v) Beweis von $u = M$ auf $\partial K_r(\mathbf{x}^*)$. Gleichung (2.13) ausgewertet in \mathbf{x}^* lautet

$$M = u(\mathbf{x}^*) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial K_r(\mathbf{x}^*)} u(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma_{\boldsymbol{\xi}}.$$

Generell gilt $u(\boldsymbol{\xi}) \leq M$. Wäre $u(\boldsymbol{\xi}') < M$ für ein $\boldsymbol{\xi}' \in \partial K_R(\mathbf{x}^*)$ und damit $u < M$ in einer Umgebung von $\boldsymbol{\xi}'$, ergäbe sich auf der rechten Seite ein Mittelwert kleiner als M . Dies beweist $u = M$ auf $\partial K_R(\mathbf{x}^*)$. ■

Einfache Folgerungen aus Satz 2.13 enthält der folgende Zusatz.

Korollar 2.14. *Ω sei beschränkt. (a) Eine Funktion mit Mittelwerteigenschaft nimmt ihr Maximum und Minimum auf $\partial\Omega$ an.*

(b) Stimmen zwei Funktionen mit Mittelwerteigenschaft auf dem Rand $\partial\Omega$ überein, so sind sie identisch.

Beweis. (a) Die Extrema werden auf $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ angenommen, da $\overline{\Omega}$ kompakt ist. Ω kommt nach Satz 2.13 für ein Extremum nicht in Frage, wenn u nicht auf einer Zusammenhangskomponente von Ω konstant ist. Aber auch in diesem Fall ist die Behauptung offensichtlich.

(b) Erfüllen u und v mit $u = v$ auf $\partial\Omega$ die Mittelwerteigenschaft, so ist diese auch für $w := u - v$ erfüllt. Da $w = 0$ auf $\partial\Omega$, zeigt Teil (a), dass $\max w = \min w = 0$. Also gilt $u = v$ in Ω . ■

Lemma 2.15. *Harmonische Funktionen besitzen die Mittelwerteigenschaft.*

Beweis. Sei u harmonisch in Ω und $\mathbf{y} \in K_R(\mathbf{y}) \subset \Omega$. Wir wenden die Darstellung (2.7) für $K_R(\mathbf{y})$ anstelle von Ω an. Der konstante Wert von $s(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ auf $\partial K_R(\mathbf{y})$ sei mit $\sigma(R)$ bezeichnet. Wegen (2.5) wird Gleichung (2.7) zu

$$u(\mathbf{y}) = \sigma(R) \int_{\partial K_R(\mathbf{y})} \frac{\partial u(\boldsymbol{\xi})}{\partial n} d\Gamma + \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial K_R(\mathbf{y})} u(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma.$$

Die Gleichung stimmt mit (2.13) überein, wenn das erste Integral verschwindet. Letzteres folgt aus dem nächsten Lemma. ■

Lemma 2.16. *Sei $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch in einem Normalgebiet Ω . Dann gilt*

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = 0.$$

Beweis. Man verwende die Green'sche Formel (2.6a) mit 1 und u statt u und v . ■

Lemma 2.15, Satz 2.13 und Korollar 2.14 ergeben die nächsten Sätze 2.17 und 2.18.

Satz 2.17 (Maximum-Minimum-Prinzip für harmonische Funktionen). *Die Funktion u sei harmonisch im Gebiet Ω und nicht konstant. Dann existiert kein Maximum und kein Minimum in Ω .*

Satz 2.18 (Eindeutigkeit). *Ω sei beschränkt. Eine in Ω harmonische Funktion nimmt ihr Maximum und Minimum auf $\partial\Omega$ an und ist durch die Werte auf $\partial\Omega$ eindeutig bestimmt.*

Übung 2.19. Ω sei beschränkt. u_1 und u_2 seien harmonisch in Ω mit Randwerten φ_1 und φ_2 auf $\Gamma = \partial\Omega$. Man beweise: (a) $\varphi_1 \leq \varphi_2$ auf Γ impliziert $u_1 \leq u_2$ in Ω . (b) Ist außerdem Ω zusammenhängend und gilt $\varphi_1(\mathbf{x}) < \varphi_2(\mathbf{x})$ in mindestens einem Punkt $\mathbf{x} \in \Gamma$, so folgt $u_1 < u_2$ überall in Ω .

Die Darstellung (2.13) von $u(\mathbf{y})$ durch die Werte auf $\partial K_R(\mathbf{y})$ ist ein Spezialfall der folgenden Formel, die am Ende dieses Abschnittes bewiesen werden wird und für $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ die Gleichung (2.13) liefert.

Satz 2.20 (Poisson'sche Integralformel). *Seien $\varphi \in C^0(\partial K_R(\mathbf{y}))$ und $n \geq 2$. Die Lösung der Randwertaufgabe*

$$-\Delta u = 0 \quad \text{in } K_R(\mathbf{y}), \quad u = \varphi \quad \text{auf } \partial K_R(\mathbf{y}),$$

ist gegeben durch die Funktion

$$u(\mathbf{x}) = \frac{R^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{R\omega_n} \int_{\partial K_R(\mathbf{y})} \frac{\varphi(\boldsymbol{\xi})}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^n} d\Gamma_{\boldsymbol{\xi}} \quad \text{für } \mathbf{x} \in K_R(\mathbf{y}), \quad (2.15)$$

die zu $C^\infty(K_R(\mathbf{y})) \cap C^0(\overline{K_R(\mathbf{y})})$ gehört.

Die Mittelwerteigenschaft setzt nur die Stetigkeit $u \in C^0(\overline{\Omega})$ voraus, während harmonische Funktionen zu $C^2(\Omega)$ gehören. Um so erstaunlicher ist die folgende Aussage.

Satz 2.21. *Eine Funktion ist genau dann harmonisch in Ω , wenn sie dort die Mittelwerteigenschaft besitzt.*

Beweis. Wegen Lemma 2.15 bleibt zu zeigen, dass eine Funktion v mit Mittelwerteigenschaft harmonisch ist. Sei $\mathbf{x} \in K_R(\mathbf{x}) \subset \Omega$ beliebig vorgegeben. Nach Satz 2.20 existiert eine in $K_R(\mathbf{x})$ harmonische Funktion u mit

$$-\Delta u = 0 \quad \text{in } K_R(\mathbf{y}), \quad u = v \quad \text{auf } \partial K_R(\mathbf{y}).$$

Gemäß Lemma 2.15 besitzt u ebenso wie v die Mittelwerteigenschaft, und Korollar 2.14b beweist $u = v$ in $K_R(\mathbf{x})$, d.h. v ist in $K_R(\mathbf{x})$ harmonisch. Da $K_R(\mathbf{x}) \subset \Omega$ beliebig, ist v in Ω harmonisch. ■

Eine wichtige Anwendung des Satzes 2.21 ist die folgende (vgl. Harnack [119, §20]).

Satz 2.22. *Sei u_1, u_2, \dots eine Folge von in Ω harmonischen Funktionen, die auf Γ gleichmäßig konvergieren. Dann ist $u = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k$ harmonisch in Ω .*

Beweis. Die gleichmäßige Konvergenz auf Γ impliziert gleichmäßige Konvergenz in $\overline{\Omega}$ (vgl. Satz 2.17). Folglich ist die Grenzfunktion stetig: $u \in C^0(\overline{\Omega})$. Der Limesprozess angewandt auf

$$u_k(\mathbf{x}) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial K_R(\mathbf{x})} u_k(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma_{\boldsymbol{\xi}}$$

liefert Gleichung (2.13) für u ; d.h. u besitzt die Mittelwerteigenschaft. Nach Satz 2.21 ist u auch harmonisch in Ω . ■

Im Falle von $n = 2$ ist in Beispiel 1.3 der Zusammenhang mit holomorphen Funktionen hergestellt worden. Tatsächlich ist u für alle n analytisch, d.h. in der Umgebung jedes $\mathbf{x} \in \Omega$ existiert eine konvergente Potenzreihenentwicklung. Der folgende Satz wird z.B. in Hellwig [120, Seite 93] bewiesen.

Satz 2.23. *Eine in Ω harmonische Funktion ist dort analytisch.*

Es bleibt der Beweis der Poisson'schen Integralformel nachzutragen.

Beweis zu Satz 2.20. (a) Zunächst ist zu zeigen, dass u aus (2.15) eine in $K_R(\mathbf{y})$ harmonische Funktion ist, d.h. $\Delta u = 0$ erfüllt. Da der Integrand zweimal stetig differenzierbar und der Integrationsbereich $\Gamma = \partial K_R(\mathbf{y})$ kompakt ist, darf der Laplace-Operator unter das Integralzeichen gezogen werden:

$$\Delta u(\mathbf{x}) = \frac{1}{R \omega_n} \int_{\Gamma} \varphi(\boldsymbol{\xi}) \Delta_{\mathbf{x}} \frac{R^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^{-n}} d\Gamma_{\boldsymbol{\xi}} \quad \text{für } \mathbf{x} \in K_R(\mathbf{y}). \quad (2.16)$$

Gemäß Übung 2.10 gibt es eine Grundlösung $\gamma(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$, sodass

$$\frac{R^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^n R \omega_n} = -\frac{\partial \gamma(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial n_{\boldsymbol{\xi}}} = -\frac{\partial \gamma(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})}{\partial n_{\boldsymbol{\xi}}} \quad \text{für } \boldsymbol{\xi} \in \Gamma, \mathbf{x} \in K_R(\mathbf{y}). \quad (2.17)$$

Aus

$$\Delta_x \frac{\partial \gamma}{\partial n_\xi} = \frac{\partial}{\partial n_\xi} \Delta_x \gamma(\mathbf{x}, \xi) = 0$$

und (2.16) schließt man $-\Delta u = 0$.

(b) Die Darstellung (2.15) definiert $u(\mathbf{x})$ zunächst nur für $\mathbf{x} \in K_R(\mathbf{y})$. Es bleibt noch zu zeigen, dass u eine stetige Fortsetzung auf dem Abschluss $\overline{K_R(\mathbf{y})} = K_R(\mathbf{y}) \cup \Gamma$ besitzt (d.h. $u \in C^0(\overline{K_R(\mathbf{y})})$) und dass die stetig fortgesetzten Werte mit den Randwerten φ übereinstimmen:

$$\lim_{K_R(\mathbf{y}) \ni \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}} u(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{z}) \quad \text{für } \mathbf{z} \in \Gamma. \quad (2.18)$$

Wegen Gleichung (2.17) liefert Korollar 2.9 für die Wahl $u \equiv 1$ die Identität

$$\frac{R^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{R\omega_n} \int_{\Gamma} \frac{d\Gamma_\xi}{|\mathbf{x} - \xi|^n} = 1 \quad \text{für } \mathbf{x} \in K_R(\mathbf{y}). \quad (2.19)$$

Sei $\mathbf{z} \in \Gamma$ beliebig. Dank Gleichung (2.19) lässt sich schreiben:

$$u(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{z}) = \frac{R^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{R\omega_n} \int_{\Gamma} \frac{u(\xi) - \varphi(\mathbf{z})}{|\mathbf{x} - \xi|^n} d\Gamma_\xi. \quad (2.20a)$$

Wir definieren $\Gamma_0 = \Gamma \cap K_\rho(\mathbf{z})$, $\Gamma_1 = \Gamma/\Gamma_0$ (siehe Abbildung 2.3) und zerlegen den Ausdruck (2.20a) in $u(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{z}) = I_0 + I_1$, wobei

$$I_i = \frac{R^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{R\omega_n} \int_{\Gamma_i} \frac{u(\xi) - \varphi(\mathbf{z})}{|\mathbf{x} - \xi|^n} d\Gamma_\xi \quad \text{für } i = 0, 1.$$

Da

$$\left| \int_{\Gamma_0} \frac{u(\xi) - \varphi(\mathbf{z})}{|\mathbf{x} - \xi|^n} d\Gamma_\xi \right| \leq \max_{\xi \in \Gamma_0} |u(\xi) - \varphi(\mathbf{z})| \int_{\Gamma_0} \frac{d\Gamma_\xi}{|\mathbf{x} - \xi|^n} \\ \leq \max_{\xi \in \Gamma_0} |u(\xi) - \varphi(\mathbf{z})| \int_{\Gamma} \frac{d\Gamma_\xi}{|\mathbf{x} - \xi|^n},$$

folgt aus Gleichung (2.19), dass

$$I_0 \leq \max_{\xi \in \Gamma_0} |u(\xi) - \varphi(\mathbf{z})|. \quad (2.20b)$$

Wegen der Stetigkeit von φ kann $\rho > 0$ so gewählt werden, dass

$$I_0 \leq \varepsilon/2 \quad (2.20c)$$

für vorgegebenes $\varepsilon > 0$. Man setze $C_\varphi := \max_{\xi \in \Gamma} |\varphi(\xi)|$ und wähle $\mathbf{x} \in K_R(\mathbf{y})$ so nah an \mathbf{z} , dass

$$|\mathbf{x} - \mathbf{z}| \leq \delta(\varepsilon) := \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\rho}{2}\right)^n \frac{1}{4C_\varphi R^{n-1}}$$

und $|\mathbf{x} - \mathbf{z}| \leq \rho/2$. Die letzte Ungleichung impliziert

$$|\mathbf{x} - \xi| \geq \frac{\rho}{2} \quad \text{für } \xi \in \Gamma_1 \quad (\text{siehe Abbildung 2.3}).$$

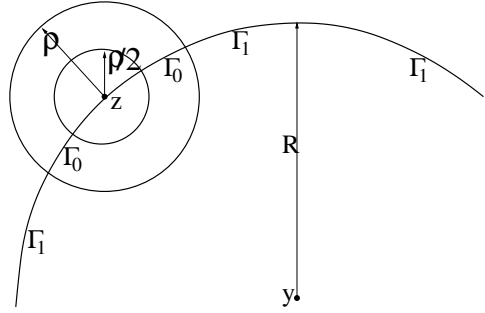


Abb. 2.3. Γ und die Kreise $K_\rho(\mathbf{z})$, $K_{\rho/2}(\mathbf{z})$.

Theorie und Numerik elliptischer
Differentialgleichungen

Hackbusch, W.

2017, XIII, 400 S. 51 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-15357-1