

2 Grundlegendes und Forschungsevidenz

Um zwei- bzw. dreistellige Zahlen addieren und subtrahieren zu können, bedarf es zweier grundlegender Konzepte. Neben einem Wissen über das Addieren und Subtrahieren von (einstelligen) Zahlen und der dabei geltenden (Rechen-) Gesetze ist ein gesichertes Verständnis von Zahlen, insbesondere von Stellenwert, unabdingbar (VERSCHAFFEL, GREER & DE CORTE, 2007, S. 566). Das Verständnis von Zahlen ist eng mit dem Wissen über Rechenoperationen verknüpft. Sie beeinflussen einander gegenseitig. Ausgehend von einem (objektiv) notwendigen mathematischen Verständnis und dessen (individueller) Entwicklung wird in den folgenden Abschnitten auf Basis vorhandener Forschungsevidenz geklärt und erörtert, welche Bedeutung bzw. Stellung das Verständnis (understanding) und das Ausführen (procedure) von Additions- und Subtraktionsaufgaben haben bzw. welche Zusammenhänge bzw. wechselseitigen Abhängigkeiten bestehen. Dazu werden in diesem Kapitel bezüglich Zahlen (Abschnitt 2.1), Rechenoperationen (Abschnitt 2.2) und Fehlern (Abschnitt 2.3) grundlegende Begriffe geklärt, vorhandene Forschungsbefunde referiert und auf das vorliegende Forschungsprojekt bezogen. Längsschnittstudien über arithmetische Entwicklungsverläufe (Abschnitt 2.4) und eine Zusammenfassung über forschungsmethodische Vorgehensweisen und Folgerungen aus den vorliegenden evidenzbasierten Erkenntnissen (Abschnitt 2.5) schließen das Kapitel.

2.1 Zahlen und deren Strukturen

Grundlage jeden Rechnens ist ein Zahlverständnis, um zwei- bis dreistellige Zahlen bzw. in weiterer Folge mehrstellige Zahlen und ihre Eigenschaften zu verstehen, damit darauf aufbauend Additionen und Subtraktionen gelöst werden können. Vor allem dem Stellenwertverständnis kommt hierbei besondere Bedeutung zu.

2.1.1 Dekadisches Stellenwertsystem

Mit dem dekadischen Stellenwertsystem ist im Laufe der Jahrtausende eine Zehnerschrift gelungen, die beliebig große Zahlen nach einem einfachen Regelwerk darstellt. Nachfolgend werden die zentralen Eigenschaften angeführt (MOSER OPITZ, 2007, S. 90; PADBERG & BENZ, 2011, S. 82 f.; ROSS, 1989, S. 47; SCHÄFER, 2005, S. 76).

- Bündelung (Base-ten property): Die Ziffer gibt die Anzahl der Bündel der jeweiligen Mächtigkeit und somit den Zahlenwert der Ziffer an.

- Stellenwert (Positional property): Die Stellung der Ziffer innerhalb der Zahl gibt die Mächtigkeit des zugehörigen Bündels und somit den Stellenwert der Ziffer an. Die Quantität, die eine einzelne Ziffer innerhalb einer mehrstelligen Zahl repräsentiert, wird durch ihre Position innerhalb dieser Zahl bestimmt. Die Werte der Positionen erhöhen sich um das Zehnfache von rechts nach links.
- Multiplikative Verknüpfung (Multiplicative property): Die Größe bzw. der ‚Gesamtwert‘ einer bestimmten Stelle (z. B. der „4“ innerhalb der Zahl 458) wird ermittelt, indem der Zahlenwert dieser Ziffer (4) mit dem durch ihre Position (Stellenwert der Ziffer) festgelegten Wert (100) multipliziert wird (4-mal 100, also 400).
- Additive Verknüpfung (Additive property): Die Quantität einer mehrstelligen Zahl ist gleich der Summe der Werte, die durch ihre Stellen dargestellt werden (im Beispiel von oben: $458 = 400 + 50 + 8$).

2.1.2 Zahlverständnis

Nach GERSTER und SCHULTZ (2004, S. 241) setzt sich das Zahlverständnis „aus den *Bedeutungen* einer Zahl und ihren *Beziehungen* zu anderen Zahlen“ (GERSTER & SCHULTZ, 2004, S. 241 [Hervorhebung im Original]) zusammen. Vorstellungen zur Bedeutung einer Zahl (Ziffer und Zahlwörter), ebenso ein Verständnis von Zahl- und Aufgabenbeziehungen, entwickelt das Kind bei der Arbeit mit Zahlen, insbesondere beim Rechnen. Ausgehend von der Interpretation von GERSTER und SCHULTZ (2004, S. 241) wird in der vorliegenden Arbeit als leitender Begriff *Zahlverständnis* (als Oberbegriff) verwendet, der die Begriffe *Zahlvorstellungen* und *Zahl- und Aufgabenbeziehungen* subsumiert.

Zahlverständnis – Zahlensinn – Zahlenblick

Der im kognitionspsychologischen, entwicklungspsychologischen und fachdidaktischen Sprachgebrauch etablierte Begriff ‚Zahlensinn‘, ‚number sense‘, aber auch ‚Zahlengefühl‘ wird unterschiedlich interpretiert. Einerseits wird darunter die angeborene Fähigkeit basaler mathematischer Vorstellungen (z. B. DEHAENE, 1999), andererseits jedoch auch die später erlernte Fähigkeit eines flexiblen Umgangs mit Zahlen (z. B. LORENZ, 1997, S. 94) verstanden (siehe dazu RECHTSTEINER-MERZ, 2013, S. 98). ‚Number sense‘ bzw. ‚Zahlensinn‘ umfasst Bezüge zu Zahlen (SCHIPPER, 2009a, S. 76), oft auch mit der Erweiterung zum Rechnen (SÖBBEKE, 2006) und auch im Sachkontext (MC INTOSH et al., 1992, zit. nach VERSCHAFFEL, GREER & DE CORTE, 2007, S. 581).

Wird Zahlensinn mit einem vertieften Verständnis von Zahlen gleichgesetzt und damit mit der Fähigkeit, beim Rechnen flexibel vorzugehen, so entspricht dies der Definition von Zahlenblick (RECHTSTEINER-MERZ, 2013, S. 99). Wie semantisch determiniert, geht es um den ‚Blick‘ auf die Zahlen, insbesondere beim Rechnen. Der Zahlenblick impliziert „Kenntnisse über Zahleigenschaften und -beziehungen, Kenntnisse über Aufgabeneigenschaften und -beziehungen sowie metakognitive Kompetenzen“ (RATHGEB-SCHNIERER, 2010, S. 262), sodass leichter verallgemeinerbare Aspekte in Situationen erkannt, Strukturähnlichkeiten zwischen bereits gelösten und neuen Aufgaben entdeckt und strategische Vorgehensweisen übertragen werden können (SCHÜTTE, 2008, S. 103; siehe dazu auch RECHTSTEINER-MERZ, 2013, S. 99 f.). In der vorliegenden Arbeit wird der Begriff „Zahlenblick“ von RATHGEB-SCHNIERER (2010, S. 262) und SCHÜTTE (2004) übernommen, während aufgrund der sehr unterschiedlichen Definitionen von ‚Zahlensinn‘ der Begriff *Zahlverständnis*, welcher *Zahlvorstellungen* und *Zahl- und Aufgabenbeziehungen* inkludiert, kohärenter erscheint und daher weiterführend eingesetzt wird.

Zahlvorstellungen

Zahlvorstellungen basieren auf „grundlegenden Zahldarstellungen“ (WITTMANN, 1999, S. 92) verknüpft mit Zahlwort und Zahlzeichen. Gesicherte Beziehungen zwischen Zahlwort, Zahlzeichen und Mengenvorstellung sind die Basis jeglicher Kommunikation über Zahlen (GRASSMANN, EICHLER, MIRWALD & NITSCH, 2010). GERSTER und SCHULTZ (2004, S. 101) beziehen die Idee einer motorischen Zählprozedur oder das Aufsagen eines Abschnitts der Zahlwortreihe als „Vorstellungen“ (GERSTER & SCHULTZ, 2004, S. 101) zu Zahlwörtern und Ziffern zusätzlich mit ein.

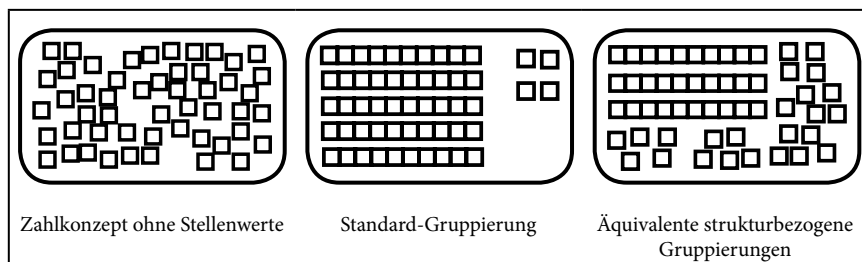


Abbildung 1: Vorstellungen von Zahlen im dekadischen System, dargestellt am Beispiel von 54

Eine *einzelne Zahl* kann auch als eine Beziehung – oder Relation – zwischen Zahlen gedeutet werden, wenn die Zahl als Zusammensetzungen aus anderen Zahlen

verstanden wird (Teile-Ganzes-Beziehung). Die Zahl kann diskret oder strukturbezogen zerlegt und wieder zusammengefügt werden. Zahlverständnis im Sinne von Zahlvorstellungen und Zahlbeziehungen bedeutet daher unter anderem, eine Zahl als Gesamtes von Einzelnen und als „Zusammengesetztheit aus Zahlen“ (GAIDOSCHIK, 2010, S. 118) zu sehen, um im größeren Zahlenraum in die jeweiligen Stellenwerte (Standardzerlegung), aber auch in weitere Nicht-Standard-Zerlegungen zerlegen bzw. zusammensetzen zu können (Abbildung 1). Die Fähigkeit, Zahlen geschickt zu zerlegen, insbesondere in Zehner und Einer, ist eine entscheidende Voraussetzung, damit Kinder passende Lösungsmethoden beim Addieren und Subtrahieren mehrstelliger Zahlen praktizieren können. Nicht-Standard-Zerlegungen sind besonders bei Multiplikation und Division erforderlich, aber auch um Rechenvorteile beim Addieren und Subtrahieren anwenden zu können (GERSTER & SCHULTZ, 2004, S. 82 ff.; SCHÄFER, 2005, S. 185; VAN DE WALLE, 2004, S. 179).

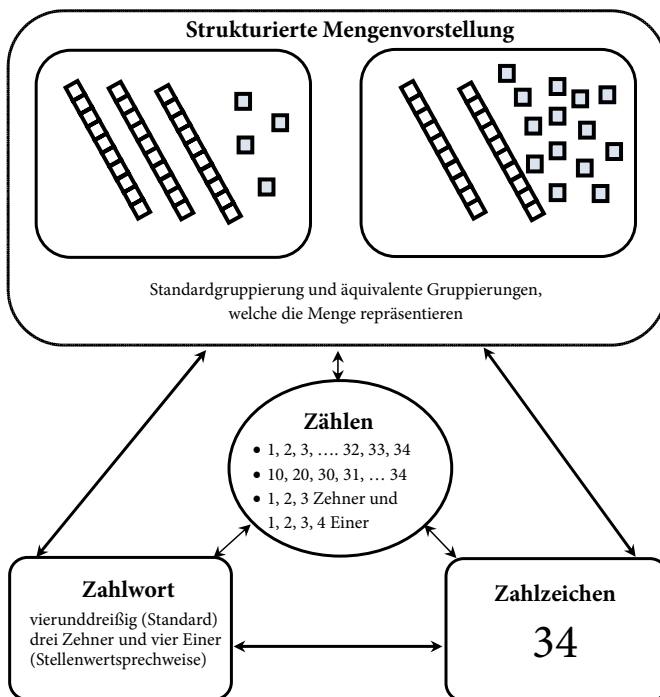


Abbildung 2: Triade Zahlwort, Zahlzeichen und Mengenvorstellung (nach GERSTER & SCHULTZ, 2004, S. 83; VAN DE WALLE, 2004, S. 181)

Besonders wichtig ist das Verständnis der Beziehung zwischen einer gebündelten dekadischen Einheit zu Einzelnen bzw. den niedrigeren dekadischen Einheiten. Die Beziehung zwischen 10 als Einheit zu 10 Einzelnen wird als „Zehnheit“ (GERSTER & SCHULTZ, 2004, S. 89) bzw. „tenness“ (COBB & WHEATLEY, 1988) bezeichnet. Der gebündelte Zehner (z. B. in Form einer Zehnerstange) soll nicht nur als Zehner gesehen, sondern auch in 10 Einer zerlegt bzw. reversibel verknüpft werden. Auf Basis dieser Einsicht (auf der abstrakten Ebene) sind Bündelungen bzw. Entbündelungen bei Zehnerübergängen erst möglich.

Eine beziehungsreiche Vorstellung einer Zahl und ihres Stellenwerts integriert drei Komponenten, nämlich das Zahlwort (number word), das Zahlzeichen (number mark) und das Konzept einer Quantität (quantity) in Form einer strukturierten Mengenvorstellung. Gesicherte Zahlvorstellungen sind vorhanden, wenn Kinder in jegliche Richtung diese drei Komponenten auffassen und darstellen können (Abbildung 2).

Zählen ist eine Schlüsselaktivität, durch welche Kinder diese drei Aspekte entwickeln und von Anfang an in Präkonzepte von Stellenwert integrieren. Bevor Kinder ein Stellenwertkonzept erwerben, gründet ihr Zahlverständnis auf einerweisem Abzählen einer ansonsten ungegliederten Menge diskreter, gleicher Elemente. Erkennen die Kinder mehrstellige Zahlen als die Folge verschiedener Stellenwerte (*Sequence tens and ones conception* – Abbildung 3), ist ein Zählen in Gruppen und Einzelnen (10, 20, 30, 31, ... 34, siehe Abbildung 2) möglich. Verstehen die Kinder, dass mehrstellige Zahlen aus unterschiedlichen, eigenständigen Arten von Einheiten, nämlich Einer, Zehner, Hunderter ..., zusammengesetzt sind (*Separate tens and ones conception* – Abbildung 3), können die einzelnen Stellen bzw. Einheiten getrennt voneinander abgezählt werden. Als eigene Einheiten können sie wie die Einer abstrakt mit „eins, zwei, drei ...“ gezählt werden und mit dem jeweiligen Stellenwert verbunden werden (1, 2, 3 Zehner und 1, 2, 3, 4 Einer, siehe Abbildung 2).

Im Fokus der vorliegenden Studie, die auf das Nachvollziehen der Entwicklung von Lösungswegen abzielt, steht die Verbindung zwischen *Zahlzeichen* und der strukturierten Mengenvorstellung, dem individuellen Konzept der Quantität, im Vordergrund, welche beim Rechnen und daher für diese Arbeit primär relevant ist. Weitere Verbindungen bezüglich Zahlwort, Zahlzeichen und Quantität werden nicht angeführt, weil sie den Rahmen der vorliegenden Arbeit übersteigen würden (siehe dazu nähere Ausführungen bei GERSTER & SCHULTZ, 2004; PADBERG & BENZ, 2011; MOSER OPITZ, 2007; SCHÄFER, 2005; SCHIPPER, 2009a).

In der vorliegenden Arbeit kommt dem Verständnis von Stellenwert besondere Bedeutung zu. Deshalb werden nachfolgend zwei Modelle von Phasen der Entwicklung des Stellenwertverständnisses referiert (Tabelle 1). FUSON, WEARNE, HIEBERT, MURRAY, HUMAN, OLIVIER, CARPENTER und FENNEMA (1997, S. 141)

beschreiben im *UDSSI-Triad-Modell* (unitary, decade, sequence, separate, integrated) fünf Phasen, bis ein gesichertes Stellenwertverständnis erreicht wird (siehe dazu auch BENZ, 2005, S. 71 f.; SCHIPPER, 2009a, S. 119 f.; VERSCHAFFEL, GREER & DE CORTE, 2007, S. 567). Ein weiteres Entwicklungsmodell findet sich bei ROSS (1989, S. 49). Auch sie geht evidenzbasiert (60 Kinder – Aufgaben zum Zahl- bzw. Stellenwertverständnis) davon aus, dass in fünf Phasen das Stellenwertverständnis erworben wird (siehe dazu auch GERSTER & SCHULTZ, 2004; MOSER OPITZ, 2007, S. 90; SCHÄFER, 2005, S. 88 f.). Phase 1 und Phase 5 haben zwar unterschiedliche Bezeichnungen, sind jedoch bei beiden Modellen substantiell ident, die Phasen 2 bis 4 unterscheiden sich auch inhaltlich (Tabelle 1 – getrennt durch Linie).

Phase	FUSON et al. (1997)	ROSS (1989)
1	Unitary Multidigit conception	– whole numeral
2	Decade and Ones conception	positional property
3	Sequence tens and ones conception	face value
4	Separate tens and ones conception	construction zone
5	Integrated sequence-separate conception	– understanding

Tabelle 1: Phasen bei der Entwicklung des Stellenwertkonzepts

In Phase 1, der „unitary multidigit conception“ (FUSON, et al., 1997, S. 140) bzw. „whole numeral“ (ROSS, 1989, S. 49) werden zwei- (bzw. mehr-)stellige Zahlen gesamt, ohne jeglichen Bezug zu einer Bündelung, gesehen. Dies entspricht einem Zahlkonzept ohne Stellenwert.

ROSS (1989) beschreibt in Phase 2, „positional property“ (ROSS, 1989, S. 49), dass Zehnerzahl und Einerzahl als einzelne Bestandteile realisiert werden, deren Verständnis eher nur mit Material gelingt (Tabelle 1). In Phase 3, „face value“ (ROSS, 1989, S. 49), wird der „Eigenwert der Ziffern“ (SCHÄFER, 2005, S. 88), nämlich der Stellenwert, erkannt. Die Zahl kann in die einzelnen Stellenwerte, die quantitativ unterschieden werden, zerlegt, aber nicht zueinander in Beziehung gebracht werden. Das Verständnis von „Zehnheit“ (GERSTER & SCHULTZ, 2004, S. 89) fehlt, weil ein Zehner noch nicht als gleichwertig zu zehn Einern gesehen wird. Ebenso können Nicht-Standard-Zerlegungen weder gedeutet noch durchgeführt werden. In Phase 4, „construction zone“ (ROSS, 1989, S. 49), der „Konstruktion des Verständnisses“ (SCHÄFER, 2005, S. 88) wird erkannt, dass die linke Ziffer Mengen von jeweils zehn Elementen darstellt und die andere Ziffer die restlichen Einer. Dieses Wissen ist aber in dieser Phase noch brüchig und unsicher. In (der letzten) Phase 5, „understanding“ (ROSS, 1989, S. 49), ist ein entwickeltes Verständnis des Stellenwertsystems vorhanden (Tabelle 1). Standard-Gruppierung-

gen als auch Nichtstandard-Gruppierungen können gedeutet und beim Rechnen sinnvoll eingesetzt werden.

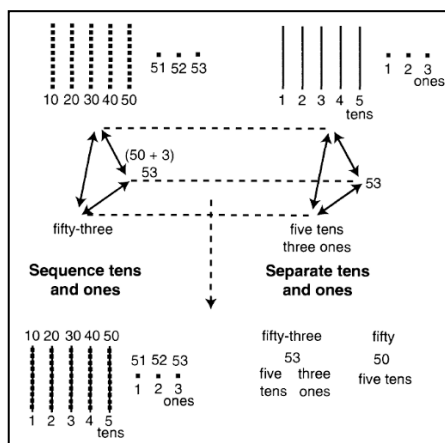


Abbildung 3: Integrated sequence-separate conception (FUSON, et al., 1997, S. 140)

Während Ross (1989) unterschiedliche Ausprägungen des Verständnisses von Zahlbeziehungen innerhalb einer Zahl beschreibt, fokussiert FUSON et al. (1997) eher statisch Bündelung und Stellenwert. In Phase 2, der „Decade and Ones conception“ (FUSON, et al., 1997, S. 140), werden Zahlen als „Zusammensetzungen aus Zehnervielfachen und Einern“ (SCHIPPER, 2009a, S. 120) gesehen. In Phase 3, der „Sequence tens and ones conception“ (FUSON, et al., 1997, S. 141), bei der „zweistellige Zahlen als Zehner-Einer-Sequenzen“ (SCHIPPER, 2009a, S. 120) verstanden werden, werden die Elemente der Zehner nicht mehr als Menge, die aus Einzelteilen besteht, sondern als strukturierte Menge erfasst, in der jeweils 10 zusammengefasst sind. Es wird in Zehnerschritten gezählt (zehn, zwanzig, dreißig ...) und die Elemente der Einermenge werden in Form des Weiterzählens dazu gefügt (Ausschnitt in Abbildung 3). In Phase 4, „Separate tens and ones conception“ (FUSON, et al., 1997, S. 141), bei der „zweistellige Zahlen als Zusammensetzungen aus Zehnern und Einern“ (SCHIPPER, 2009a, S. 120) verstanden werden, wird jeder Zehner als eigene Einheit wahrgenommen. Zehner und Einer werden getrennt gezählt. Die Einsicht, dass sowohl 5 Zehner und 3 Einer als auch 3 Einer und 5 Zehner für die Zahl 53 stehen, ist vorhanden (Ausschnitt in Abbildung 3). In (der letzten) Phase 5, der „Integrated sequence-separate conception“ (FUSON, et al., 1997, S. 142), ist das Verständnis des Stellenwertsystems vollständig entwickelt. Das heißt, dass Zahlen als Zehner-Einer-Sequenzen (Phase 3) sicher mit der Bedeutung zweistelliger Zahlen als Zusammensetzungen aus Zeh-

nern und Einern (Phase 4) verbunden sind und dass flexibel zwischen diesen Interpretationen gewechselt werden kann. Zahlwörter („dreiundfünfzig“) und Zifferndarstellungen („53“) bedeuten gleichzeitig „fünfzig plus drei“ und „fünf Zehner und drei Einer“ und können daher aufgebrochen und wieder zusammengesetzt werden (Abbildung 3).

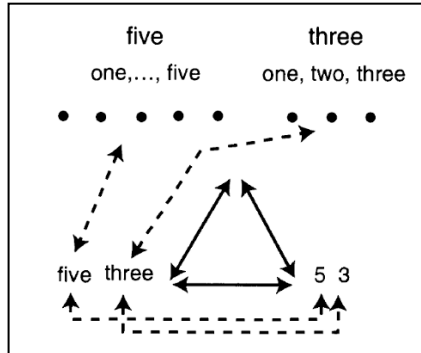


Abbildung 4: Concatenated single digit conception (Fuson, et al., 1997, S. 139)

Weiters wird auch die „concatenated single digit conception“ (Fuson, et al., 1997, S. 142) angeführt, bei der mehrstellige Zahlen als ‚verkettete‘ einstellige Strukturen in den einzelnen Stellenwerten verstanden werden. Jede Ziffer wird als eigenständige Zahl mit Einerstellenwert aufgefasst. Die mehrstellige Bedeutung der einzelnen Ziffern wird nicht erkannt. Das Verständnis umfasst die Position, jedoch weder die Bündelung noch die multiplikative und additive Struktur des dekadischen Stellenwertsystems. Die „concatenated single digit conception“ (Fuson, et al., 1997, S. 138) kann als eine Fehlentwicklung angesehen werden, ist falsch und führt in eine Sackgasse (Abbildung 4). Ross (1989, S. 49) beschreibt in Stufe 2, „positional property“, ein ähnliches Phänomen, sieht dieses jedoch nicht als explizit dauerhaft an.

Beide Modelle, sowohl Ross (1989) als auch Fuson et al. (1997), können einzelne Aufgabebearbeitungen gewissen Stadien bzw. Phasen zuordnen und damit zeigen, dass es Abstufungen im kindlichen Stellenwertverständnis gibt. Aber weder Ross (1989) noch Fuson et al. (1997) bzw. Fuson, Smith & Lo Cicero (1997) erheben den Anspruch, dass die einzelnen Stadien sich zwingend hierarchisch – nach und nach – zu einem vollständig verstandenen Konzept des Stellenwerts entwickeln (siehe dazu auch Moser Opitz, 2007, S. 90; Verschaffel, Greer & De Corte, 2007, S. 568). Laut Collets Studie (2004, zit. nach Verschaffel, Greer & De Corte, 2007, S. 568), das UDSSI-Modell von Fuson et al. (1997) betreffend, ist nicht gesichert („further research is needed“), welche

Phase in der weiteren Entwicklung des kindlichen Stellenwertkonzepts folgt bzw. ob eine Phase übersprungen wird. Deshalb kann auch nicht von einem Entwicklungsmodell gesprochen werden, sondern von Phasen bei der Entwicklung des Stellenwertkonzepts.

Sowohl bei FUSON et al. (1997) als auch bei Ross (1989) liegt das Interesse schwerpunktmäßig auf Zahlen. Daher bleibt in beiden Modellen weitgehend offen, in welcher Phase welche Bezüge zu Lösungswegen zu Addition und Subtraktion vorhanden sind. Andere Publikationen stellen engere Beziehungen zwischen einem unterschiedlichen Zahlverständnis (allerdings keine Phasen der Entwicklung) und Lösungswegen her. FUSON (1992, S. 265) selbst beschreibt neben einer *collection*-based auch eine *sequence*-based geleitete Interpretation von Zahlen, bei der ein Fortschreiten bzw. Zählen im Mittelpunkt steht. TREFFERS bezeichnet Ähnliches als „Structuring“ / „Splitting“ (TREFFERS, 2008, S. 104) bzw. „Positioning“ (TREFFERS, 2008, S. 109) (siehe dazu auch VERSCHAFFEL, GREER & DE CORTE, 2007, S. 568).

Sowohl das Verständnis von Zahlbeziehungen innerhalb einer Zahl als auch die Sicht auf Stellenwert und Bündelung, „conceptual structures“ (FUSON, et al., 1997, S. 133), sind bis jetzt im deutschen Sprachraum noch nicht über einen längeren Zeitraum systematisch betrachtet worden. So besteht ein Forschungsdesiderat, ob, in welchem Ausmaß und über welchen Zeitraum Fähigkeiten des Bündelns bzw. Entbündelns, welche bei Rechnungen mit Zehnerübergang benötigt werden, vorhanden sind bzw. die im Zusammenhang stehende „concatenated single digit conception“ (FUSON, et al., 1997, S. 142) auftritt.

Zahl- und Aufgabenbeziehungen

Um ein umfassendes Wissen von Operationen aufzubauen, ist es notwendig, Zahlen in Beziehungen zueinander zu sehen und sie relational wahrzunehmen (Lorenz, 1997, S. 98). Der Vergleich von Zahlen, also das Erfassen von Zahlbeziehungen, erfordert mentale Operationen des Kindes, die es gedanklich an seinen Zahlvorstellungen vornimmt. Sie sind daher mit den jeweiligen Zahlbedeutungen (Gerster & Schultz, 2004, S. 101) bzw. dem Wissen über Rechenoperationen eng verbunden. Diese Fähigkeit bezieht sich auf mehrere Ebenen, auf die bereits angeführte Ebene (1) in der einzelnen Zahl, und weiters auf die Ebenen (2) zwischen den Zahlen und (3) zwischen den Aufgaben, die nachfolgend erörtert werden.

Das Erkennen von *Beziehungen zwischen Zahlen*, das relationale Element zweier Zahlen, ist notwendig, um Zahlen geschickt neu zusammensetzen zu können. Das umfasst z. B. Nachbarschaftsbeziehungen und Größer/Kleiner-Beziehungen (GERSTER & SCHULTZ, 2004, S. 101), Beziehungen zu dekadischen Stufenzahlen (10, 100, 1 000 ...) oder Vielfachen von dekadischen Einheiten (20, 30 ... 700, 800). Nur

durch ein Verständnis über die Beziehungen zwischen Zahlen lassen sich elegantere Rechenstrategien entwickeln, um einfacher und schneller zum Ergebnis zu kommen. Beziehungen zwischen den Zahlen können einerseits unmittelbar, wenn beide Zahlen bekannt und (auf einem Blatt) sichtbar sind, oder andererseits auch mittelbar, wenn eine passende Zahl erst mental gefunden werden muss, bestimmt werden.

Bei einer Subtraktion, wie z. B. $81 - 78$, bei der beide Zahlen bekannt sind, ist abzuschätzen, ob subtrahiert oder ergänzt werden soll. Weiters ist auch vorteilhaft, im Vorhinein zu wissen, ob eine Zahl nahe einer mental disponierten Zehnerzahl ist, um eine Hilfsaufgabe durchzuführen. Weiterführend setzen auch operative Ableitungen das Beziehungsdenken zwischen Zahlen voraus. Wenn ein Summand bzw. beide steigen, erhöht sich das Ganze um diese Anzahl bzw. um beide. Erfährt der erste Summand eine Zunahme und der zweite eine analoge Verminderung, bleibt die Summe konstant (z. B. $29 + 38 = 30 + 37$).

Das Erkennen von *Beziehungen zwischen den Aufgaben*, die „Auseinandersetzung mit Gleichungen im jeweiligen Umfeld“ (RECHTSTEINER-MERZ, 2013, S. 64) ist erforderlich, um Strukturähnlichkeiten, nämlich den Zusammenhang zwischen gleichen Lösungswegen bzw. Lösungsmethoden bei unterschiedlichen Zahlen in Aufgaben zu erkennen. Das ist z. B. bei einer Aufgabe, die auf eine Verdoppelungsaufgabe plus 1 (z. B. $35 + 36$) zurückgeführt werden kann oder auch beim Erkennen von Analogien, wie z. B. $47 - 5$, die gestützt durch Verständnis des Stellenwerts (Beziehungen ‚innerhalb der Zahl‘) durch die analoge Rechnung (z. B. $7 - 5$) gelöst werden kann, grundlegend. Beziehungen zwischen den Aufgaben zu finden verlangt, dass eine schon bekannte Gleichung mental präsent ist und diese auf die aktuelle Gleichung übertragen werden kann. Zusätzlich ist, gekoppelt mit dem Operationsverständnis, das Verständnis von Kompensation und Kovarianz gefordert, um die richtigen Schlussfolgerungen zu ziehen.

Das Ergebnis bleibt gleich (Kompensation), wenn bei der

- Addition der zusätzlich addierte Wert beim Ergebnis wieder subtrahiert wird (inverse Operation).
- Subtraktion der beim Minuenden zusätzlich addierte Wert beim Ergebnis wieder subtrahiert wird (inverse Operation).
- Subtraktion der beim Subtrahenden addierte Wert beim Ergebnis wieder addiert wird.

Ein Zusammenhang (Kovarianz) ergibt sich, wenn bei der

- Addition ein Summand um einen Wert vergrößert wird, dann vergrößert sich auch das Ergebnis um denselben Wert (positive Kovarianz).

- Subtraktion der Minuend um einen Wert vergrößert wird, dann vergrößert sich auch das Ergebnis um denselben Wert (positive Kovarianz).
- Subtraktion der Subtrahend um einen Wert vergrößert wird, dann verringert sich das Ergebnis um denselben Wert (negative Kovarianz).

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass ein relationales Zahlverständnis, nämlich Beziehungen *innerhalb der Zahl, zwischen den Zahlen und zwischen den Aufgaben* beim Rechnen präsent zu haben, erforderlich ist, um passende Lösungsmethoden ausführen zu können.

2.1.3 Empirische Evidenz

Nachfolgend werden exemplarisch Forschungsbefunde bezüglich des Zahlverständnisses und des damit zusammenhängenden Wissens über Rechenoperationen beschrieben und erläutert.

Reduziertes Verständnis der Teil-Ganzes-Beziehung

GERSTER und SCHULTZ (2004, S. 108) beschreiben, dass manche (rechenschwache) Kinder zwei getrennte Verständnisweisen einer mehrstelligen Zahl haben. Einerseits sehen sie die Zahl als einen Abschnitt in der Zahlenreihe, in Einer-schritte gegliedert, die einerweise gezählt werden (Zahlkonzept ohne Stellenwerte – Abbildung 1); andererseits sehen sie die Zahl als aneinandergereihte Ziffern, wobei die einzelnen Ziffern getrennte Kategorien sind, welche nur nebeneinander stehen und nichts miteinander zu tun haben. Diese Kinder können sehr wohl zwischen den Stellenwerten, wie z. B. Zehner und Einer differenzieren und sie benennen, sehen jedoch die Zahlen „as single-digit numbers placed adjacent to each other, rather than using multidigit meanings for the digits in different positions“ (FUSON, 1992, S. 263). Sie erkennen nicht die Bedeutung der Ziffer in den verschiedenen Positionen. Dieses Konzept der Trennung in die einzelnen Stellenwerte wird dann sichtbar, wenn entbündelt bzw. gebündelt werden sollte. Diese Sichtweise wird in der Literatur z. B. als „abstract singletons“ (COBB & WHEATLEY, 1988) oder als „concatenated single digit conception“ bezeichnet. (FUSON, et al., 1997, S. 139).

Erklären des Stellenwertprinzips oft auch bei Erwachsenen lückenhaft

Kinder, aber auch Erwachsene, beschreiben eine mehrstellige Zahl meist formal als Einer, Zehner, Hunderter. Der Prozess des Bündelns und des Ersetzens an eine Stelle links daneben ist weder präsent noch anscheinend gut genug verstanden

(HAHN & MÖLLER, 2009, S. 604). Auch manchen Studierenden der Grundschullehrerbildung ist trotz theoretischer Fach- und Didaktik-Ausbildung an bundesdeutschen Universitäten das Verständnis des Zusammenhangs zwischen der Bündelungshandlung und dem adäquaten Wechsel der Darstellung in der Ziffernschreibweise nicht vollständig klar (KOLTER, 2014, S. 642).

Nachweis der zentralen Bedeutung des dekadischen Stellenwertsystems für das Ausführen von Addition und Subtraktion

Die Bedeutung des Stellenwertverständnisses für das Rechnen wird in vielen Untersuchungen hervorgehoben:

- Mit einem soliden konzeptuellen Verständnis des dezimalen Zahlensystems können Schülerinnen und Schüler, ohne explizites Thematisieren von Lösungsmethoden im Unterricht, einstellige bzw. mehrstellige Additionen und Subtraktionen lösen (CARPENTER, FRANKE, JACOBS, FENNEMA & EMPSON, 1997; FAST, GSTATTER & WISER, 2005; FUSON, et al., 1997; HIEBERT & WEARNE, 1996).
- Kenntnisse des dezimalen Stellenwertsystems ergeben einen zentralen Prädiktor für die Mathematikleistung im entsprechenden Schuljahr (MOSER OPITZ, 2007, S. 217 f.; SCHÄFER, 2005, S. 184).
- Schülerinnen und Schüler mit guten Kenntnissen des dezimalen Stellenwertsystems praktizieren vielfältigere Lösungsmethoden als Lernende mit schlechteren Kenntnissen (CARPENTER, FRANKE, JACOBS, FENNEMA & EMPSON, 1997; HIEBERT & WEARNE, 1996, S. 278). Nach CARPENTER, FRANKE, JACOBS, FENNEMA & EMPSON (1997) machen sie auch weniger Fehler beim Addieren und Subtrahieren (siehe Abschnitt 2.4.3).
- Eine spezifische Förderung bezüglich Einsicht ins Dezimalsystem führt längerfristig zu einer Leistungsverbesserung in Mathematik (HIEBERT & WEARNE, 1996 – siehe dazu auch Abschnitt 2.4.3).

Algorithmisches Rechnen benötigt nicht zwingend Kenntnisse des dezimalen Stellenwertsystems

Schülerinnen und Schüler mit hoher Lösungsquote bei Additionen und Subtraktionen, insbesondere beim algorithmischen Rechnen, weisen nicht zwingend gute Kenntnisse des dekadischen Systems auf (HIEBERT & WEARNE, 1996; THOMPSON & BRAMALD, 2002). Das bedeutet, dass eine hohe Lösungsquote nicht unbedingt mit einem elaborierten Zahlverständnis gekoppelt sein muss.

2.1.4 Fazit

Ausgehend von den vorliegenden Forschungsergebnissen (siehe Abschnitt 2.1.3) kann evidenzbasiert festgehalten werden, dass Fähigkeiten und Fertigkeiten im Rechnen in einem Zusammenhang mit dem Zahlverständnis stehen. Das Verständnis des Dezimalsystems ermöglicht erst, Beziehungen zwischen Zahlen herzustellen und das Rechnen auf verschiedene Arten zu verstehen. Wenn Kinder z. B. das Bündelungsprinzip (10 Einer werden zu einem Zehner umgetauscht, 1 Hunderter hat denselben Wert wie 10 Zehner) nicht verstanden haben, fehlt ihnen die Einsicht in den Zahlaufbau und damit die Grundlage für Rechenoperationen (SCHERER & MOSER OPITZ, 2010, S. 14).

Daher kommt der Entwicklung des Zahl-, speziell des Stellenwertverständnisses, besondere Bedeutung zu. Je nachdem, welches kognitive Konzept Kinder von Zahlen haben, auf dessen Basis sie Anzahlen bzw. Mengen gruppiert in Einer, Zehner, Hunderter, Tausender verknüpfen, ergeben sich unterschiedliche Zugänge zum Rechnen. Die „Integrated sequence-separate conception“ (FUSON, et al., 1997, S. 142) ermöglicht z. B. einen variantenreichen, die „concatenated single digit conception“ (FUSON, et al., 1997, S. 142) nur einen reduzierten Zugang.

Es ist daher wesentlich, auf welche Weise sich ein Kind Zahlen vorstellt, wenn es rechnet, denn das individuelle Konzept von Zahlen hat Auswirkungen, welche Lösungsmethoden einem Kind prinzipiell zugänglich sind. Bis jetzt liegen wenige Forschungsergebnisse vor, die über einen längeren Zeitraum verfolgen, welche Lösungswege bzw. Lösungsmethoden mit welchen kognitiven Konzepten von mehrstelligen Zahlen in Beziehung stehen und wie sich diese von der zweiten bis zur vierten Schulstufe entwickeln.

2.2 Addition und Subtraktion

Um mehrstellige Additionen und Subtraktionen lösen zu können, bedarf es eines Verständnisses von Analogien, eines gesicherten Stellenwertverständnisses (siehe 2.1.2) sowie der Fähigkeit, Rechnungen mithilfe heuristischer bzw. operativer Strategien zu lösen. Voraussetzung ist die Beherrschung der Grundaufgaben des kleinen Einspluseins und Einsminuseins (SCHIPPER, 2009a, S. 126). In diesem Abschnitt werden grundlegendes Wissen zu Zählen bzw. Rechnen, zusammengefasst als *Lösungswege* (2.2.1) und *Lösungsmethoden* (2.2.2) referiert. Darauf aufbauend wird *Flexibles Rechnen* (2.2.3) erörtert. *Empirische Evidenz* (2.2.4) und ein auf *Lösungswege und Lösungsmethoden* bezogenes Fazit (2.2.5) schließen den Abschnitt.

2.2.1 Lösungswege

Lösungswege sind alle Überlegungen und Ausführungen mathematischer Art, die zielgerichtet mit dem Zweck der Aufgabenbewältigung ablaufen (ASHCRAFT 1990, S. 207, zit. nach KESTING, 2005, S. 86). Jeglicher Lösungsweg kann nach VERSCHAFFEL, GREER und DE CORTE (2007, S. 575) auf verschiedenem Niveau bezüglich Vorstellung, Abkürzung, Abstraktion und Formalisierung ausgeführt werden. Ein niedriges Niveau ist z. B. dann gegeben, wenn Veranschaulichungen wie die Zehnersystemblöcke oder der Zahlen- bzw. Rechenstrich eingesetzt werden. Ein höheres Niveau ist eine Notation mit Zwischenschritten in symbolischer Schreibweise oder nur im Kopf. Kinder können die Ergebnisse sowohl zählend als auch rechnerisch ermitteln oder sie rufen, insbesondere bei einstelligen Zahlen, automatisiertes Wissen ab. Somit stehen drei „Lösungswerkzeuge“ (RATHGEB-SCHNIERER, 2011, S. 16), Zählen, Rechnen und der Rückgriff auf Basisfakten, zur Verfügung.

Rechnen

In der didaktischen Literatur wird beim Rechnen traditionellerweise *Kopfrechnen* (mündliches Rechnen), *halbschriftliches Rechnen* (gestütztes Kopfrechnen), *schriftliches Rechnen* und das *Rechnen mit dem Taschenrechner* unterschieden, die als *Rechenmethoden* (BENZ, 2005, S. 35; SELTER, 2000a, S. 228), *Rechentypen* (KRAUTHAUSEN, 1993, S. 189; RATHGEB-SCHNIERER, 2006, S. 49; WITTMANN, 1999, S. 88) bzw. *Formen des Rechnens* (RATHGEB-SCHNIERER, 2011, S. 16) bezeichnet werden.

Beim *Kopfrechnen* (KRAUTHAUSEN, 1993, S. 189; PADBERG & BENZ, 2011, S. 85; SCHIPPER, 2009a, S. 126) erfolgt die Lösung der Aufgabe im Kopf, ohne Notation

von Zwischenschritten. Statt Kopfrechnen wird auch der Terminus *mündliches Rechnen* verwendet.

Das Kopfrechnen bezieht sich einerseits auf die Grundaufgaben, wie z. B. das Einspluseins, die sicher und schnell gelöst werden sollen. Das erwünschte „Auswendigwissen“ (SCHIPPER, 2009a, S. 126) bzw. „Wissen“ (BENZ, 2005, S. 46) wird üblicherweise unter Kopfrechnen subsumiert, obgleich dies nach SCHIPPER (2009a, S. 126) kein Rechnen, sondern ein „Rückgriff auf Basisfakten“ (RATHGEB-SCHNIERER, 2011, S. 16) aus dem Gedächtnis, ein „mental recall“ (THRELFALL, 2009) ist.

Bei weiteren Rechnungen, wie z. B. bei der Addition und Subtraktion zweier oder dreistelliger Zahlen ist normalerweise das Ergebnis nicht direkt aus dem Gedächtnis abrufbar, sondern wird in Teilschritten ermittelt. Die anfallenden Zwischenergebnisse werden nicht notiert (SCHIPPER, 2009a, S. 126), sondern ‚im Kopf‘ gemerkt. Hierbei sind vielfältige „Kopfrechenmethoden“ (PLUNKETT, 1987, S. 44), „mental strategies“ (THRELFALL, 2009), möglich und erwünscht. PADBERG und BENZ (2011, S. 87) sprechen auch von Kopfrechnen, wenn ansatzweise z. B. ein Zwischenergebnis notiert wird.

Halbschriftliches Rechnen ist Kopfrechnen (mündliches Rechnen) mit Notation der Zwischenschritte. Während der Begriff „halbschriftliches Rechnen“ gelegentlich eher mit standardisierten Vorgehensweisen und verbindlichen Notationsweisen in Schulbüchern assoziiert wird, stellt der Terminus „gestütztes Kopfrechnen“ (SCHIPPER, 2009a, S. 126) unmissverständlich das Verknüpfen der Zahlen in den Vordergrund und wird umfassender interpretiert. *Gestütztes Kopfrechnen* liegt nach SCHIPPER (2009a, S. 126) auch dann vor, wenn ein Kind nur für sich die Zwischenergebnisse einer Rechnung notiert oder auf eine Skizze zurückgreift.

Während Kopfrechnen (mündliches Rechnen) und halbschriftliches Rechnen (gestütztes Kopfrechnen) sich in ihren fließenden Übergängen durch die Art der vorhandenen Notation unterscheiden, vereint der Begriff „Zahlenrechnen“ (BENZ, 2005, S. 37; PADBERG & BENZ, 2011, S. 87; RATHGEB-SCHNIERER, 2006, S. 50; SCHIPPER, 2009a, S. 141; SELTER, 1999, S. 6; SELTER, 2000a, S. 228) bzw. „mental arithmetic“ (VERSCHAFFEL, GREER & DE CORTE, 2007, S. 575) beide Vorgehensweisen. Zahlenrechnen wird als Sammelbegriff von Kopfrechnen und halbschriftlichem Rechnen verwendet. Beim Zahlenrechnen wird mit (zerlegten) Zahlganzzheiten (SELTHER, 1999, S. 6; SELTER, 2000a, S. 228) nach nicht vorgegebenen Vorgehensweisen operiert. Das Ergebnis entsteht in den jeweiligen Denk- bzw. Lösungsschritten „Zahl für Zahl“ (WITTMANN, 1999, S. 89). Zahlenrechnen setzt ein solides Zahlverständnis, nämlich das Verstehen von Zahlen in ihrer gesamten Bedeutung, voraus und macht vor allem im Zusammenhang mit vorteilhaftem Rechnen vielfachen Gebrauch von Zahlvorstellungen, Zahlbeziehungen

und Rechengesetzen (KRAUTHAUSEN & SCHERER, 2007, S. 47). Die didaktische Kategorie ‚Zahlenrechnen‘ ist in der vorliegenden Arbeit von der empirischen Kategorie ‚Rechnen mit Zahlganzzheiten‘ (siehe Abschnitt 3.6.4) zu unterscheiden, die sich aus dem Umgang mit Zahlen beim Kopf- bzw. halbschriftlichen Rechnen ergibt. Manche Kinder trennen die Zahlen in die einzelnen Stellenwerte (‚Rechnen in den Stellenwerten‘) und andere sehen die Zahl als Ganzes (‚Rechnen mit Zahlganzzheiten‘).

Schriftliches Rechnen ist dadurch gekennzeichnet, dass die Zahlen in Ziffern zerlegt werden, die dann mithilfe von Grundaufgaben gemäß genau definierter Regeln, also algorithmisch bezüglich Lösungsweg, Sprechweise und Notation, verknüpft werden. Eindeutigere Begriffe, die nicht die Notation, sondern das regelgeleitete Vorgehen fokussieren, sind „Anwendung schriftlicher Algorithmen“ (BENZ, 2005, S. 38), „algorithmische Rechenverfahren“ bzw. „algorithmisches Rechnen“, die in der vorliegenden Arbeit vorwiegend verwendet werden.

Schriftliches Rechnen wird auch als „Ziffernrechnen“ (RATHGEB-SCHNIERER, 2006, S. 50; SCHIPPER, 2009a, S. 142; SELTER, 1999, S. 6; SELTER, 2000a, S. 228) bezeichnet, weil die Ziffern auf Basis der Systematik des Stellenwertsystems verknüpft werden. PLUNKETT (1987, S. 43) betont die Effizienz, weil durch das Zerlegen der Zahlen in separate Ziffern in den einzelnen Stellenwerten für beliebig große Zahlen anwendbar gerechnet werden kann. Es verleitet allerdings zur „kognitiven Passivität“ (PLUNKETT, 1987, S. 44), weil während des Ausführens im Sinne eines entlastenden Vorgehens nicht über (Zahlvorstellungs-)Hintergründe nachgedacht werden muss und eine Reflexion anderer Lösungsmethoden irrelevant wird.

Noch entlastender ist das Rechnen mit elektronischen Rechnern, das WITTMANN (1999), benannt als *Rechnen mit dem Taschenrechner*, als die „zeitgemäße Form des mechanischen Rechnens“ (WITTMANN, 1999, S. 89) bezeichnet.

Zahlenrechnen und *Ziffernrechnen* (Tabelle 2) veränderten in den letzten zwanzig Jahren ihre didaktische Funktion und Bedeutung. *Ziffernrechnen*, in der didaktischen Literatur spezifiziert als schriftliche Rechenverfahren bzw. algorithmische Rechenverfahren (Tabelle 2), verliert seine lebenspraktische Notwendigkeit, nämlich die Rechenfälle des täglichen Lebens bewältigen zu können, weil im Berufs- und Alltagsleben das Rechnen im Wesentlichen von elektronischen Rechnern durchgeführt wird. Während PLUNKETT (1987, S. 46) vorschlägt, auf algorithmische Rechenverfahren mit ihrer „beschränkten Verständlichkeit“ (PLUNKETT, 1987, S. 46) zu verzichten, argumentieren deutschsprachige Fachdidaktiker, wie z. B. WITTMANN (1999, S. 92), KRAUTHAUSEN und SCHERER (2007, S. 51 f.) SCHIPPER (2009a, S. 188 f.) PADBERG und BENZ (2011, S. 222 ff.) für schriftliches Rechnen als Kulturgut im Sinne ökonomischen Vorgehens, bei dem Algorithmen benützt werden. Nach SCHIPPER (2009a, S. 188 f.; 2009b, S. 124 f.) sollen Schülerinnen und Schüler nicht nur die mathematischen Grundlagen der

einzelnen schriftlichen Rechenverfahren verstehen und analysieren, sondern im Unterricht sollte auch der in der Mathematik wichtige Prozess der Algorithmisierung, also Überlegungen, wie ein ökonomisches Verfahren gestaltet sein soll, thematisiert und ausgeführt werden.

	Zahlenrechnen		Ziffernrechnen
	im Kopf oder nur mit Notation des Ergebnisses	mit Notation der Zwischenschritte	nach einem festgelegten Verfahren
KRAUTHAUSEN und SCHERER (2007, S. 43–51)	Kopfrechnen	Halbschriftliches Rechnen	Schriftliche Rechenverfahren
SCHIPPER (2009a, S. 126 bzw. S. 180)	Kopfrechnen	Gestütztes Kopfrechnen	Schriftliches Rechnen Schriftliche Rechenverfahren
LEHRPLAN DER VOLKSSCHULE (2012, S. 154–156)	Mündliches Rechnen	Mündliches Rechnen	Schriftliches Rechnen

Tabelle 2: Zahlen- und Ziffernrechnen

Da *Zahlenrechnen* (Tabelle 2) unmittelbar mit Zahlverständnis und damit mit vielfachem „Gebrauch von Zahlvorstellungen, Zahlbeziehungen und Rechengesetzen“ (KRAUTHAUSEN & SCHERER, 2007, S. 47) verbunden ist und in mancher Hinsicht auch als Voraussetzung für jegliches weitere Rechnen bezüglich Zahlenraum und Zahlbereiche angesehen wird, ist es Aufgabe des Mathematikunterrichts in den beiden ersten Schuljahren, Rechnen als ein „Verarbeiten von Zahlen unter Berücksichtigung ihrer Bedeutungen, ihrer Besonderheiten und ihrer Beziehungen zu anderen Zahlen“ (SCHIPPER, 2009b, S. 120) grundzulegen. Ab der dritten Schulstufe verliert Zahlenrechnen mit der Einführung der schriftlichen Algorithmen keineswegs seine Berechtigung. Denn so „effizient“ und „allgemein“ (PLUNKETT, 1987, S. 43; vgl. KRAUTHAUSEN, 1993, S. 192) einsetzbar algorithmische Rechenverfahren auch sein mögen, so sehr sollten Vorgehensweisen des Zahlenrechnens nach wie vor zur Verfügung stehen, wenn es „situations- oder aufgabenbezogen angezeigt“ (KRAUTHAUSEN, 2004, S. 143) ist. Sie bleiben den algorithmischen Rechenverfahren (Ziffernrechnen) wegen ihrer „Anschaulichkeit“ und „Freizügigkeit“ (PLUNKETT, 1987, S. 44) überlegen. Auch die allgemeinen Kompetenzbereiche „Kommunizieren“ oder „Problemlösen“ (VERORDNUNG FÜR BILDUNGSSTANDARDS IM SCHULWESEN, 2009) der österreichischen Bildungsstandards und ein zeitgemäßes Lehr-Lern-Verständnis, wie z. B. „die Betonung von Problemdarstellungen, die Grundlegung eines forschenden, experimentierenden Vorgehens, das Aufdecken verschiedener Lösungswege, das Herausstreichen von Zusammenhängen und das

Erkennen verwandter Operationen“ (LEHRPLAN DER VOLKSSCHULE, 2012, S. 162) unterstreichen Aspekte und Intentionen des Zahlenrechnens.

Mathematisch gehaltvolle Situationen können unter zwei verschiedenen Perspektiven betrachtet werden; zum einen mit Blick auf die mathematischen Inhaltsbereiche und zum anderen mit Blick auf mathematische Denk- und Handlungsweisen der Schülerinnen und Schüler (RATHGEB-SCHNIERER, 2012, S. 52). *Kopfrechnen*, *halbschriftliches Rechnen* und *schriftliches Rechnen* und damit eingeschlossen *Zahlenrechnen* und *Ziffernrechnen* entsprechen didaktischen Kategorien des Lehrens, die Lehrpläne und in weiterer Folge das Schulbuch inhaltlich strukturieren. Damit sind sie handlungsleitend für Lehrpersonen bei der Planung und Gestaltung des Unterrichts. Auf didaktisch-normativer Ebene sind ein variantes, flexibles Vorgehen beim Zahlenrechnen und eine letztendliche Algorithmisierung beim Ziffernrechnen erwünscht.

Doch entsprechen diese Kategorien des Lehrens den mathematischen Denk- und Handlungsweisen, den empirisch erfassten Lösungswegen von Kindern? Derzeit kann von folgendem Forschungsstand über Zahlen- und Ziffernrechnen ausgegangen werden:

- Auch wenn Zahlen- und Ziffernrechnen zwei unterschiedliche Typen des Rechnens charakterisieren, verwenden Kinder Mischformen, bei denen sie einen Teil der Aufgabe durch Zahlen-, einen anderen durch Ziffernrechnen bewältigen (SCHIPPER, 2009b, S. 125; SELTER, 1999, S. 7).
- Ziffernrechnen muss nicht unbedingt ein verständnisloses Ausführen von Algorithmen sein (SELTHER, 1999, S. 7).
- Zahlenrechnen wird nicht immer variant und flexibel angewendet (BENZ, 2005; HIRSCH, 2001, zit. nach PADBERG & BENZ, 2011, S. 194; MESETH & SELTER, 2002, S. 55; SELTER, 2000a; TORBEYNS, DE SMEDT, GHESQUIÈRE & VERSCHAFFEL, 2009a).

Wie die vorher angeführten Forschungsergebnisse zeigen, divergieren didaktische Implikationen mit empirischen Ergebnissen. So besteht ein Forschungsdesiderat, insbesondere im Längsschnitt, inwieweit Schülerinnen und Schüler Ziffern in ihrer Bedeutung in den einzelnen Stellenwerten im Zusammenhang von nicht normiertem Rechnen verwenden. Weiters ist offen, ob Kinder mit Ziffern in den Stellenwerten variabel und flexibel rechnen. Ebenso sind Vorgehensweisen beim Zahlenrechnen im Längsschnitt über ein Jahr wenig erschlossen.

Zählendes Rechnen bei mehrstelligen Zahlen

Während beim Rechnen auf automatisiertes Wissen bezüglich Grundaufgaben wie z. B. das Einspluseins zurückgegriffen wird, erfolgt die Lösung beim Zählen

über die Zahlenfolge, die entweder Zahl für Zahl oder in Schritten aufgesagt bzw. gedacht wird.

Zählen ist eine zentrale Kompetenz, welche in erster Linie den ordinalen Aspekt von Zahlen erschließt. Verschiedene Entwicklungsmodelle von Zählmethoden stellen den Weg von *Alles Zählen*, *Weiterzählen*, *Weiterzählen vom größeren Summanden aus* zum *Weiterzählen in Schritten* (PADBERG & BENZ, 2011, S. 88 ff.; SCHIPPER, 2009a, S. 102 ff.; VERSCHAFFEL, GREER & DE CORTE, 2007, S. 561) dar. Bei mehrstelligen Zahlen ergeben sich die nachfolgenden Zählmethoden.

- Beim *Zählen*, meist *Weiterzählen*, wird jede einzelne Zahl gezählt. Während solche zählenden Lösungswege bei einstelligen Zahlen durchaus zum Erfolg führen, gestaltet sich einerweises Zählen bei mehrstelligen Zahlen mühsam, weil durch das eher langwierige Zählen der Zusammenhang zwischen Aufgabe und Ergebnis verloren geht und die Ausgangszahlen nicht mehr im Bewusstsein sind.

Gekoppelt mit einem soliden Stellenwertkonzept ist es durchaus möglich, dass in den einzelnen Stellenwerten gezählt und dementsprechend gebündelt bzw. entbündelt wird.

- Das *Zählen in Schritten* (größer als Eins) setzt eine höhere Flexibilität voraus als das fortlaufende Zählen jeder einzelnen Zahl. Es erfordert einerseits die sichere Repräsentation der Zahlwortreihe, andererseits aber auch die Vorstellung, dass jedes Zahlwort eine Einheit darstellt und dass beim Zählen in Schritten Einheiten übersprungen werden müssen (MOSER OPITZ, 2007, S. 84). Beim Weiterzählen in (Zehner-)Schritten muss die zu addierende bzw. subtrahierende Zahl im Gedächtnis behalten werden, um von der Ausgangszahl die Zahlwortreihe in Schritten zählend fortsetzen zu können.

Da zählendes Rechnen aufwändiger, zeitlich länger und dadurch auch fehleranfällig ist, wird fachdidaktisch angestrebt, sich von zählenden Lösungswegen zu lösen. Die Wege dazu sind unterschiedlich. In einem Unterricht, bei dem hauptsächlich ein eher kardinales, *collection-based* (FUSON, 1992, S. 265) Zahlverständnis vorherrscht, werden zählende Lösungswege bei mehrstelligen Zahlen nicht bzw. wenig thematisiert. Es wird von auswendig gewussten Grundaufgaben ausgegangen, die in den einzelnen Stellenwerten verknüpft und evtl. gebündelt oder entbündelt werden. In einem Unterricht, bei dem eher ein ordinales, *sequence-based* (FUSON, 1992, S. 265) Zahlverständnis vorherrscht, wird über schrittweises Zählen zum schrittweisen Rechnen übergegangen. Zählen wird dabei nicht unterdrückt, sondern zum Rechnen weiter geführt (siehe MENNE, 2001).

Zusammenhängend mit dem Zahlverständnis kann daher Folgendes festgehalten werden:

- Fortlaufendes einerweises Zählen lässt eine „unitary multidigit conception“ (FUSON, et al., 1997, S. 141) vermuten. Die Kinder sehen mehrstellige Zahlen als abgezählte Gesamtheiten aus lauter einzelnen. Somit wird die Struktur, die den Zahlen zugrunde liegt, nicht deutlich (GERSTER & SCHULTZ, 2004, S. 308). Sie können die Zahl nicht in die jeweiligen Stellen gliedern bzw. zerlegen.
- Beim Zählen in Schritten ist mindestens ein *sequence-based* (FUSON, 1992, S. 265) orientiertes Zahlverständnis notwendig, weil das Kind ein sicheres Regelwissen über den sprachlichen und strukturellen Aufbau der Zahlwortreihe benötigt. Es muss schließlich wissen, was ‚ein Zehner‘ bzw. ‚in Zehnerschritten‘ bedeutet, sodass es leicht und mühelos die dekadische Analogie z. B. 3, 13, 23, 33, 43 ... nutzen kann (SCHÄFER, 2005, S. 83).
- Weiterführend kann bei einer „integrated sequence-separate conception“ (FUSON, et al., 1997, S. 141), bei der die Zahl auch als Zusammensetzung in ihre dezimalen Positionswerte verstanden wird, sowohl schrittweise als auch einerweise in den Ziffern der einzelnen Stellenwerte gezählt werden. So kann z. B. bei $32 + 25$ sowohl in den Zehnern „40, 50“ als auch „4 (Zehner), 5 (Zehner)“ gezählt werden.

2.2.2 Lösungsmethoden

Bei mehrstelligen Additionen und Subtraktionen ist es nicht mehr möglich, direkt über automatisiertes Wissen die Lösung abzurufen. Nicht ein Lösungsschritt, sondern eine Folge von Lösungsschritten ist erforderlich, um die Zahlen auf Basis der Rechengesetze, wie z. B. Kommutativ-, Assoziativ- oder Distributivgesetz, verknüpfen zu können. Diese Vorgehensweise beim Lösen einer Rechenaufgabe wird in der vorliegenden Arbeit als *Lösungsmethode* bezeichnet.

Der Begriff „Methode“ wird in Anlehnung an FUSON et al. (1997) und PLUNKETT (1987) gewählt, weil (1) ‚Prozedur‘ (procedures) zu stark in die Nähe von Algorithmen gebracht wird und weil an den Begriff (2) ‚Strategie‘ (strategy) zu hohe Ansprüche (insbesondere auch in der Psychologie) gestellt werden (siehe dazu auch BENZ, 2005, S. 61; RATHGEB-SCHNIERER, 2006, S. 53 ff.). Der sich auch anbietende Terminus „Rechenmethode“ passt weniger, weil ein zählender Teilschritt, eine gedankliche Folgerung nicht unbedingt als „Rechen“-Schritt bezeichnet werden kann. Lösungsmethode und nicht der in der Mathematikdidaktik häufiger verwendete Begriff „Strategie“ wird auch deshalb gewählt, weil letztendlich algorithmische Rechenverfahren subsumiert werden.

Kategorie	Kontext in der Literatur
schrittweises Rechnen	„jump strategy“ (VERSCHAFFEL, GREER & DE CORTE, 2007, S. 570) „Sequential strategy“ (TORBEYNS, DE SMEDT, GHESQUIÈRE & VERSCHAFFEL, 2009a, S. 3 [Hervorhebung im Original])
stellenweises Rechnen	„split strategy“ (VERSCHAFFEL, GREER & DE CORTE, 2007, S. 570) „Decomposition strategy“ (TORBEYNS, DE SMEDT, GHESQUIÈRE & VERSCHAFFEL, 2009a, S. 3 [Hervorhebung im Original])
Ableiten	„compensating or varying strategies“ (VERSCHAFFEL, GREER & DE CORTE, 2007, S. 570) „Shortcut strategies“ (TORBEYNS, DE SMEDT, GHESQUIÈRE & VERSCHAFFEL, 2009a, S. 3 [Hervorhebung im Original])

Tabelle 3: Klassifizierung der Lösungsmethoden

Zu *Lösungsmethoden* finden sich unterschiedliche Klassifizierungen und Bezeichnungen (Tabelle 3). Alle Klassifizierungen enthalten (1) *stellenweises* und (2) *schrittweises Rechnen* (FRANKE & LEHMANN, 2005; PADBERG & BENZ, 2011, S. 105 ff.; SCHIPPER, 2009a, S. 131 ff.; WITTMANN & MÜLLER, 1990, S. 84). Beide Lösungsmethoden beruhen auf dem Zerlegen der Zahlen in ihre Stellenwerte. Weitere Lösungsmethoden, die auch operative Beziehungen, nämlich Zahl- und Aufgabenbeziehungen nutzen, sind *Nutzen einer Hilfsaufgabe*, *gegensinniges bzw. gleichsinniges Verändern* und *Ergänzen*, die in der vorliegenden Arbeit als *Ableiten* (BENZ, 2005, S. 63; PADBERG & BENZ, 2011, S. 179; S. 182) zusammengefasst werden. Ableiten bietet sich nur dann an, wenn die verknüpfenden Zahlen besondere Eigenschaften aufweisen.

Beim *schrittweisen Rechnen* wird nur eine Zahl zerlegt und von der Ausgangszahl addiert bzw. subtrahiert. Schrittweises Rechnen hat den Vorteil, dass immer mit dem bei der Teiloperation erhaltenen Ergebnis weiter gerechnet bzw. schrittweise gezählt wird und beim letzten Rechen- bzw. Zählschritt direkt das Endergebnis präsent ist. Damit eignet sich diese Lösungsmethode besonders für das Kopfrechnen. Schrittweises Vorgehen kann mit seiner sequenziellen Struktur sehr gut am Rechenstrich bzw. Zahlenstrich dargestellt werden, der ein einfaches Notieren und Nachvollziehen einzelner Schritte ermöglicht. Schrittweises Rechnen ist universell, bei allen Additionen und Subtraktionen einsetzbar und findet sich daher in allen Schulbüchern. Das ist nach SCHIPPER (2009a, S. 132) vor allem ein Vorteil für besonders schwache Rechnerinnen und Rechner, weil es als universelle Methode praktiziert werden kann. SCHERER und MOSER OPITZ (2010, S. 153) hingegen weisen darauf hin, dass zu gemischten Zehnerzahlen beliebige Zehner addiert werden müssen und dies vor allem für lernschwache Kinder hohe kognitive Anforderungen stellt.

Beim *stellenweisen Rechnen*, auch als „Zehner extra, Einer extra“ (RADATZ, SCHIPPER, DRÖGE & EBELING, 1998, S. 43; WITTMANN & MÜLLER, 1990, S. 84) oder „Stellenwerte extra“ (SCHIPPER, 2009a, S. 135) bezeichnet, werden jeweils beide Zahlen in ihre Stellenwerte zerlegt. Generell erfordert stellenweises Rechnen größere Gedächtnisleistungen. Ein direktes Weiterrechnen mit einem Zwischenergebnis ist nicht möglich. Stattdessen müssen die Zahlen entweder notiert oder – beim Kopfrechnen – im Gedächtnis behalten werden (SCHIPPER, 2009a, S. 135). Bei Subtraktionsaufgaben mit Zehnerübergang können negative Zahlen entstehen. Das wird didaktisch kontrovers diskutiert. Während z. B. WITTMANN und MÜLLER (1990, S. 85) die entstehende negative Zahl als für Kinder verständliche mathematische Darstellung, dass noch etwas zu subtrahieren sei, argumentieren, sieht SCHIPPER (2009a, S. 135) dieses Vorgehen aufgrund empirischer Belege bezüglich erhöhter Fehlerhäufigkeit (z. B. BEISHUIZEN, 1993, S. 310; BENZ, 2005) als problematisch an. Somit ist der universelle Einsatz von stellenweisem Rechnen aus didaktischer Sicht weniger eindeutig als beim schrittweisen Rechnen.

Stellenweises Rechnen steht in sehr engem Zusammenhang mit den *algorithmischen Rechenverfahren*. Während es bei der schriftlichen Addition weltweit im Wesentlichen nur ein Verfahren gibt (PADBERG & BENZ, 2011, S. 237), ist die Situation bei der schriftlichen Subtraktion anders. Die gebräuchlichsten Subtraktionsverfahren lassen sich anhand von zwei Gesichtspunkten einteilen: durch die Art der Berechnung der Differenz und durch die Art der Durchführung des Übertrags. Die Art der Berechnung der Differenz kann durch *Abziehen* (Wegnehmen), d. h. in Minussprechweise, oder durch *Ergänzen* (Hinzufügen), d. h. in Plussprechweise, durchgeführt werden. Die Art des Übertrags kann als

- *Entbündeln* einer Einheit aus dem nächsthöheren Stellenwert,
- gleichsinniges Verändern sowohl des Minuenden wie des Subtrahenden, d. h. durch *Erweitern*, indem +10 und im nächsthöheren Stellenwert +1 dazu gefügt wird,
- *Auffüllen* des Subtrahenden zum Minuenden (sogenannte Auffülltechnik)

ausgeführt sein. (PADBERG & BENZ, 2011, S. 237 ff.; SCHIPPER, 2009a, S. 199 ff.)

Durch Kombination gibt es fünf mögliche Verfahren (*Auffüllen* lässt sich nur mit *Ergänzen* koppeln). Während es in der Bundesrepublik Deutschland großteils keine vorgeschriebenen Normalverfahren für die schriftliche Subtraktion gibt (PADBERG & BENZ, 2011, S. 218), schreibt der österreichische LEHRPLAN DER VOLKSSCHULE das „Ergänzungsverfahren“ (2012, S. 155) vor. Somit sind in Österreich (1) *Ergänzen* mit *Erweitern* und bei einer großzügigen Interpretation des Lehrplans – als allgemeine „Rechenregel“ (LEHRPLAN DER VOLKSSCHULE, 2012,

S. 155) wird zusätzlich die „Monotonie der Subtraktion“ (2012, S. 155) angeführt – (2) *Ergänzen* mit *Auffüllen* möglich. Das in anderen Ländern übliche *Abziehen* mit *Entbündeln*, bei dem die Kinder ein weit höheres begründendes Verständnis erreichen (MOSEL-GÖBEL, 1988), ist daher derzeit laut Lehrstoff des LEHRPLANS DER VOLKSSCHULE nicht möglich.

Während beim stellenweisen und schrittweisen Rechnen nur die einzelne Zahl als eine Zusammensetzung bzw. Beziehung aus anderen Zahlen verstanden werden muss, um die Zahl additiv in ihre Stellenwerte zerlegen und nachfolgend passend verknüpfen zu können, verlangen Methoden des *Ableitens* das Erkennen von *Beziehungen zwischen Zahlen* und von *Beziehungen zwischen Aufgaben*. Beim Ableiten sind im Gegensatz zu schrittweisem und stellenweisem Vorgehen die Lösungsschritte nicht klar festgelegt. Auf Basis der Beziehungen zwischen Zahlen ist zu überlegen, von welcher Aufgabe abgeleitet werden kann. Dazu ist erforderlich, dass in einem ersten Gedankenschritt die gegebenen Zahlen aufeinander bezogen werden müssen. In einem weiteren Gedankenschritt bzw. gleichzeitig muss eine relevante Referenzaufgabe abgerufen werden, um anschließend, an die Referenzaufgabe angepasst, die Aufgabe zu lösen.

„Strategien mit Veränderung und Kompensation“ (SCHIPPER, 2009a, S. 134) bzw. „*compensating or varying strategies*“ (VERSCHAFFEL, GREER & DE CORTE, 2007, S. 570 [Hervorhebung im Original]) bieten sich nur dann an, wenn eine gewisse Nähe zu reinen Zehnern, Hundertern bzw. zu Verdoppelungs- oder Halbierungsaufgaben gegeben ist. Beim Nutzen einer *Hilfsaufgabe* (RADATZ, SCHIPPER, DRÖGE & EBELING, 1999, S. 87; RATHGEB-SCHNIERER, 2006, S. 52; SCHIPPER, 2009a, S. 134) wird zunächst eine einfachere Aufgabe gerechnet – in der Regel wird eine der Zahlen auf den nächsten Zehner gerundet und das vorläufige Ergebnis der Addition bzw. Subtraktion ermittelt. Der entstandene Fehlbetrag wird in einem weiteren Lösungsschritt ausgeglichen. Die Schwierigkeit besteht darin, den Fehlbetrag passend zu addieren oder zu subtrahieren. Dies erfordert neben dem Erkennen von Beziehungen zwischen Zahlen und Finden der passenden Aufgabe auch das Verstehen und Anwenden inverser Rechenoperationen (Kompensation). Noch kürzer ist das Rechnen beim *gegen- bzw. gleichsinnigen Verändern* (RADATZ, SCHIPPER, DRÖGE & EBELING, 1999, S. 87; SCHIPPER, 2009a, S. 134) bzw. „Vereinfachen“ (RATHGEB-SCHNIERER, 2006, S. 52), bei dem beide Zahlen so verändert werden, dass sich eine einfacher zu rechnende Aufgabe ergibt. Den Hintergrund dieser Methode bilden das *Gesetz der Konstanz der Summe* bzw. das *Gesetz der Konstanz der Differenz*.

Ergänzen verlangt neben einem adäquaten Erkennen von Zahl- und Aufgabenbeziehungen auch ein erweitertes Operationsverständnis. Jede Subtraktion kann als *Abziehen* bzw. „*taking away*“ (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN & TREFFERS, 2009, S. 108) oder als *Ergänzen* (PADBERG & BENZ, 2011, S. 183; SCHIPPER,

2009a, S. 132) bzw. „determining the difference“ (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN & TREFFERS, 2009, S. 108) gedeutet werden. Auch im österreichischen LEHRPLAN DER VOLKSSCHULE wird auf der Grundstufe I unter „Verstehen von Operationsstrukturen“ (LEHRPLAN DER VOLKSSCHULE, 2012, S. 211) *Abziehen* bzw. ‚Wegnehmen‘ und *Ergänzen* gleichrangig angeführt. Neben dem üblicherweise leichter aufzufassenden Abziehen müssen beim Ergänzen auch abstraktere relationale Aspekte erfasst werden, um die Subtraktion auf verschiedene Weise interpretieren und lösen zu können. *Ergänzen* bei der Subtraktion ist besonders dann sinnvoll, wenn die beiden Zahlen eine gewisse Nähe zueinander aufweisen. Beim Ergänzen kann, ausgehend von der kleineren Zahl, immer mit dem Ergebnis der Teiloperation weiter gerechnet werden, sodass sequenziell wie beim schrittweisen Rechnen vorgegangen wird (SCHIPPER, 2009a, S. 132).

Zusammenfassend lassen sich als Basis für die eigene Arbeit folgende Gruppen von Lösungsmethoden, die „closely linked to different conceptions of numbers“ (VERSCHAFFEL, GREER & DE CORTE, 2007, S. 575) sind, angegeben:

- *Jump-Strategien*, bei denen die Zahlen eher als Zählobjekte in einer Reihe und die Operationen als Bewegungen entlang der Zählreihe weiter (+) oder zurück (–) gesehen werden. Nach FUSON et al. (1997, S. 146) werden sowohl *schrittweises Rechnen* als auch *kombinierte Lösungsmethoden* von stellenweisem und schrittweisem Rechnen „typically done with a sequence-tens or integrated-tens conception“ (FUSON, et al., 1997, S. 146). Dies entspricht einer *sequence-based* (FUSON, 1992, S. 265) Interpretation bzw. „Positioning“ (TREFFERS, 2008, S. 104) von Zahlen.
- *Split-Strategien*, bei denen die Zahlen in erster Linie als Objekte mit einer dezimalen Struktur gesehen und Operationen durch Teilen und Verknüpfen der Zahlen auf der Basis dieser dezimalen Struktur durchgeführt werden, liegt die „sequence-tens, separate-tens, or integrated-tens conception“ (FUSON, et al., 1997, S. 146) zugrunde. Dies entspricht einer *collection-based* (FUSON, 1992, S. 265) Interpretation bzw. „Structuring“ bzw. „Splitting“ (TREFFERS, 2008, S. 109) von Zahlen.
- Diese beiden (Haupt-)Gruppen erweitern VERSCHAFFEL, GREER und DE CORTE (2007, S. 575) um „*Varying*“-Strategien, die durch Nutzung einer geeigneten Struktur und unter Verwendung geeigneter arithmetischer Eigenschaften Zahlen verknüpfen. FUSON et al. (1997, S. 146) erweitern ebenfalls, führen in dieser Gruppe nur *gegen- bzw. gleichsinniges Verändern* („change-both-number methods“) an, erforderlich dafür ist eine „sequence-tens, separate-tens, or integrated-tens conception“ (FUSON, et al., 1997, S. 146).

2.2.3 Flexibles Rechnen

Um rechnen zu können, ist es zweifelsohne notwendig, mathematische Lösungswege korrekt durchzuführen. Dies ist auch „quickly and accurately without understanding“ (HATANO, 2003, S. xi) mit „routine expertise“ (HATANO, 2003, S. xi) möglich. Darüber hinaus sollen passende vorteilhafte Lösungswege praktiziert werden. Diese Kompetenz wird in der aktuellen mathematikdidaktischen Diskussion als *flexibles Rechnen* bezeichnet. Zahlreiche Beiträge aus unterschiedlichen Ländern fordern dies ein (z. B. HEIRDSFIELD & COOPER, 2002; RATHGEB-SCHNIERER, 2006; RECHTSTEINER-MERZ, 2013; SCHIPPER, 2009a, S. 130; SCHÜTTE, 2004; SELTER, 2009; THRELFALL, 2009; VERSCHAFFEL, LUWEL, TORBEYNS & VAN DOOREN, 2009). Flexibles Rechnen wird weitgehend übereinstimmend als „situatives, aufgabenadäquates Handeln“ (RATHGEB-SCHNIERER, 2014, S. 943) verstanden, das einen beweglichen Umgang mit Lösungswegen bzw. Lösungsmethoden impliziert.

VERSCHAFFEL, LUWEL, TORBEYNS und VAN DOOREN (2009, S. 337) unterscheiden, basierend auf einer breiten Literaturanalyse, zwischen den vor allem im englischsprachigen Raum verwendeten Begriffen Flexibilität (flexibility) und Adaptivität/Adäquatheit (adaptivity) bezüglich der Auswahl der Lösungsmethode (strategy). Flexibility

„is primarily used to refer to *switching (smoothly) between different strategies*, whereas the term ‚adaptivity‘ puts more emphasis on *selecting the most appropriate strategy*“ (VERSCHAFFEL, LUWEL, TORBEYNS & VAN DOOREN, 2009, S. 337 [Hervorhebung im Original]).

Weiters merken VERSCHAFFEL, LUWEL, TORBEYNS & VAN DOOREN (2009, S. 343) an, dass nicht nur die Aufgabenmerkmale bestimmen, was eine passende Strategie ausmacht, sondern auch persönliche Präferenzen und der jeweilige, soziokulturelle Kontext.

„By an adaptive choice of a strategy we mean the conscious or unconscious selection and use of the most appropriate solution strategy on a given mathematical item or problem, for a given individual, in a given sociocultural context“ (VERSCHAFFEL, LUWEL, TORBEYNS & VAN DOOREN, 2009, S. 343).

Auf individueller Ebene hängt nach SHRAGER und SIEGLER (1998), allerdings auf Basis einstelliger Additionen und Subtraktionen, die für das Kind passende und daher praktizierte Lösungsmethode davon ab, wie genau und wie schnell eine Rechnung mit einer bestimmten Lösungsmethode in Abwägung mit anderen zur Verfügung stehenden Methoden vom Kind gelöst werden kann. Eine passende Lösungsmethode auf individueller Ebene ist daher, den schnellsten Ansatz zu

wählen, der zum richtigen Ergebnis führt (SIEGLER, 2001, S. 378; TORBEYNS, DE SMEDT, GHESQUIERE & VERSCHAFFEL, 2009b).

Im soziokulturellen, vorwiegend institutionell geprägten Kontext hängen nach VERSCHAFFEL, LUWEL, TORBEYNS & VAN DOOREN (2009, S. 342) „passende“ Lösungsmethoden davon ab,

- welche Materialien, wie z. B. Zehnersystemblöcke, Rechengeld, Zahlenstrich (Rechenstrich), Zahlenstrahl, ..., zur Verfügung stehen bzw. erlaubt sind,
- welche Aspekte des Vorgehens im Klassenverband – statt oder neben den Aspekten Geschwindigkeit und Korrektheit – wie Einfachheit, Eleganz, korrekte Notation, Originalität (am meisten) besonders geschätzt werden. Wenn z. B. eine bestimmte Lösungsmethode erstmals thematisiert oder von der Lehrperson besonders hervorgehoben wird, ist es für das Kind vermutlich passender, in diesem Kontext diese Methode zu verwenden.
- welches Ziel mit dem Lösen der Aufgabe verfolgt wird. Geht es um das Lösen einer Aufgabe im Unterricht? Geht es um andere soziale Ziele, wie z. B. den Mitschülerinnen und -schülern bzw. außerschulischen Personen gemäß zu handeln?

All diese Überlegungen zum flexiblen Rechnen setzen voraus, dass Kinder in der Lage sind, für gegebene Rechenaufgaben „bewusst“ (SCHIPPER, 2009a, S. 130) eine Lösungsmethode zu wählen. Kritisch merkt dazu THRELFALL (2002; 2009) an, dass besonders bei jungen Kindern es in der Regel nicht möglich sei, alle ausführbaren Lösungsmethoden, die sich zur Lösung einer Aufgabe anbieten, vorab zu kennen und aus dieser Menge an Methoden die angemessenste auszuwählen. Daraus ergibt sich eine theoretisch andere Sichtweise. Flexibles Rechnen kann auch als aufgabenadäquates Handeln verstanden werden, das sich darin zeigt, dass sich der Lösungsprozess nicht auf im Vorhinein bewusste Methoden, sondern auf im Lösungsprozess wahrgenommene Zahlbeziehungen und Merkmale der Aufgabe stützt.

Nicht die Abfolge von Lösungsschritten im Vorhinein, sondern der unmittelbare Teilschritt (RATHGEB-SCHNIERER, 2006; RECHTSTEINER-MERZ, 2013), mit dem Aufgaben verändert oder vereinfacht werden können, bestimmen den Lösungsprozess. Dazu gehören das Zerlegen und Zusammensetzen von Zahlen, das gleich- und gegensinnige Verändern sowie das Nutzen von Hilfsaufgaben und Analogiewissen (RATHGEB-SCHNIERER, 2011, S. 17), die aufgabenunabhängig und frei kombinierbar bei einer Aufgabe eingesetzt werden können.

Stützt sich der Lösungsprozess auf Zahlbeziehungen und besondere Merkmale von Aufgaben, kann nach SELTER (2009) Rechnen mit „flexibel“ und „adaptiv“ nicht vollständig beschrieben werden, weil diese Begrifflichkeiten mit bereits im

Vorhinein bekannten Methoden assoziiert sind. SELTER (2009) ergänzt deshalb mit Bezug auf HATANOS „adaptive expertise“ (HATANO, 2003, S. xi) die Unterscheidung von VERSCHAFFEL, LUWEL, TORBEYNS & VAN DOOREN (2009) um den Punkt *Kreativität*. Darunter versteht SELTER die Fähigkeit, neue Lösungswege zu erfinden oder bekannte Wege zu modifizieren. SELTER versteht daher Adaptivität / Adäquatheit (adaptivity), in Weiterführung der Definition von (VERSCHAFFEL, LUWEL, TORBEYNS & VAN DOOREN, 2009, S. 337) als

„the ability to creatively develop or to flexibly select and use an appropriate solution strategy in a (un)conscious way on a given mathematical item or problem, for a given individual, in a given sociocultural context“ (SELTHER, 2009, S. 624).

Während in der englischsprachigen Literatur, insbesondere im Zusammenhang mit dem bewussten Auswählen einer Lösungsmethode, zwischen Flexibilität und Adaptivität unterschieden wird, schließt im deutschen Sprachraum „flexibles Rechnen“ großteils ein aufgabenadäquates Handeln (RATHGEB-SCHNIERER, 2006, S. 59; RATHGEB-SCHNIERER, 2014, S. 943; SCHÜTTE, 2004) mit ein. In der vorliegenden Untersuchung reicht flexibles Rechnen als Idealform in dieser umfangreichen, allerdings wenig abgestuften Bedeutung für das Beschreiben der Entwicklungsverläufe nicht aus. Daher wird die differenziertere Begrifflichkeit von VERSCHAFFEL, LUWEL, TORBEYNS & VAN DOOREN (2009) mit Erweiterung von SELTER (2009) übernommen. *Flexibilität* (flexibility) ist die Fähigkeit, zwischen verschiedenen Lösungsmethoden zu wechseln. *Kreativität* (creativity) ist die Fähigkeit, bekannte Methoden zu modifizieren bzw. neue zu finden. *Adaptivität / Adäquatheit* (adaptivity) ist die Fähigkeit, geeignete Methoden zu verwenden (entweder neu entwickelt oder flexibel ausgewählt).

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass bei flexiblem Vorgehen Lösungswege bzw. Lösungsmethoden passend zu

- den gestellten Aufgaben („Die Zahlen sind nah beieinander, darum habe ich plus gerechnet“),
- der individuellen Ebene, indem nach Geschwindigkeit und Korrektheit entschieden wird, („Ich habe so gerechnet, weil ich es so am besten kann“) und
- dem soziokulturellen Kontext („Unsere Lehrerin hat gesagt, dass wir so rechnen sollen“)

praktiziert werden.

In der vorliegenden Arbeit wird flexibles Rechnen als „aufgabenadäquates Handeln“ (RATHGEB-SCHNIERER, 2014, S. 943) in den Ausprägungen, wie kreativ, adaptiv/adäquat, flexibel die Schülerinnen und Schüler vorgehen, in den Entwicklungsverläufen charakterisiert.

2.2.4 Empirische Evidenz

Lösungswege

Zählend rechnende Schülerinnen und Schüler haben ein deutlich schlechteres Operationsverständnis als nichtzählend rechnende, lösen signifikant weniger Aufgaben korrekt als diese und verfügen kaum über effiziente Lösungsmethoden (SCHÄFER, 2005). Nach SCHÄFER (2005, S. 185) schließt das bevorzugte Anwenden zählenden Rechnens nicht nur die Entwicklung effektiver, nicht zählender Lösungswege aus, sondern behindert auch die sichere Orientierung im Zahlenraum (und umgekehrt).

Schülerinnen und Schüler praktizieren am häufigsten *schrittweises* und *stellenweises Rechnen* sowie eine *Mischform* der beiden Lösungsmethoden (BENZ, 2005; FUSON, et al., 1997; SELTER, 2000a). Schülerinnen und Schüler neigen dazu, einen bereits erprobten und bekannten Lösungsweg beizubehalten, auch wenn die Zahleigenschaften – vom mathematischen Standpunkt aus – eine andere Lösungsmethode nahe legen (BENZ, 2005; HIRSCH, 2001, zit. nach PADBERG & BENZ, 2011, S. 194; SELTER, 2000a; TORBEYNS, DE SMEDT, GHESQUIÈRE & VERSCHAFFEL, 2009a).

Schülerinnen und Schüler verwenden die Lösungsmethode *stellenweises Rechnen*, auch wenn diese im Unterricht nicht gelehrt wurde und sie dabei nicht erfolgreich sind (BLÖTE, KLEIN & BEISHUIZEN, 2000; MESETH & SELTER, 2002, S. 55; SELTER, 2000a; TORBEYNS, VERSCHAFFEL & GHESQUIÈRE, 2006).

Nach Einführung der algorithmischen Rechenverfahren überwiegt das dadurch implizierte Verständnis des dekadischen Systems, indem das Rechnen in den Stellenwerten betont wird (Csíkos, 2012; HEIRDSFIELD & COOPER, 2002; SELTER, 2000a). Außerdem bevorzugen Schülerinnen und Schüler die schriftlichen Algorithmen als Lösungsmethode – unabhängig davon, ob diese zum Lösen einer Aufgabe adäquat ist (Csíkos, 2012; HEIRDSFIELD & COOPER, 2002; SELTER, 2000a).

Rechenoperation und Aufgabentyp beeinflussen ansatzweise die praktizierte Lösungsmethode. Bei der Addition dominiert stellenweises Rechnen. Bei der Subtraktion dominiert schrittweises Rechnen (BENZ, 2005, S. 206). Bei Additionen mit Zehnerübergang werden eher weniger stellenweise Lösungsmethoden (zugunsten von kombinierten Methoden) praktiziert (BENZ, 2005, S. 207). Bei Subtraktionen mit Zehnerübergang erhöht sich hingegen nochmals schrittweises Rechnen (BENZ, 2005, S. 207). *High achiever* passen bereits auf der zweiten Schulstufe die Lösungsmethoden den jeweiligen Aufgaben an (TORBEYNS, VERSCHAFFEL & GHESQUIÈRE, 2006, S. 457).

Korrespondierend zum überwiegenden Einsatz von stellenweisem und schrittweisem Rechnen wird *Ableiten*, nämlich *Strategien mit Veränderung und Kompensation* und *Ergänzen*, kaum praktiziert (BENZ, 2005; Csíkos, 2012; SELTER, 2000a; TORBEYNS, DE SMEDT, GHESQUIÈRE & VERSCHAFFEL, 2009a).

Schülerinnen und Schüler können die Subtraktion kaum als *Ergänzen* deuten. *Ergänzen* wird vor allem bei Textaufgaben praktiziert, bei denen der Text die Ergänzungsvorstellung der Subtraktion unterstreicht, während bei Zahlenaufgaben dies nicht der Fall ist (BENZ, 2005, S. 250 ff.; DE SMEDT, TORBEYNS, STASSENS, GHESQUIERE & VERSCHAFFEL, 2010, S. 213). Einen ähnlichen Effekt gibt es nach PELTENBURG, VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN UND ROBITZSCH (2012) bei niederländischen Kindern mit sonderpädagogischem Förderbedarf. Somit stellen SELTER, PREDIGER, NÜHRENBÖRGER & HUSSMANN (2012) fest: „Especially in formal subtractions which are not embedded in a real-life context, the minus sign seems to be closely connected to the ta [take away, MF] model for many children“ (SELTHER, PREDIGER, NÜHRENBÖRGER & HUSSMANN, 2012, S. 391).

Beim Vergleich der Lösungszeiten bei Subtraktionen mit großer und kleiner Differenz (z. B. $82 - 7$ und $82 - 79$), die als Abziehen (verbal oder schriftlich) erhoben wurden, fällt auf, dass die Lösungszeit bei kleiner Differenz kürzer ist, obwohl objektiv ein zeitlicher Mehraufwand damit verbunden sein sollte (DE SMEDT, TORBEYNS, STASSENS, GHESQUIERE & VERSCHAFFEL, 2010). Die Autoren vermuten, dass Kinder wahrscheinlich sehr wohl Beziehungen zwischen den Zahlen wahrnehmen und durch Ergänzen lösen, jedoch verbal bzw. schriftlich dies nicht artikulieren (DE SMEDT, TORBEYNS, STASSENS, GHESQUIERE & VERSCHAFFEL, 2010, S. 213). Neueste Untersuchungen zeigen auch, dass sowohl Grundschulkin- der (PETERS, DE SMEDT, TORBEYNS, GHESQUIERE & VERSCHAFFEL, 2013) als auch Kinder mit sonderpädagogischem Förderbedarf (PETERS, DE SMEDT, TORBEYNS, VERSCHAFFEL & GHESQUIERE, 2014) *Ergänzen* bei geeigneten Aufgaben im Zahlenraum 100, wie z. B. $83 - 79$, bevorzugen.

Schülerinnen und Schüler, die flexibles Rechnen praktizieren, zeichnen sich durch verschiedene Merkmale aus. Dazu gehören ein aspektreiches Zahl- und Operationsverständnis, das Beherrschen der Grundaufgaben des kleinen Einspluseins und Einsminuseins ebenso wie Selbstvertrauen und eine positive Einstellung zum Fach (HEIRDSFIELD & COOPER, 2002; 2004; THRELFALL, 2002). Flexible Rechnerinnen und Rechner stützen sich beim Lösen von Aufgaben auf erkannte Aufgabenmerkmale und Zahlbeziehungen und nicht auf im Vorhinein präsente Lösungsmethoden (RATHGEB-SCHNIERER, 2006; 2010; THRELFALL 2009). Die Lösungswege hängen daher von verschiedenen Faktoren ab, nämlich bestimmten aufgabeninhärenten Merkmalen (BLÖTE, KLEIN & BEISHUIZEN, 2000; TORBEYNS, DE SMEDT, GHESQUIERE & VERSCHAFFEL, 2009b) und dem Erkennen dieser Merkmale im Lösungskontext (RATHGEB-SCHNIERER, 2006, 2010).

HEIRDSFIELD und COOPER (2002; 2004) stellen „routine expertise“ und „adaptive expertise“, (HATANO, 2003, S. xi) gegenüber. Sie beschreiben in ihren Fallstudien neben flexiblen Rechnerinnen und Rechnern einen weiteren Typ von Kindern, welche die Grundaufgaben des kleinen Einspluseins und Eins-

minuseins (number facts) beherrschen, die Aufgaben richtig (accurate) lösen und genauso wie die flexiblen Rechnerinnen und Rechner hohe Lösungsquoten erreichen, aber unflexibel sind. Für diese Kinder ist es nicht bedeutend, aufgabenhärente Merkmale zu erkennen, sondern sie stellen sich die Zahlen, wie bei den algorithmischen Rechenverfahren, untereinander vor (mental image of pen and paper algorithm). Sie können nicht „represent numbers in a variety of ways without concrete materials“ (HEIRDSFIELD & COOPER, 2002, S. 65). Die Ergebnisse von LINSEN, VERSCHAFFEL, REYNVOET und DE SMEDT (2015, S. 47) zeigen, dass sowohl Zahlenrechnen als auch algorithmische Rechenverfahren bezüglich Verarbeitungsgeschwindigkeit mit dem Zahlverständnis, das in diesem Zusammenhang als Größeneinschätzung von Zahlen (numerical magnitude expression) beschrieben wird, korrelieren. Hingegen korreliert nur Zahlenrechnen bezüglich Lösungsquote. Mit anderen Worten: Es gibt Schülerinnen und Schüler, die mithilfe algorithmischer Rechenverfahren hohe Lösungsquoten erreichen, jedoch Zahlen in ihrer Größe wenig einschätzen können.

Materialgebrauch

Der Aufbau von begrifflichen Strukturen im Bereich mehrstelliger Zahlen ist ein längerer Prozess, der durch unterrichtliche, soziale und handelnde Aktivitätsstrukturen mit Material unterstützt und bestimmt ist. Das, was ein Kind ‚sieht‘, wenn es Material verwendet, hängt von seinem individuellen Konzept, den „conceptual structures“ (FUSON, et al., 1997, S. 132) ab.

Besonders leistungsschwache Kinder setzen Anschauungsmaterial wenig effizient ein, weil sie die Struktur des Materials schlecht erkennen und trotz vermeintlicher Unterstützung die Rechnung oft falsch lösen (BENZ, 2005, S. 316; FRANKE & LEHMANN, 2005; PADBERG & HARRASS, 2001, S. 58; ROTTMANN & SCHIPPER, 2002, S. 70). Bei leistungsstärkeren Kindern ist der Materialgebrauch während der zweiten Schulstufe eher gering. Sie haben sich bereits von der Anschauungsebene gelöst und agieren zumeist mental (BENZ, 2005, S. 147, S. 157; ROTTMANN & SCHIPPER, 2002, S. 70).

Notieren der Teilschritte

Rechenwegsnotationen werden als ambivalent diskutiert. Das Notieren der Zwischenschritte kann bei komplexen Rechnungen den Lösungs- und Lernweg stützen, weil das Gedächtnis entlastet wird (RATHGEB-SCHNIERER, 2006, S. 288; SCHÜTTE, 2004, S. 146). Wenn das Notieren der Teilschritte als verfestigte Form zum stereotypen Lösen von Aufgaben mutiert, hemmt es aufgabenadäquates Vorgehen, weil den Kindern das mathematisch korrekte Aufschreiben, z. B. in Gleichungsschreibweise, nicht in allen denkbaren Varianten präsent ist. Das hat zur Folge, dass die dem Kind zur Verfügung stehende Notation und nicht das

zur Verfügung stehende Wissen über Zahl- und Aufgabenbeziehungen die Vorgangsweise bestimmt und daher nicht den gewünschten Ertrag an Denk- und Lösungswegen bringt (GRASSMANN, 1998, S. 45; RATHGEB-SCHNIERER, 2006, S. 291, S. 288; SCHÜTTE, 2004, S. 146).

Das Notieren der Teilschritte ergibt auch keine höhere Lösungsquote. Bei RATHGEB-SCHNIERER (2006, S. 270) sagen leistungsstarke Kinder, die zu Beginn der dritten Schulstufe verschiedene aufgabenadäquate Lösungswege praktizieren können, dass sie zum Lösen der Aufgaben im Zahlenraum 100 keine Notation mehr benötigen.

Kinder notieren selten Teilschritte, vermutlich weil sie angehalten werden, ihre Notationen korrekt und vollständig aufzuschreiben (BENZ, 2005, S. 316). Kinder, die eine Aufgabe schon mittels algorithmischen Rechenverfahrens lösen können, praktizieren (vermutlich wegen des hohen Schreibaufwands) nicht mehr halb-schriftliche Notationen, rechnen aber weiterhin im Kopf (SELTNER, 2000a, S. 250).

Vorkenntnisse von Kindern

Viele Autorinnen und Autoren (BENZ, 2005; FRANKE & LEHMANN, 2005; GRASSMANN, 1998; GRASSMANN, MIRWALD, KLUNTER & VEITH, 1998; PADBERG & HARRASS, 2001) weisen auf Lösungswege hin, die noch nicht im Unterricht thematisiert, jedoch bereits praktiziert werden. Zu Beginn der zweiten Schulstufe lösen ein Drittel der Schülerinnen und Schüler zweistellige Additionen ohne Zehnerübergang vor Einführung des Zahlenraums 100 richtig (BENZ, 2005, S. 353), nach Einführung der Zahlen bis 100 lösen ca. zwei Drittel der Schülerinnen und Schüler die Aufgaben richtig (FRANKE & LEHMANN, 2005, S. 5). Bei zweistelligen Subtraktionen ohne Zehnerübergang ergeben sich Lösungsquoten bis zu einem Drittel (BENZ, 2005, S. 353; GRASSMANN, MIRWALD, KLUNTER & VEITH, 1996, S. 47; PADBERG & HARRASS, 2001, S. 56). Die Schülerinnen und Schüler praktizieren überwiegend Zählen (BENZ, 2005, S. 357; PADBERG & HARRASS, 2001, S. 56), manche können bereits zweistellige Zahlen zerlegen und stellengerecht verknüpfen. Sie wählen öfter stellenweises Rechnen als schrittweises Rechnen (BENZ, 2005, S. 358; FRANKE & LEHMANN, 2005, S. 7; GRASSMANN, MIRWALD, KLUNTER & VEITH, 1996, S. 47).

Zu Beginn der dritten Schulstufe werden dreistellige Additionen ($243 + 329$) wesentlich häufiger (38 % bei GRASSMANN, MIRWALD, KLUNTER & VEITH, 1998, S. 53) als dreistellige Subtraktionen ($784 - 199$ mit 9 % bei GRASSMANN, MIRWALD, KLUNTER & VEITH, 1998, S. 53; bzw. $721 - 680$ mit 25 % bei DEUTSCHER & SELTER, 2007, S. 21), auch wenn sie durch eine Hilfsaufgabe zu einer leichten Aufgabe werden könnten, richtig gelöst. Liegen keine Stellenübergänge vor, ergeben stellenweises und schrittweises Rechnen idente Lösungsquoten. Bei Aufgaben mit Stellenübergang sind die Lösungsquoten beim schrittweisen Rechnen wesentlich höher als beim stellenweisen Rechnen (DEUTSCHER & SELTER, 2007, S. 25; GRASS-

MANN, 1998, S. 47). Insgesamt kann in Bezug auf informelle Lösungsmethoden eine große Heterogenität in den Leistungen zwischen Schülerinnen und Schülern sowie zwischen Klassen festgestellt werden.

Unterrichtskultur und Lösungswege

Wie die Entwicklung von Lösungswegen bezüglich Addition und Subtraktion im Unterricht gelingt, wird unterschiedlich gesehen und kontrovers diskutiert. In der vorliegenden Arbeit wird grob zwischen traditionell geführtem Unterricht und alternativ dazu einem mehrere Lösungswege fördernden Unterricht unterschieden (siehe dazu ausführlich bei BAROODY, 2003, S. 17 ff.; RECHTSTEINER-MERZ, 2013, S. 83 ff.).

Bei „traditionally schooled children“ (TORBEYNS, DE SMEDT, GHESQUIÈRE & VERSCHAFFEL, 2009a, S. 1) mit einem „routine approach“ (HEINZE, MAR-SCHICK & LIPOWSKY, 2009, S. 594 f.) wird eine Methode für die Lösung aller Probleme eines bestimmten Aufgabentyps für Kinder als Musterlösung angeboten (mit wenig oder gar keinem Raum für alternative Lösungsmethoden). BAROODY (2003, S. 20) differenziert im traditionell geführten Unterricht zwischen *skills approach* und *conceptual approach*. Während beim *skills approach* rein anleitend, ohne auf mathematische Zusammenhänge hinzuweisen, vorgegangen wird, steht beim *conceptual approach* eine kognitive, sukzessiv aufbauende, auf Verstehen ausgerichtete Instruktion im Mittelpunkt, bei der vom Kind erwartet wird, dass es die mathematischen Inhalte aufnimmt und versteht.

- In einem traditionell geführten Unterricht, bei dem die einzelnen Lösungswege kaum oder gar nicht thematisiert werden, verwenden Schülerinnen und Schüler eine Standardmethode, die sie auf alle Arten von Rechnungen anwenden (BENZ, 2005; SELTER, 2000a; TORBEYNS, DE SMEDT, GHESQUIÈRE & VERSCHAFFEL, 2009a).
- Kinder mit einem guten Auffassungsvermögen und mit ansteigendem Lernalter lösen auch bei einem traditionell ausgerichteten Unterricht viele Aufgaben mit passenden Lösungsmethoden, bei weniger leistungsstarken Kindern ist das nicht der Fall (TORBEYNS, VERSCHAFFEL & GHESQUIÈRE, 2006; TORBEYNS, DE SMEDT, GHESQUIÈRE & VERSCHAFFEL, 2009a).

Bei einem *investigative approach* (BAROODY, 2003, S. 22) werden die Kinder als aktiv lernende Individuen gesehen, die ihr Verständnis von Mathematik selbst konstruieren. Die Lehrperson stellt Lernangebote in den Mittelpunkt des Unterrichts, die zum Nachdenken, Forschen und zum Austausch anregen. Zusätzlich aktiviert sie die Schülerinnen und Schüler durch entsprechende Fragestellungen

und Impulse. Zentrales Prinzip ist, dass das Verstehen der Automatisierung vorausgeht und es das Ergebnis eines entdeckenden Lernprozesses ist.

- In einem Unterricht, der Zahl- und Aufgabenbeziehungen thematisiert, praktizieren die Schülerinnen und Schüler adäquate Lösungsmethoden (BLÖTE, KLEIN & BEISHUIZEN, 2000; HEINZE, MARSCHICK & LIPOWSKY, 2009). Das bedeutet, dass sehr wohl flexibles Rechnen durch Intervention erlernbar ist, insbesondere auch durch Übungen zur Schulung des Zahlenblicks (RATHGEB-SCHNIERER, 2006), auch bei leistungsschwächeren Kindern im Zahlenraum 20 (RECHTSTEINER-MERZ, 2013).
- Lösungsmethoden, die als „Musterlösung“ (SCHÜTTE, 2004, S. 133) bzw. als „Beispiellösungen“ (SCHÜTTE, 2004, S. 133) im Unterricht angeboten werden, wirken nach. Schülerinnen und Schüler tendieren dazu, den zuerst bzw. auch den zuletzt gelernten Lösungsweg vorwiegend anzuwenden (BEISHUIZEN & KLEIN, 1998; HEIRDSFIELD & COOPER, 2004; SCHÜTTE, 2004; SCHWABE, GRÜSSING, HEINZE & LIPOWSKY, 2014, S. 28 f.). Schülerinnen und Schüler setzen die unmittelbar vorher thematisierte *Compensate*-Strategie auch bei Aufgaben ein, die von der Aufgabenkonstellation weniger geeignet sind (TORBEYNS, DE SMEDT, GHESQUIERE & VERSCHAFFEL, 2009b, S. 586).
- Auch wenn mehrere Lösungsmethoden als „Beispiellösungen“ (SCHÜTTE, 2004, S. 133) angeboten werden, zeigen Kinder über die Zeit flexible Lösungswege (SCHWABE, GRÜSSING, HEINZE & LIPOWSKY, 2014, S. 28 f.).
- Die empirische Evidenz für die Wirksamkeit alternativer Lehransätze, welche flexibles Rechnen von Anfang an in der Primarstufe fördern, ist nicht ganz eindeutig. Zum Beispiel spielt in einer Interventionsstudie von HEINZE, MARSCHICK und LIPOWSKY (2009, S. 598) *Ergänzen* eine untergeordnete Rolle. Der Verfasserin dieser Arbeit ist auch keine einzige (Interventions-)Studie bekannt, die flexibles Rechnen im Zahlenraum über 20 bei leistungsschwachen Kindern überzeugend zeigen kann.

2.2.5 Fazit

Wie bereits im Abschnitt 2.1 festgehalten, stehen Fähigkeiten und Fertigkeiten im Rechnen in engem Zusammenhang mit dem Zahlverständnis. „The evidence suggests that invented strategies are closely connected to other concepts that might be taken as representing basic understanding, in particular the development of fundamental base-ten number concepts“ (CARPENTER, FRANKE, JACOBS, FENNEMA & EMPSON, 1997, S. 16). Daher wird in der vorliegenden Untersuchung davon ausgegangen, dass die Bearbeitung von Rechenaufgaben als Ausdruck des

Zahlverständnisses gedeutet werden kann. Das Addieren und Subtrahieren von mehrstelligen Zahlen ist nicht vorrangig ein Regelwissen über den Umgang mit Zahlen, sondern ist insbesondere im Bereich des Zahlenrechnens ein „Feld von Beziehungen zwischen Quantitäten und Zahlen“ (GERSTER & SCHULTZ, 2004, S. 4). Zahlen, Zahlbeziehungen und Aufgabenbeziehungen, die in speziellen Zeichen, nämlich in symbolischer Schreibweise als Rechenaufgaben mental oder direkt erfassbar sind, sollen auf der Grundlage einer quantitativen Interpretation für das Kind ‚Bedeutung‘ haben bzw. erhalten. Diese quantitative Interpretation wird als das „konzeptuelle mathematische Wissen“ (GERSTER & SCHULTZ, 2004, S. 4) oder in der vorliegenden Arbeit vorrangig als *Zahlverständnis* und *Wissen über Rechenoperationen* bezeichnet. Dieses konzeptuelle Wissen des einzelnen Kindes ist in der vorliegenden Arbeit die Basis der konsistenten Analyse, um intraindividuelle Entwicklungsverläufe nachzuvollziehen, einzuordnen und zu deuten.

Kinder ermitteln die Ergebnisse beim Rechnen sowohl zählend als auch rechnerisch (über den Einsatz von heuristischen bzw. operativen Strategien) oder sie rufen automatisiertes Wissen ab, indem sie auf Basisfakten zurückgreifen. Bei der Entwicklung des Rechnens im Zahlenraum bis 20 kann eine gewisse Reihenfolge vom Zählen über den Einsatz von heuristischen bzw. operativen Strategien zum automatisierten Wissen angenommen werden (GAIDOSCHIK 2010). Bei mehrstelligen Zahlen ist das Ergebnis nicht mehr direkt abrufbar, sondern wird über vielfältige Lösungsmethoden ermittelt. Um anhand von kindlichen Lösungsweisen das vorhandene Wissen über Zahlen und Rechenoperationen heben und die individuellen Konzepte deuten zu können, muss daher untersucht werden, welche Lösungsmethoden auftreten und wie diese praktiziert werden.

Zahlreiche empirische Untersuchungen weisen darauf hin, dass viele Schülerinnen und Schüler wenig reflektiert und teilweise unverstanden Lösungswege praktizieren. Es ist nicht klar, ob dies ein kurzfristiges oder ein längerfristiges Phänomen ist. Weiters sind Gründe für die konzeptuellen Schwächen unzureichend untersucht. Allerdings sind einmalige querschnittliche Untersuchungen nur begrenzt in der Lage, zur Aufklärung des Zustandekommens von arithmetischen Konzepten beizutragen. Ob spezifische Lösungswege punktuell bzw. langfristig auftreten, welche Ausprägungen sich zeigen und wie kohärent Lösungsmethoden praktiziert werden, ist weitgehend ungeklärt. Hierzu werden Längsschnittstudien benötigt, die es erlauben, arithmetische Entwicklungsverläufe über die Zeit hinweg zu verfolgen, Ursachen dieser Entwicklungen zu analysieren und Handlungsmöglichkeiten abzuleiten. Diese fehlen bislang.

2.3 Fehler – ein Zugang zum Denken der Kinder

Fehler sind natürliche, unumgängliche Begleiterscheinungen des Lernprozesses und bieten Einblicke in das Denken des Kindes. Wenn ein Kind eine Aufgabe erfolgreich löst, ist das Wissen in Bezug auf das Verständnis der Zahlen wegen ihrer „Glattheit und Verdecktheit“ (LORENZ, 1987, S. 210) kaum zugänglich. Es bleibt offen, wie und weshalb so gehandelt wurde. Fehler hingegen öffnen ein Fenster zum Denken der Kinder. Somit kann das arithmetische Vorgehen von Schülerinnen und Schülern dichter beschrieben werden (WITTMANN, 2007b, S. 177). Fehler sollen nicht nur beschrieben, sondern auch verstanden werden. Daher geht es bei der Fehleranalyse einerseits um eine Deskription der Fehler und des Weiteren, wenn möglich, auch um eine Erklärung des Zustandekommens von Schülerfehlern (LORENZ, 1987, S. 213). In der vorliegenden Arbeit werden die Fehler bei Addition und Subtraktion und die damit verbundenen Fehlvorstellungen analysiert, um auf kognitive Konzepte von Stellenwert und auf ein Wissen über Operationen schließen zu können.

2.3.1 Fehlermuster und mögliche Ursachen

Im Fokus stehen systematische Fehler, bei denen dasselbe Fehlermuster bei gleichartigen Aufgaben immer wieder auftritt. In diesem Zusammenhang sind Fehler Indikatoren für ein tiefer liegendes falsches Verständnis mathematischer Begriffe und Verfahren. Die nachfolgende Kategorisierung von Fehlern ist der Thematik der vorliegenden Arbeit angepasst, nämlich fokussiert auf das Zahl-, insbesondere Stellenwertverständnis bzw. das Wissen über Rechenoperationen, und erhebt nicht den Anspruch auf Vollständigkeit. Den Ausführungen liegen Systematisierungen von BENZ (2005, S. 346 f.), PADBERG und BENZ (2011), SCHÄFER (2005, S. 52) und SCHIPPER (2009a, S. 137 ff.) zugrunde.

Fehler aufgrund eines problematischen Zahlverständnisses

Neben Fehlern bei der (auditiven) „Zahlaufnahme“ (SCHÄFER, 2005, S. 52) zeigen sich auch Fehler in der Reihenfolge des Stellenwerts von Ziffern beim Notieren bzw. beim Lesen einer Zahl. Diese werden als „Inversionsfehler“ (BENZ, 2005, S. 347), „Zahlendreher“ (SCHIPPER, 2009a, S. 138, WARTHA & SCHULZ, 2012, S. 56) bzw. „Fehler bei der Erfassung des Stellenwerts von Ziffern“ (PADBERG & BENZ, 2011, S. 108) bezeichnet. Das Kind liest die Zahl verkehrt oder schreibt nach der Verknüpfung mit der zweiten Zahl das Ergebnis ‚verdreht‘ an, wie z. B. $23 + 9 = 41$ ($32 + 9 = 41$) bzw. $74 - 5 = 96$ ($74 - 5 = 69$; dann Zahlendreher) (siehe dazu ausführlich bei SCHIPPER, 2009a, S. 138). Nach SCHIPPER (2009a, S. 138)

können Zahlendreher auch mit einer Links-Rechts-Problematik zusammenhängen und sind daher nicht zwingend auf ein mangelndes Stellenwertverständnis zurückzuführen. Somit kann aus diesem Fehlermuster nicht eindeutig geschlossen werden, ob der Stellenwert nicht verstanden wurde oder ob aufgrund einer Links-Rechts-Problematik falsch notiert worden ist.

Eindeutigere Hinweise auf ein mangelndes Stellenwertverständnis sind *falsche Stellenwertzuordnungen* oder *fehlende Verknüpfung(en) von Stellenwerten* beim Rechnen. Bei diesen Fehlermustern werden die Ziffern bzw. Zahlen nicht in den identen Stellenwerten, sondern beliebig miteinander, wie z. B. $32 + 7 = 102$ bzw. $25 + 43 = 59$ (also $2 + 3$ und $5 + 4$) verknüpft. Manchmal werden auch nicht alle Stellenwerte mit einbezogen, wie z. B. bei der Aufgabe $23 + 35 = 38$, bei der die Zehnerstelle nicht verknüpft worden ist. Fehlt eine Stellenwertverknüpfung zu Beginn der zweiten Schulstufe, ist dies nach BENZ (2005, S. 226) ein starker Indikator für ein mangelndes Stellenwertverständnis. Fehlt eine von mehreren Stellenwertverknüpfungen in einer höheren Schulstufe, so ist in Betracht zu ziehen, dass dies eher auf ein nicht ausreichendes Verständnis der Verknüpfung einzelner Teiloperationen als auf ein mangelndes Stellenwertverständnis hinweist.

Bei *Fehlern im Stellenübergang* werden zwar die einzelnen Zahlen bzw. Ziffern stellengerecht verknüpft, allerdings keine bzw. nur teilweise Bündelungen bzw. Entbündelungen durchgeführt. Bei der Addition ergeben sich bei Vorgehen, bei denen der Stellenübergang nicht berücksichtigt wird, Ergebnisse wie z. B. bei $527 + 399 = 816$. Bei der Subtraktion ergeben sich zwei Varianten, nämlich eine, bei der kohärent wie bei der Addition die Zahlen- bzw. Ziffernwerte in den einzelnen Stellenwerten im Bereich der natürlichen Zahlen mathematisch richtig berechnet werden, wie z. B. $391 - 48 = 350$ mit $1 - 8 = 0$. Die wesentlich häufiger anzutreffende Variante ist das konsequente Subtrahieren der jeweils kleineren Teilzahl(-ziffer) von der größeren Teilzahl(-ziffer), wie z. B. $391 - 48 = 357$ mit $8 - 1 = 7$. Dieser Fehler wird als „smaller-from-larger bug“ (BEISHUIZEN, 1993, S. 310; VERSCHAFFEL, GREER & DE CORTE, 2007, S. 570), „Kleiner-minus-größer-Fehler“ (DEUTSCHER & SELTER, 2007, S. 25), „Kleinere minus größere Zahl“ (VOSSMEIER, 2012, S. 153) bzw. als „absolute Differenz an der Einerstelle“ (SCHIPPER, 2009a, S. 139) bezeichnet. Dieser Fehler, in weiterer Folge als *Kleiner-minus-größer-Fehler* benannt, zeigt sich sowohl beim Zahlen- als auch beim Ziffernrechnen.

Während eine teilweise Bündelung bzw. Entbündelung, vor allem wenn sie vereinzelt auftritt, auch als Flüchtighkeitsfehler interpretiert werden kann, sind durchgehend nicht vorhandene Bündelungen bzw. Entbündelungen starke Indikatoren für ein problematisches Stellenwertverständnis.

Fehler aufgrund eines problematischen Verständnisses bzw. Ausführens von Operationen

Neben der irrtümlichen Subtraktion bei der Addition (und umgekehrt) sind Fehler wegen eines unzureichenden Verständnisses bzw. eines unsicheren Umgangs mit den operativen Rechenstrategien charakteristisch. So werden unter anderem Teiloperationen vergessen, wie z. B. $82 - 57 = 32$ (Subtraktion der Einer fehlt). Dieses Fehlermuster ist nicht eindeutig einem bestimmten Fehlkonzept zuzuordnen, weil es, besonders auf der zweiten Schulstufe, auch auf ein mangelndes Stellenwertverständnis hinweisen kann.

Sehr oft treten *falsche Teiloperationen* auf. Beim „Kipp- oder Klappfehler“ (SCHIPPER, 2009a, S. 139) wird die Operationsrichtung in den einzelnen Teiloperationen nicht durchgehend eingehalten. Vor allem beim *schrittweisen Rechnen* wird der Teilsummand bzw. -subtrahend einmal addiert, dann subtrahiert (bzw. umgekehrt), wie z. B. bei $23 + 9 = 28$ mit $23 + 7 = 30$ und $30 - 2 = 28$ oder $100 - 13 = 93$ mit $100 - 10 = 90$ und $90 + 3 = 93$. Dieser Fehlertyp tritt auch bei der *Hilfsaufgabe* bzw. beim *gegen- bzw. gleichsinnigen Verändern* auf, wenn zwar die Hilfszahl passend addiert bzw. subtrahiert wird, jedoch in der folgenden bzw. gleichzeitig durchgeführten kompensatorischen Teiloperation falsch ausgeglichen wird, wie z. B. bei $784 - 199 = 783$ mit $784 - 200 = 584$ und $584 - 1 = 583$.

Eine gewisse Ähnlichkeit zum Kipp- oder Klappfehler zeigt *konsequentes Subtrahieren* (BENZ, 2005, S. 347) bei der Subtraktion, bei der sowohl der Zahlenwert der einzelnen Stellenwerte vom Minuenden als auch vom Subtrahenden konsequent subtrahiert werden, wie z. B. $82 - 57 = 23$ mit $82 - 50 = 32$, $32 - 7 = 25$ und $25 - 2 = 23$.

Die häufigsten *Zählfehler* resultieren aus einem fälschlichen Mitzählen des ersten Summanden bzw. Minuenden. So entstehen Fehler um minus eins bei der Addition und plus eins bei der Subtraktion ($23 + 9 = 31$; $74 - 8 = 67$). Die fälschliche Anwendung, dass erst die nächste Zahl die Ergebniszahl ist, führt bei Additionen zu einem Fehler um plus eins und bei Subtraktionen zu einem Fehler minus eins ($23 + 9 = 33$; $74 - 8 = 65$). Solche Zählfehler unterlaufen auch beim Zählen der anderen Zahlen bzw. Ziffern in den jeweiligen Stellenwerten. Es entstehen Fehler ± 10 bzw. ± 100 (BENZ, 2005, S. 88, S. 346; SCHIPPER, 2009a, S. 137). So hält SCHIPPER (2009a, S. 138) fest, dass beim Rechnen im Zahlenraum bis 100 bei Abweichungen um ± 1 , ± 10 , ± 11 und ± 9 vom richtigen Ergebnis zählendes Rechnen anzunehmen sei. Ebenso kann eine Weiterführung auf den Zahlenraum bis 1 000, vor allem bei stellenweisem Vorgehen, angenommen werden.

Als *Rechenfehler* (im engeren Sinn) gelten falsche Ergebnisse, welche in der beeinträchtigten Abrufbarkeit von Basisfakten (Einspluseins) und den analogen Weiterführungen liegen, wie z. B. Fehler bei der Addition bzw. Subtraktion

Vielfacher von Zehnerpotenzen mit und ohne Stellenwert-Übergang (MESETH & SELTER, 2002, S. 52).

2.3.2 Empirische Evidenz bezüglich Lösungsquote und Fehler

Additionsaufgaben werden häufiger richtig gelöst als Subtraktionsaufgaben (GRASSMANN, MIRWALD, KLUNTER & VEITH, 1998, S. 16; MESETH & SELTER, 2002, S. 54; SELTER, 2000a, S. 244; SELTER, 2000b). Bei MESETH und SELTER (2002, S. 54) treten bei der Subtraktion fast doppelt so viele Fehler wie bei der Addition auf.

Die Erfolgsquoten der einzelnen Lösungsmethoden sind unterschiedlich. Bei der Addition ergibt sich ein differenziertes Bild. Bei den Untersuchungen von BEISHUIZEN (1993, S. 310) und BENZ (2005, S. 318), die beide auf der zweiten Schulstufe die Daten erhoben haben, ist *stellenweises Rechnen* im Vergleich zu *schrittweisem Rechnen* ungefähr gleich erfolgreich. Bei SELTER (2000a) ist vor Einführung der algorithmischen Rechenverfahren auf der dritten Schulstufe *stellenweises Rechnen* erfolgreicher als *schrittweises Rechnen*. Bei der Subtraktion hingegen sind die Forschungsbefunde eindeutig. *Schrittweises Rechnen* ist die erfolgreichere Lösungsmethode (BEISHUIZEN, 1993, S. 310; MESETH & SELTER, 2002, S. 54; SELTER, 2000a, S. 248). Vor allem beim *stellenweisen Rechnen* tauchen vermehrt Fehler auf. DEUTSCHER und SELTER (2007, S. 25) halten gesamt, über alle Rechenarten, fest, dass *stellenweises Rechnen* bei Aufgaben mit Zehner- bzw. Hunderterübergängen zu einer hohen Anzahl von falschen Ergebnissen führt.

Während bei der Addition die wesentlich geringere Fehleranzahl auf *Fehler aufgrund eines problematischen Verständnisses und Ausführens von Operationen* zurückzuführen sind, dominiert bei der Subtraktion neben *Fehler aufgrund eines problematischen Verständnisses und Ausführens von Operationen* vor allem der *Kleiner-minus-größer-Fehler* (BEISHUIZEN, 1993, S. 310; DEUTSCHER & SELTER, 2007, S. 25; MESETH & SELTER, 2002, S. 55). Ungefähr ein Drittel, 30 % (MESETH & SELTER, 2002, S. 55) bzw. 36 % (DEUTSCHER & SELTER, 2007, S. 25) der falschen Ergebnisse bei der Subtraktion (3. bzw. 4. Schulstufe) sind darauf zurückzuführen. Auf der zweiten Schulstufe ist der *Kleiner-minus-größer-Fehler* für BENZ (2005) aufgrund der eingesetzten Items wenig relevant, während bei BEISHUIZEN (1993, S. 310) der Fehler beim *stellenweisen Rechnen* (Addition und Subtraktion) am häufigsten, allerdings fast gleich bedeutsam mit anderen Fehlern auftritt. Bei SCHÄFER (2005, S. 287; S. 320), welche rechenschwache Kinder in der Eingangsstufe in den Hauptschulen Baden-Württembergs untersucht, sind sowohl bei der Addition als auch bei der Subtraktion die meisten Fehler nicht auf Zählfehler, sondern auf ein mangelndes Zahlverständnis zurückzuführen.

2.3.3 Fazit

Fehler bieten Einblicke in das Denken der Kinder und ermöglichen Rückschlüsse auf kognitive Konzepte von Stellenwert und Wissen über Rechenoperationen. Da Fehler genuin falsche Ergebnisse bzw. problematische Lösungswege fokussieren, sind sie vor allem Indikatoren von wenig reflektierten und teilweise unverstandenen Lösungsmethoden und den dahinterliegenden Konzepten. So kann z. B. in der vorliegenden Untersuchung der von MESETH und SELTER (2002, S. 55) als „grundsätzliches Problem“ bezeichnete, häufig auftretende *Kleiner-minus-größer-Fehler* über wenig elaborierte Konzepte bezüglich Stellenwert und Operationsverständnis Auskunft geben.

Um die Denkvorgänge analysieren zu können, bietet sich an, das Kind bei seinen Lösungsprozessen zu beobachten und es diese verbalisieren zu lassen bzw. die schriftlich vorliegenden Notationen der Ergebnisse von Schülerinnen und Schülern zu betrachten, um die zugrunde liegenden kognitiven Operationen zu rekonstruieren (LORENZ, 1987, S. 223; WITTMANN, 2007a, S. 173).

Bei nur schriftlich vorliegenden Ergebnissen, wenn Schülerinnen und Schüler ihre Lösungswege nicht kommunizieren, können aufgrund bestimmter Fehlermuster dementsprechende Denkwege vermutet werden. So ist es z. B. laut SCHIPPER (2009a, S. 138) angebracht, bei einem um ± 1 , ± 10 , ± 11 und ± 9 bzw. ± 100 , ± 110 und ± 90 abweichenden Ergebnis auf *Zählfehler*, aber auch auf das „Lösungswerkzeug“ (RATHGEB-SCHNIERER, 2011, S. 16) *Zählen* zu schließen. Rein notierte falsche Ergebnisse haben auch Grenzen. So ist z. B. dem notierten *Kleiner-minus-größer-Fehler*-Ergebnis nicht anzusehen, ob stellenweise mit den jeweiligen Zehnern bzw. Hundertern oder mit den Ziffern in den Stellenwerten gerechnet worden ist (SCHIPPER, 2009a, S. 140). Dies lässt sich nur über Interviews erschließen.

Insgesamt ist die Fehleranalyse ein wertvolles Instrument, um beim Ausführen von Lösungswegen Konzepte von Stellenwert und Wissen über Rechenoperationen erschließen zu können.

2.4 Längsschnittstudien zur arithmetischen Leistung im Grundschulalter

In diesem Abschnitt erfolgen nun Ausführungen zum Ist-Stand der Forschung von längsschnittlich angelegten Studien mit mehreren Erhebungszeitpunkten zu Addition und Subtraktion von der zweiten bis zur vierten Schulstufe. In den nachfolgend vorgestellten Untersuchungen, die nach Dauer des Untersuchungszeitraums, nach einjährig auf der zweiten Schulstufe (Zahlenraum 100), einjährig vor und nach Einführung algorithmischer Rechenverfahren (Zahlenraum 1 000) und mehrjährig gegliedert sind, werden vor allem Ergebnisse, die auf Entwicklungsverläufe abzielen, erörtert.

2.4.1 Untersuchungen auf der zweiten Schulstufe (Zahlenraum 100)

BENZ (2005) untersucht Vorkenntnisse bzw. die Entwicklung der „Denk- und Lernwege“ (BENZ, 2005, S. 3) auf der zweiten Schulstufe. In klinischen Interviews werden 100 Kindern bei jedem der drei Erhebungszeitpunkte zehn Plus- und zehn Minusaufgaben gestellt, davon die Hälfte als Text-, die andere Hälfte als Zahlenaufgaben. Die Daten werden nach *Lösungsquote*, *Rechenmethode*² (Kopf, Material, Finger, halbschriftlich), *Zählstrategien* (Alles Zählen, Weiterzählen), *Rechenstrategien* (schrittweise, stellenweise, Mischform) und *Fehlern* (Zählfehler, Materialfehler, Stellenfehler, Operationsfehler) gesamt, gruppiert nach Leistungsniveaus und Einzelne als „Kinderportraits“ (BENZ, 2005, S. 273 ff.), ausgewertet.

Bei Betrachtung der Gesamtstichprobe fällt auf, dass rechnerische Lösungen bereits am Schuljahresanfang, noch vor Einführung des Zahlenraums 100, mit 33 % einen beachtlichen Anteil einnehmen (am Ende des Schuljahres 60 %). Während der ganzen zweiten Schulstufe überwiegt (auf Basis von sieben Aufgaben des Aufgabentyps $ZE \pm ZE$) die Lösungsmethode *Stellenweise* (BENZ, 2005, S. 203). *Schrittweise* und die Mischform aus beiden Lösungsmethoden nehmen im Verlauf des Schuljahres zu, liegen aber auch zum dritten Testzeitpunkt immer noch hinter der Lösungsmethode *Stellenweise*. Die Zunahme der Lösungsmethode *Schrittweise* führt BENZ (2007, S. 60) darauf zurück, dass in den Schulbüchern vorrangig *Schrittweise* angeführt und daher oft im Unterricht thematisiert wird. *Ableiten* wird selten praktiziert. Der Anteil an *Ableiten* bleibt

2 BENZ (2005) verwendet der zweiten Schulstufe angepasste Begrifflichkeiten und Kategorisierungen, die mit der vorliegenden über drei Schulstufen konzipierten Untersuchung bezüglich *Lösungsquote*, *Lösungsmethoden* (BENZ nennt sie Rechenstrategien) und *Fehler* weitgehend übereinstimmt. *Rechenmethode* und die angeführten Ausprägungen sind auf höheren Schulstufen weniger relevant.

während der zweiten Schulstufe gleich und steigt nicht mit zunehmendem Lernalter (BENZ, 2005, S. 195, S. 206).

Bei Betrachtung von gruppierten Entwicklungsverläufen fällt auf, dass Kinder mit durchschnittlichem und eher schwachem Leistungsniveau zu Beginn des Schuljahres noch wenig bzw. keine rechnenden Lösungsmethoden praktizieren. Während die leistungsstarken und durchschnittlichen Kinder bereits im ersten Schulhalbjahr sich vom Zählen ablösen, kann bei den leistungsschwachen Kindern erst in der zweiten Hälfte des Schuljahres eine signifikante Abnahme des Zählens beobachtet werden (BENZ, 2005, S. 189). Meist leistungsstarke Kinder setzen bereits am Schulanfang vor allem die Lösungsmethode *Stellenweise* ein (16 von 100 Kindern) und verwenden sie das ganze Schuljahr als Hauptstrategie. Durchschnittlich leistungsstarke Kinder verwenden erst ab Mitte der zweiten Schulstufe *Stellenweise* als bevorzugte Lösungsmethode. Ähnliche Entwicklungen, die im Laufe des Schuljahres zuerst die leistungsstarken, später die durchschnittlichen und noch später die leistungsschwachen Kinder erreichen, lassen sich auch bei den Fehlermustern beobachten.

TORBEYNS, VERSCHAFFEL und GHESQUIÈRE (2006) verfolgen, wie BENZ (2005) auf Basis bestehenden Unterrichts, die Entwicklungsverläufe von 69 Kindern (in vier verschiedenen Schulklassen), abgestuft in drei Leistungsgruppen, innerhalb der zweiten Schulstufe. Die Adaptivität der kindlichen Strategiewahl, vor (Mitte der zweiten Schulstufe) und nach der Thematisierung im Unterricht (Ende der zweiten Schulstufe), wird auf der Grundlage der *Aufgabe* (Addition, Subtraktion), deren *richtiger Lösung* und der *Geschwindigkeit* operationalisiert. Die Aufgaben werden mündlich mithilfe von Impulskarten gestellt. Die Erhebung ist zweigeteilt. Einmal ist die Lösungsmethode vorgegeben, das andere Mal frei wählbar. Vorgegeben sind *stellenweises Rechnen* (Split-Strategien) und *schrittweises Rechnen* (Jump-Strategien). Eine adaptive Wahl der Lösungsmethode ist dann gegeben, wenn die frei gewählte Lösungsmethode mit der vorgegebenen Lösungsmethode, die schneller und auch richtig gelöst worden ist, übereinstimmt.

Bei Betrachtung der Gesamtstichprobe fällt auf, dass bei der ersten Erhebung, vor Thematisierung im Unterricht, wesentlich mehr als die Hälfte der Kinder alle Aufgaben entweder nur mit der Jump-Strategie (22 %) oder nur mit der Split-Strategie (48 %) lösen. Wie erwartet, steigt aufgrund des stattfindenden Unterrichts die Anzahl der Aufgaben, welche mit der Jump-Methode gelöst werden (von 20 % auf ca. 50 %). Bei der zweiten Erhebung, am Ende des Schuljahres, lösen jeweils ein gleich hoher Anteil an Kindern, nämlich 23 %, nur mit einer Split- bzw. Jump-Methode. Mit anderen Worten heißt das auch, dass 23 % der Kinder am Ende der zweiten Schulstufe die Split-Methode, welche im Unterricht nicht thematisiert worden ist, praktizieren.

In den jeweiligen Leistungsgruppen ist die Veränderung bezüglich der Anzahl der Kinder, welche die Lösungsmethoden wechselten, gleich. „So the number of high achievers who did or did not change their strategies between assessments was the same as the number of above-average and below-average achievers who did or did not change their strategies“ (TORBEYNS, VERSCHAFFEL & GHESQUIÈRE, 2006, S. 453). *High achiever* können die Methoden den Aufgaben und auch ihren persönlichen Zugangsweisen bei beiden Erhebungszeitpunkten anpassen. *Kinder mit mittlerem Leistungsniveau* wenden beim ersten Erhebungszeitpunkt keine passenden Methoden an, um die Aufgaben zu lösen. Beim zweiten Erhebungszeitpunkt können Tendenzen zu adaptiven Entscheidungen festgestellt werden. Bei *Kindern mit eher schwachem Leistungsniveau* sind auch beim zweiten Erhebungszeitpunkt keine Tendenzen zur adaptiven Lösungsmethodenwahl bezüglich Lösungsrichtigkeit und Geschwindigkeit zu erkennen. (TORBEYNS, VERSCHAFFEL & GHESQUIÈRE, 2006, S. 454 ff.)

Während BENZ (2005) und TORBEYNS, VERSCHAFFEL und GHESQUIÈRE (2006) eine Bestandsaufnahme von traditionell geführtem Unterricht vornehmen, verfolgt RATHGEB-SCHNIERER (2006) in einer Interventionsstudie die Entwicklung der Rechenwege auf Basis offener Lernangebote von ersten individuellen Vorgehensweisen bis zum (gewünschten) flexiblen Rechnen. Ausgehend von den dokumentierten Bedingungen des Lernens, nämlich Unterrichtsaktivitäten zum flexiblen Rechnen mit Schulung des Zahlenblicks, werden die Entwicklungsverläufe über klinische Interviews in drei Erhebungswellen (Mitte und Ende der zweiten Schulstufe, Beginn der dritten Schulstufe) von allen Kindern der Klasse erhoben, die am Unterricht, der den Zahlenblick schult, teilgenommen haben.

Die Analysen der Interviews ergeben acht Varianten des Lösungsverhaltens, die graduell zu flexiblem bzw. nicht flexiblem Rechnen führen (RATHGEB-SCHNIERER, 2006, S. 267 f.):

- Variante 1: Ein „mechanischer“ Rechenweg, der nicht unbedingt zum Erfolg führt.
- Variante 2: Verschiedene „mechanische“ Rechenwege, die nicht unbedingt zum Erfolg führen.
- Variante 3: Ein gleich bleibender Rechenweg, der begründet werden kann.
- Variante 4: Verschiedene Rechenwege ohne erkennbares aufgabenadäquates Handeln.
- Variante 5: Ein Hauptrechenweg, von dem bei manchen Aufgaben unbegründet abgewichen wird.
- Variante 6: Gezieltes Experimentieren mit einem Rechenweg.

- Variante 7: Ein Hauptrechenweg, von dem bei manchen Aufgaben begründet abgewichen wird.
- Variante 8: Verschiedene aufgabenadäquate Rechenwege.

Beim ersten Erhebungszeitpunkt, der Standortbestimmung, können hauptsächlich die Varianten 1 bis 4, im letzten Erhebungszeitpunkt hingegen oft die Varianten 7 bis 8 beobachtet werden. Die leistungsschwächsten Kinder können zu Beginn der dritten Schulstufe einen Hauptrechenweg praktizieren, deren Lösungswege sie sicher ausführen, nachvollziehbar begründen und erklären können (Variante 3). Bei den leistungsstärksten Kindern zeigt sich eine Vielfalt an Lösungswegen, die mit den spezifischen Aufgabenmerkmalen zusammenhängen (Variante 8). Diese Kinder erkennen Zahl- und Aufgabenbeziehungen und nutzen sie, indem sie Zahlzerlegungen und Analogiewissen aufgabenadäquat einsetzen. Darüber hinaus sind sie in der Lage, zu einer Aufgabe alternative Lösungswege darzustellen und zu begründen, welcher der beiden Lösungswege ihnen geeigneter erscheint. Im Interview bestätigen alle Kinder dieser Gruppierung, dass sie zum Lösen von Aufgaben im Zahlenraum 100 keine Notation benötigen. (RATHGEB-SCHNIERER, 2006, S. 270)

Alle drei exemplarisch ausgewählten Studien zeigen eine *zeitlich versetzte Entwicklung* des Einsetzens bestimmter Lösungswege in den verschiedenen Leistungsgruppen. TORBEYNS, VERSCHAFFEL und GHESQUIÈRE (2006) können auch eine zeitversetzte Entwicklung betreffend adaptiver Expertise bezüglich Lösungsrichtigkeit und Geschwindigkeit feststellen. Ähnlich merkt RATHGEB-SCHNIERER (2006, S. 294 f.) an, dass flexibles Rechnen kein „Alles-oder nichts-Phänomen“ ist, sondern sich sukzessive entwickelt. Aufgrund des Beobachtungsfensters über ca. ein Jahr bleibt offen, inwieweit in den weiteren Schulstufen über einen längeren Zeitraum hinweg von einer zeitversetzten Entwicklung in den Lösungswegen ausgegangen werden kann. Weiters ist nicht geklärt bzw. zu klären, wie z. B. BENZ (2005, S. 319) bei den Leistungsschwächsten andeutet, dass bzw. ob sich manche Kinder auch nicht in einer moderat erwarteten Zeitdauer weiter entwickeln oder Fehlendes auftritt.

Bei einem traditionell geführten Unterricht führen die Bedingungen des Lernens, z. B. die Thematisierung von *schrittweisem Rechnen*, zwar zu Veränderungen im Lösungsverhalten, aber nicht in dem im didaktischen Denken erwarteten Ausmaß. Die Kinder verwenden eine Standardmethode, die jedoch nicht mit den im Unterricht gelernten Lösungsmethoden übereinstimmen muss. Trotz Thematisierung von *schrittweisem Rechnen* wird *stellenweises Rechnen* durchgeführt. Warum manche Kinder Lösungsmethoden wechseln und andere wieder nicht, bleibt sowohl bei BENZ (2005, S. 220) als auch bei TORBEYNS, VERSCHAFFEL und

Ghesquière (2006, S. 458 f.) offen. Dazu stellen Torbeyns, Verschaffel und Ghesquière (2006, S. 458 f.) explizit fest, dass der Wechsel der Lösungsmethoden zu schrittweisem bzw. stellenweisem Rechnen nicht mit dem Leistungsstand zusammenhängt. Letztendlich ist in diesen beiden Untersuchungen nicht geklärt, warum manche Kinder bei denselben Lösungsmethoden bleiben und andere Kinder die Lösungsmethode wechseln.

2.4.2 Untersuchungen vor und nach Einführung der algorithmischen Rechenverfahren (Zahlenraum 1 000)

Während die angeführten Studien im vorigen Abschnitt den Zahlenraum 100 thematisieren, analysieren Selter (2000a) bzw. MeSETH und Selter (2002) in einer deskriptiven Studie die Vorgehensweisen bei Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 1 000. Im Mittelpunkt des Forschungsinteresses steht das Lösungsverhalten beim Übergang vom Kopfrechnen bzw. halbschriftlichen Rechnen zu algorithmischen Rechenverfahren. Vom Februar der dritten Schulstufe bis zum Oktober der vierten Schulstufe (acht Monate) wurden bei ca. 300 Schülerinnen und Schülern dreimal dieselben Aufgaben schriftlich gestellt. In den darauffolgenden Tagen wurden bei 36 Schülerinnen und Schülern Interviews über dieselben Aufgaben durchgeführt. Die Daten wurden, kategorisiert nach Rechentypen, nämlich *Kopfrechnen*, *halbschriftliches Rechnen*, *algorithmische Rechenverfahren*, als „schriftliches Rechnen“ (Selter, 2000a, S. 228) bezeichnet, bei halbschriftlich durchgeführten Rechnungen auch nach Lösungsmethoden, als „Strategien“ (Selter, 2000a, S. 247) bezeichnet, nämlich *Stellen extra*, *schrittweise*, *stellen- und schrittweise*, *Ergänzen*, *Vereinfachen* und *Zusammenfassen*, und nach Lösungsquote ausgewertet. Die mündlich erhobenen Daten von 36 Kindern wurden zusätzlich nach Fehlermustern untersucht (MeSETH & Selter, 2002).

Bei der Auswertung der Gesamtstichprobe fällt auf, dass die Lösungsquote während des Untersuchungsfensters von ca. 51 % auf ca. 74 % (Selter, 2000a, S. 242) steigt, wobei jeweils ein Unterschied von ca. 20 % zwischen Minus- und Plusaufgaben bei allen Erhebungszeitpunkten festzuhalten ist. Während beim ersten Erhebungszeitpunkt, vor Einführung der algorithmischen Rechenverfahren, *halbschriftliches Rechnen* und *Kopfrechnen* vorherrschen, sind nach Einführung der schriftlichen Algorithmen diese mit Anteilen von knapp über 50 % am häufigsten. Die Dominanz der algorithmischen Rechenverfahren ist nicht aufgabenspezifisch, sondern lässt sich über alle Aufgaben weg beobachten (Selter, 2000a, S. 249). Mehr als die Hälfte der Schülerinnen und Schüler rechnen auch Aufgaben, wie z. B. $701 - 698$ oder $250 + 379 + 250$, algorithmisch. Halbschriftliches Rechnen verschwindet fast völlig (mit Anteilen von in der Regel

weniger als 10 %), während das Kopfrechnen weiterhin einen vergleichsweise hohen Anteil (rund 30 %) hat.

Es zeigen sich große interindividuelle Unterschiede im Lösungsverhalten innerhalb der einzelnen Erhebungszeitpunkte. Ca. $\frac{3}{4}$ der Schülerinnen und Schüler lösen, exemplarisch am Erhebungszeitpunkt Oktober der vierten Schulstufe gezeigt, alle sechs Plusaufgaben und alle sechs Minusaufgaben entweder durch *Kopfrechnen*, *halbschriftliches Rechnen* oder mit *algorithmischen Rechenverfahren*. Auch bei der Wahl der *Lösungsmethode* zeigt sich bei der Analyse der (nach Einführung algorithmischer Rechenverfahren wenigen) halbschriftlichen Rechnungen ein relativ stabiles Lösungsverhalten (SELTER, 2000a, S. 250). *Ableiten* tritt kaum auf. Die Schülerinnen und Schüler rechnen sämtliche Aufgaben gemäß einer Lösungsmethode, also zum Beispiel jede Aufgabe (und dann auch 701 – 698) nach der Methode *stellenweises Rechnen* (SELTER, 2000a, S. 250). In diesem Zusammenhang fällt auf, dass stellenweises Rechnen – „Stellenwerte extra“ (MESETH & SELTER, 2002, S. 55) – bei der Subtraktion im Unterricht überhaupt nicht thematisiert worden ist, aber trotzdem von vergleichsweise vielen Schülerinnen und Schülern benutzt wurde: im Februar von knapp 40 %, im Juni von rund 55 % und im Oktober sogar von mehr als 60 % derjenigen Schülerinnen und Schüler, die halbschriftlich rechneten (MESETH & SELTER, 2002, S. 55). In einer Fallstudie beschreiben MESETH und SELTER (2002, S. 52 ff.) das Lösungsverhalten eines Kindes, das bei allen drei Erhebungszeitpunkten stellenweise die kleinere Ziffer von der größeren Ziffer innerhalb eines Stellenwerts sowohl beim halbschriftlichen als auch beim schriftlichen Rechnen abzieht. Ähnliche Stabilitäten beschreibt Csíkos (2012) bei ungarischen Kindern, die ebenfalls nach Einführung algorithmischer Rechenverfahren wenig flexibel bzw. adaptiv Lösungsmethoden praktizieren.

Zweifelloos gelingt SELTER (2000a) mit dieser Studie wirksam, auf eine deutliche Stabilität im Lösungsverhalten der Kinder hinzuweisen: Die deutliche Stabilität zeigt sich

- in der Dominanz algorithmischer Rechenverfahren und
- in der interindividuellen Stabilität der Lösungsmethoden in den einzelnen Erhebungszeitpunkten.

Offen bleibt hingegen, inwieweit das einzelne Kind bzw. Gruppierungen über die Erhebungszeitpunkte hinweg im Lösungsverhalten ebenfalls stabil sind.

Die Analyse der Denkwege bei SELTER (2000a) beruhen auf der Basis der vorliegenden schriftlichen Aufgabenbearbeitungen, welche sich auf „schriftliche Normalverfahren“ (SELTER, 2000a, S. 236) und „halbschriftliches Rechnen“ (SELTER, 2000a, S. 236) beziehen. Damit bleibt offen (außer bei 36 interviewten

Kindern), welche Lösungsmethoden beim „Kopfrechnen“ (SELTHER, 2000a, S. 236) praktiziert werden.

Während SELTER (2000a) die Stichprobe gesamt verfolgt, betrachten SCHWABE, GRÜSSING, HEINZE und LIPOWSKY (2014) in einer Follow-up-Studie das Lösungsverhalten gruppiert nach Leistungsstärke und nach Art der Intervention (Beispiellösungen vs. Schulung des Zahlenblicks). Zusätzlich werden Daten einer Kontrollgruppe erhoben. Sie gehen in ihrer Studie (Dauer der Intervention: 16 Unterrichtsstunden) mit 79 Schülerinnen und Schülern der Frage nach, welche Art des Unterrichts (Beispiellösungen vs. Schulung des Zahlenblicks) flexibles Rechnen bei Addition und Subtraktion im Zahlenraum 1000 besonders fördern. Sie erheben während der dritten Schulstufe vor der Intervention, nachher, nach zwei Monaten und nach fünf Monaten (nach Einführung der algorithmischen Rechenverfahren) die Adaptivität der Lösungsmethoden und die Lösungsquote in den Interventionsgruppen.

Sie können zwischen den beiden Arten des Unterrichts keine quantitativ akzentuierten hypothesengeleiteten Effekte feststellen, jedoch in einer qualitativen Analyse der Lösungswege ausweisen, dass Schülerinnen und Schüler bei der Schulung des Zahlenblicks weniger Fehlstrategien praktizieren. Dies wird damit erklärt, dass Schülerinnen und Schüler Lösungsmethoden verstanden haben müssen, um diese im Sinne von „Metaregelwissen“ (SCHWABE, GRÜSSING, HEINZE & LIPOWSKY, 2014, S. 30) bzw. Transferfähigkeit auf das Lösen von anderen Aufgaben übertragen zu können.

Wird die Entwicklung adaptiver Lösungswege in den beiden Experimentalgruppen und der Kontrollgruppe in Abhängigkeit von der allgemeinen Mathematikleistung bzw. dem erhobenen Zahl- und Operationswissen verfolgt, dann fällt auf, dass leistungsstärkere Kinder in einem höheren Ausmaß vom Unterricht profitieren und der Leistungsvorsprung ausgebaut wird. Bei leistungsschwächeren Kindern konnte weder in der Experimental-, noch in der Kontrollgruppe ein nennenswerter Zuwachs an adaptiven Lösungswegen festgestellt werden.

Für den letzten Messpunkt nach Einführung der algorithmischen Rechenverfahren ist beachtlich, dass sich die Lösungsmethoden sowohl in den Experimentalgruppen als auch in der Kontrollgruppe (allerdings auf sehr niedrigem Niveau) im Gegensatz zu SELTER (2000a) kaum verändern. Die Lösungsquote ergibt zwischen den beiden Arten des Unterrichts keinen signifikanten Unterschied.

SCHWABE, GRÜSSING, HEINZE und LIPOWSKY (2014, S. 33) können somit in ihrer Interventionsstudie zeigen, dass Schülerinnen und Schüler bei einem Unterricht sowohl mit Beispiellösungen als auch mit Schulung des Zahlenblicks, wie RATHGEB-SCHNIERER (2006), RECHTSTEINER-MERZ (2013), SCHÜTTE (2004, S. 138) und THRELFALL (2009, S. 554) vorschlagen, *Ableiten* vermehrt gegenüber der Kontrollgruppe praktizieren. Der Effekt bezieht sich allerdings nur auf die

leistungstärkeren, aber nicht auf die leistungsschwächeren Schülerinnen und Schüler.

2.4.3 Entwicklungsverläufe über mehrere Jahre

Eine deutschsprachige Studie über mehrere Jahre ist die LOGIK/SCHOLASTIK-Studie (WEINERT & HELMKE, 1997), die sich neben vielen anderen Merkmalen unter anderem (global) auf mathematische Inhalte bezieht. Ein eindeutiges Ergebnis und auch durch andere Studien (z. B. KRAJEWSKI & SCHNEIDER, 2006) bestätigt ist, dass das Vorwissen beziehungsweise Vorläuferfähigkeiten und nicht die Intelligenz die besten Prädiktoren für den späteren Leistungsstand in Mathematik sind. Weiters zeigen die Analysen von WEINERT und HELMKE (1997), dass in Weiterführung des Vorwissens eine relativ enge Beziehung zwischen den Leistungen in der zweiten Schulstufe und den Leistungen am Ende der Primarstufe ($r = 0,55$) vorliegt. Hingegen fehlt aus heutiger Sicht, wie z. B. auch bei SELTER (2000a), eine differenziertere Darstellung der Entwicklungsverläufe in Gruppierungen, wie z. B. in Abhängigkeit vom Niveau der Vorkenntnisse bzw. Leistungsgruppen.

Weitere Längsschnittstudien, die den Fokus, wie die vorliegende Studie, auf die Entwicklung kindlicher Lösungswege über mehrere Jahre legen, sind Untersuchungen von HIEBERT und WEARNE (1996) sowie CARPENTER et al. (1997). Beide Studien stammen aus in den Vereinigten Staaten Ende des 20. Jahrhunderts durchgeführten Forschungsprogrammen (siehe dazu FUSON, et al., 1997), welche die in den englischsprachigen Ländern schon im Zahlenraum 100 übliche starke Orientierung an den algorithmischen Rechenverfahren zum Untersuchungsgegenstand haben und die Wirkung alternativen Unterrichts untersuchen. Weiters erforscht eine belgische Studie *Ableiten* in traditionell unterrichteten Klassen (TORBEYNS, DE SMEDT, GHESQUIÈRE & VERSCHAFFEL, 2009a).

Das Ziel der Studie von HIEBERT und WEARNE (1996) ist zu untersuchen bzw. nachzuweisen, inwieweit ein gutes Verständnis des dekadischen Systems das Lösen von mehrstelligen Additions- und Subtraktionsaufgaben beeinflusst bzw. fördert. Dies wird unter der Bedingung eines konstruktivistisch orientierten Unterrichts, HIEBERT und WEARNE (1996) selbst sprechen von „alternative instruction“, und eines an algorithmischen Rechenverfahren lehrbuchorientierten Unterrichts, als „conventional instruction“ (HIEBERT & WEARNE, 1996, S. 259) bezeichnet, untersucht. In einer Panelstudie begleiten sie Kinder von der ersten bis zur vierten Schulstufe und erheben über Aufgaben zum Zahlverständnis und in einfache Sachkontexte eingekleideten Aufgaben das Zahlverständnis und Wissen über Rechenoperationen (siehe dazu auch Tabelle 4).

Studie	HIEBERT & WEARNE (1996)	CARPENTER et al. (1997)	TORBEYNS et al. (2009a)
Art	Panelstudie	Panelstudie	verschiedene Kohorten
Unterricht	routine approach investigative approach	investigative approach	routine approach
Stichprobe	9 Kinder 17 Kinder	82 Kinder	71 Kinder – 2. Schst. 71 Kinder – 3. Schst. 53 Kinder – 4. Schst.
Untersuchungs- fenster	Sept. 1. Schulstufe bis Sept. 4. Schulstufe	Mitte der 1. Schulstufe bis Ende der 3. Schul- stufe	Ende der jeweiligen Schulstufe
Dauer	3 Jahre	2 Jahre 6 Monate	(2 Jahre)
Anzahl der Erhebungen	9	5	jede Kohorte einmal (3)
Abstände zwischen den Erhebungen	4 Monate in d. 1./2. Schst. 6 Monate in der 3. Schst.	6 bis 8 Monate	(1 Jahr)
Erhebungsver- fahren	Interviews	Interviews - Lösungsmethode ist frei wählbar. - Lösungsmethode ist vorgegeben (teilweise im 4. und 5. Erhebungsze- itpunkt).	Interviews Jede Erhebung ist zweigeteilt: - Lösungsmethode ist frei wählbar. - Lösungsmethoden sind vorgegeben.
Eingesetzte Aufgaben	- Aufgaben zum Zahlver- ständnis - Rechenoperationen (in einfachem Sachkontext) - Aufgaben zum Verständ- nis (Zeigen mit Material)	- Aufgaben zum Zahl- verständnis - Rechenoperationen (in einfachem Sachkontext)	Addition und Subtrak- tion (Zahlenaufgaben) im Zahlenraum 100
Datenaus- wertung	Kategorisierung von - Lösungsmethoden (entspricht ca. stellen- weisem bzw. schrittweisem Rechnen) - Lösungsquote Gruppierungen - Kinder, die „invented strategies“ und Kinder, die „algorithm“ praktizieren - „Understanders“ und „Nonunderstanders“ - „alternative instruction“ und „conventional instruc- tion“	Kategorisierung von - Lösungsmethoden - Lösungsquote - systematische Fehler Gruppierung in Kinder, die „invented strategies“ und Kinder, die „algo- rithm“ praktizieren	Kategorisierung in - stellenweises Rechnen - schrittweises Rechnen - Ableiten (keine Lösungsquote) Gruppierung (Basis: math. Leistungstest) in „high achievers“, „above-average achiev- ers“ und „below-average achievers“

Tabelle 4: Eckdaten von Studien, die arithmetische Entwicklungsverläufe über mehrere Jahre nachzeichnen

Die *Art des Unterrichts* beeinflusst die Auswahl der Lösungsmethode, jedoch nicht die Lösungsquote. In den ersten zwei Schulstufen sind keine signifikanten Unterschiede zwischen den beiden Arten des Unterrichts zu erkennen, sondern erst am Ende der dritten Schulstufe (HIEBERT & WEARNE, 1996, S. 263), was nach SCHNEIDER (2005, S. 23) angesichts des dreijährigen Untersuchungszeitraumes ein bemerkenswerter Befund ist. Die Unterschiede sind eher qualitativ, nicht quantitativ. Die Lösungsquoten sind letztendlich bei den Rechnungen gleich. Schülerinnen und Schüler aus der eher konstruktivistisch unterrichteten Gruppe können jedoch Bedeutung und Funktionsweise der Rechenoperationen besser durch Rückgriff auf Konzepte des Zahlverständnisses erklären und auch eher noch nicht im Unterricht thematisierte Aufgaben durchführen. Schülerinnen und Schüler im konventionellen Unterricht können Verfahren korrekt durchführen, bevor sie ein hohes Maß an Verständnis zeigen. Außerdem ist es weniger wahrscheinlich, dass sie die Bedeutung der Verfahren, die sie verwenden, erklären können. Mit anderen Worten: Ein konzeptuelles Verständnis scheint im konstruktivistisch orientierten Unterricht eine größere Rolle in der Entwicklung und Anwendung von Lösungswegen als im herkömmlichen Unterricht zu spielen. (HIEBERT & WEARNE, 1996, S. 280)

Unterricht jeglicher Art scheint sich unterschiedlich bei *Understanders* (Kinder, die Aufgaben zum Zahlverständnis richtig lösen) und *Nonunderstanders* auszuwirken. Der stattfindende Unterricht (instruction) scheint bei *Understanders* eher die Wahl der Lösungsmethoden als die Lösungsquote (HIEBERT & WEARNE, 1996, S. 266) zu beeinflussen. *Understanders* übernehmen effizientere Lösungswege, welche im Unterricht präsentiert werden, aber sie erzielen nicht zwingend richtige Ergebnisse. *Understanders* können Lösungsmethoden auch auf neuartige Aufgaben, z. B. in größeren Zahlenräumen, anwenden (HIEBERT & WEARNE, 1996, S. 278). Im Gegensatz dazu sind *Nonunderstanders* mehr abhängig vom stattfindenden Unterricht, damit ihnen ein praktikables Verfahren zur Verfügung steht. Sie scheinen nicht imstande zu sein, ein sachgemäßes Verfahren und die korrekte Ausführung ohne vorherige Thematisierung im Unterricht entwickeln zu können. Schließlich gibt es auch einige Hinweise, dass *Nonunderstanders* eher ein gelerntes Verfahren vergessen, wenn sie es nicht regelmäßig durchführen (HIEBERT & WEARNE, 1996, S. 279).

CARPENTER, FRANKE, JACOBS, FENNEMA und EMPSON (1997) analysieren Lösungswege von Kindern, die selbst erfundene Lösungswege (*invented strategies*) von Anfang an einsetzen, und vergleichen sie mit Lösungswegen von Kindern, die von Anfang an, ab Mitte der zweiten Schulstufe, algorithmische Rechenverfahren einsetzen. Das Forschungsinteresse gilt der Entwicklung des Zahlverständnisses, insbesondere dem Verständnis des dekadischen Systems. Weiters wird erforscht, inwiefern beim Einsatz von Lösungsmethoden des Zahlenrechnens (*invented*

strategies) systematische Fehler auftreten bzw. ob die praktizierten Lösungsmethoden auf neue Aufgabentypen übertragen werden können. In einer Panelstudie begleiten sie 82 Kinder aus zehn Klassen über 2 Jahre 6 Monate. Der Unterricht ist nicht vorgegeben, jedoch haben alle Lehrpersonen im Vorhinein an einer Fortbildung teilgenommen, in welcher das Denken der Kinder thematisiert worden ist. Gemeinsam ist, dass Schülerinnen und Schüler im Unterricht die Gelegenheit erhalten, Aufgaben mit verschiedenen Methoden zu lösen und diese im Klassenverband zu diskutieren (dazu auch Tabelle 4).

Kinder, die *invented strategies* von Anfang an praktizieren, verwenden diese sowohl bei Addition als auch bei der Subtraktion. Nach Einführung der Algorithmen am Ende der zweiten Schulstufe verwenden 70 % von ihnen den Algorithmus der Addition und nur 33 % der Subtraktion. In der dritten Schulstufe lösen fast alle Kinder mit dem Standard-Algorithmus eine Addition mit zwei dreistelligen Zahlen. In dieser Gruppe gibt es jedoch 11 %, die nie den Subtraktionsalgorithmus in einem Interview anwenden. Die Schülerinnen und Schüler dieser Gruppe geben *invented strategies* als Auswahlstrategien nicht auf, auch wenn sie Algorithmen gelernt haben. Kinder, die von Anfang an Algorithmen einsetzen, beherrschen diese auch früher, können jedoch Lösungsmethoden nicht flexibel einsetzen. ‚Bugs‘ (d. h. systematische Fehler) treten zwar wenig bei der Addition, aber sehr häufig bei der Subtraktion auf (30 % mehr als bei der *Invented-strategy*-Gruppe, statistisch signifikant).

Ableiten verwenden von sich aus nur 10 von 82 Kindern der Gesamtstichprobe. Bei den Aufgaben, die mit einer bestimmten vorgegebenen Methode (*Use specific invented strategies*) durchzuführen sind, können ca. die Hälfte der Kinder die Minus-Aufgabe, bei der eine Hilfsaufgabe vorgegeben ist, lösen. Das heißt mit anderen Worten, dass die Kinder der *algorithm group* nicht nur nicht wählen, sondern viele von ihnen auch nicht in der Lage sind, sie zu benutzen, wenn sie dazu aufgefordert werden. Weiters bedeutet das auf die Gesamtstichprobe bezogen, dass wesentlich mehr Kinder die Hilfsaufgabe verstehen, als sie diese dann tatsächlich praktizieren.

Das Ziel der Studie von TORBEYNS, DE SMEDT, GHESQUIÈRE und VERSCHAFFEL (2009a) ist, den Erwerb und das Nutzen von *Ableiten*, TORBEYNS, DE SMEDT, GHESQUIÈRE und VERSCHAFFEL (2009a) nennen sie „Shortcut strategies“, in traditionell unterrichteten Klassen zu untersuchen. Es werden drei Kohorten (der zweiten, dritten und vierten Schulstufe) mündlich befragt, bei manchen Aufgaben ist die Lösungsmethode frei wählbar, andere Aufgaben müssen mit mindestens zwei Lösungsmethoden gerechnet werden (siehe dazu auch Tabelle 4).

Die Ergebnisse zeigen, dass bei Aufgaben, die zwei Lösungsmethoden fordern, fast alle Kinder zwei verschiedene Strategien angeben können. Am häufigsten wird *schrittweises Rechnen* praktiziert. Das ist vermutlich darauf zurückzuführen,

dass *schrittweises Rechnen* im Schulbuch angegeben ist und auch von den Lehrpersonen bevorzugt wird. Unter den jeweils zwei durchzuführenden Lösungsmethoden findet sich allerdings wenig *Ableiten* (weder die Hilfsaufgabe noch Ergänzen), bei der frei wählbaren Lösungsmethode noch weniger. Jüngere und *low-average achievers* praktizieren keine Shortcut-Strategien, „because they did not (yet) invent these strategies or because they were not stimulated to use them“ (TORBEYNS, DE SMEDT, GHESQUIÈRE & VERSCHAFFEL, 2009a, S. 14). Im Gegensatz dazu scheinen ältere und leistungsstarke Kinder diese Strategien erworben zu haben.

CARPENTER, FRANKE, JACOBS, FENNEMA und EMPSON (1997) können ebenso wie HIEBERT und WEARNE (1996) nachweisen, dass „the evidence suggests that invented strategies are closely connected to other concepts that might be taken as representing basic understanding, in particular the development of fundamental base-ten number concepts“ (CARPENTER, FRANKE, JACOBS, FENNEMA & EMPSON, 1997, S. 16). RATHGEB-SCHNIERER (2006, S. 279 f.) hält ebenfalls fest, dass bei allen dokumentierten und analysierten Lösungswegen ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen den erkannten Zahleigenschaften und Zahlbeziehungen und den verwendeten „strategischen Werkzeugen“, nämlich Zahlzerlegung, Hilfsaufgaben, Analogiewissen, regelgestützte Veränderung von Aufgaben bei einem Lösungsschritt besteht. Somit kann evidenzbasiert gesichert davon ausgegangen werden, dass ein gewisser Zusammenhang zwischen praktizierten Lösungswegen und individuellen Zahlkonzepten besteht. Bezüglich Entwicklungsverläufen folgern CARPENTER et al. (1997), ähnlich wie HIEBERT und WEARNE (1996), dass „children who use invented strategies develop knowledge of number concepts earlier than children who rely more on standard algorithms“. (CARPENTER, FRANKE, JACOBS, FENNEMA & EMPSON, 1997, S. 15).

Bezüglich Voraussagbarkeit von Entwicklungsverläufen ist der Studie von HIEBERT und WEARNE (1996) bzw. der Studie von CARPENTER et al. (1997), analog zu den Ergebnissen von WEINERT und HELMKE (1997) über Vorwissen bzw. Vorläuferfähigkeiten, zu entnehmen, dass das *Zahlverständnis* (auf Basis von gelösten Aufgaben zum Zahlverständnis), das sich schon in der zweiten Schulstufe zeigt, ausschlaggebend für zahlenorientierte Lösungswege beim Addieren und Subtrahieren ist. Kinder, die bereits ein hohes Verständnis auf der ersten Schulstufe zeigen, erreichen im Laufe der Zeit bessere Fähigkeiten im Rechnen, während Kinder, die zu Beginn das dekadische System nicht verstehen, viel flachere Lernkurven erzielen. Letztendlich nähern sich die Lösungsquoten, jedoch nicht die Lösungswege an.

HIEBERT und WEARNE (1996, S. 279) und CARPENTER et al. (1997) zeigen mit ihren Daten auch, dass zwingend ein Zahlverständnis (auf Basis von gelösten Aufgaben zum Zahlverständnis) vorhanden sein muss, um neuartige Aufgaben

zu lösen. Damit sind solche Aufgaben gemeint, deren Verfahren im Unterricht noch nicht gelernt wurde. Bezugnehmend zur Diskussion über das Vorwissen von Schülerinnen und Schülern wäre eine Folgerung, dass diese über ein Wissen über Zahlverständnis verfügen müssen, um unbekannte Aufgaben zu lösen. Nur dann ist Transferfähigkeit möglich.

Weniger gesicherte Ergebnisse gibt es darüber, ob und wie gesicherte Zahlvorstellungen auch flexibles Rechnen auslösen. Ob und in welchem Ausmaß *Ableiten* praktiziert wird, scheint mit dem stattfindenden Unterricht, dem individuellen Zahlkonzept und dem Lernalter zusammenzuhängen. Welche der drei (unabhängigen) Variablen welche Wirkung zeigen, ist in mehrjährigen Entwicklungsverläufen kaum evidenzbasiert dokumentiert.

TORBEYNS, DE SMEDT, GHESQUIÈRE und VERSCHAFFEL (2009a) können ähnlich wie TORBEYNS, VERSCHAFFEL & GHESQUIÈRE (2006) zeigen, dass trotz der nicht besonders förderlichen Unterrichtskultur Kinder mit einem guten Auffassungsvermögen (auf Basis eines mathematischen Leistungstests) und mit ansteigendem Lernalter *Ableiten* erkennen und anwenden. In anderen Worten, die Praxis und die Kultur des Mathematikunterrichts zeigen einen unterschiedlichen Effekt auf die kindlichen Ableitungsstrategien. Mit zunehmendem Lernalter und einem größeren Potenzial an Fähigkeiten können Kinder selbst Ableitungsstrategien entdecken und ausführen, während jüngere und weniger fähigkeitsorientierte Kinder dies nicht schaffen.

Eine weitere Folgerung aus den Studien von HIEBERT und WEARNE (1996) und CARPENTER, FRANKE, JACOBS, FENNEMA und EMPSON (1997) ist, dass der Blick auf die Lösungsquote den Entwicklungsverlauf nicht ausreichend charakterisiert. Letztendlich erreichen die Kinder mit und ohne Zahlverständnis, die nicht oder doch Lösungsmethoden des Zahlenrechnens praktizieren, gleich hohe Lösungsquoten. Daher ist forschungsmethodisch, je nach Intention der Studie, die Klassifizierung in Bezug auf die Lösungsquote differenziert zu sehen. Wenn die Lösungsquote und schnelles Ausrechnen im Mittelpunkt stehen, dann ist die Lösungsquote relevant. Geht es mehr um das Zahlverständnis, dann ist die Lösungsquote kein geeignetes Klassifizierungskriterium.

WEINERT und HELMKE (1997), HIEBERT und WEARNE (1996) sowie CARPENTER, FRANKE, JACOBS, FENNEMA und EMPSON (1997) variieren die Messinstrumente über die Erhebungszeitpunkte, um sie dem jeweiligen Alter der Kohorte anzupassen. TORBEYNS, DE SMEDT, GHESQUIÈRE und VERSCHAFFEL (2009a) setzen zwar dieselben Aufgaben in den drei verschiedenen Schulstufen ein, führen die Untersuchung jedoch bei drei verschiedenen Kohorten durch. So bleibt graduell offen, inwieweit dasselbe gemessen worden ist bzw. ob verschiedene Kohorten eine Entwicklung abbilden können.

2.5 Zusammenfassung und Konsequenzen

Längsschnittstudien werden zwar immer wieder eingefordert, trotzdem finden sich kaum deutschsprachige und wenige internationale Studien, die sich nicht nur mit mathematischer Leistung bzw. Kompetenz, sondern ausdrücklich auch mit Aspekten ihrer Entwicklung beschäftigen. So stellen auch VERSCHAFFEL, GREER und DE CORTE (2007, S. 569) fest, dass Studien über Entwicklungsverläufe beim Addieren und Subtrahieren, insbesondere bei mehrstelligen Zahlen, rar sind. REISS und WINKELMANN (2009, S. 140) sehen z. B. ein wesentliches Desiderat bei der Beschreibung von Kompetenzstufen für die ersten Jahrgangsstufen der Primarstufe. Grundlage, um Kompetenzstufen generieren zu können, wäre ebenfalls eine empirische Evidenz über Entwicklungsverläufe.

2.5.1 Forschungsmethodische Vorgangsweisen

Entwicklungsverläufe können

- *gesamt* über die ganze Stichprobe, wie z. B. BENZ (2005), SELTER (2000a), WEINERT und HELMKE (1997),
- *singulär* anhand von aus der Stichprobe ausgewählten Einzelfallstudien, wie z. B. als „Lernbiografien“ (RATHGEB-SCHNIERER, 2006, S. 217 ff.) bzw. „Kinderportraits“ (BENZ, 2005, S. 273 ff.),
- in *Gruppierungen*, wie z. B. BENZ (2005), CARPENTER et al. (1997), HIEBERT und WEARNE (1996), SCHWABE, GRÜSSING, HEINZE und LIPOWSKY (2014),

beschrieben und analysiert werden.

Gruppierungen können unterschiedlich strukturiert werden. Unter anderem werden die Fälle anhand personenbezogener Merkmale im Vorhinein gruppiert und deren Entwicklungsverlauf dokumentiert und analysiert. So wird a priori nach Leistungsstand differenziert, wie z. B. bei BENZ (2005, S. 121) über die Einschätzung von Lehrpersonen und Testaufgaben zur Erhebung arithmetischer Vorkenntnisse oder bei SCHWABE, GRÜSSING, HEINZE und LIPOWSKY (2014), TORBEYNS, VERSCHAFFEL und GHESQUIÈRE (2006) bzw. TORBEYNS, DE SMEDT, GHESQUIÈRE und VERSCHAFFEL (2009a) über einen allgemeinen mathematischen Leistungstest. SCHWABE, GRÜSSING, HEINZE und LIPOWSKY (2014) differenzieren zusätzlich nach Zahl- und Operationswissen von Beginn weg. Auch CARPENTER, FRANKE, JACOBS, FENNEMA und EMPSON (1997, S. 11) kategorisieren im Vorhinein, wenn sie den Entwicklungsverlauf der „Invented-strategy“-Gruppe, die vorerst selbst erfundene Lösungsmethoden praktiziert, bevor sie Algorithmen

einsetzt, und der „Algorithm“-Gruppe, die zuerst algorithmisch rechnet, bevor sie evtl. andere Lösungsmethoden praktiziert, verfolgen. Nur HIEBERT und WEARNE (1996) differenzieren nach „Understanders“ und „Nonunderstanders“, die sie in den jeweiligen Schuljahren anhand von gelösten Items zum Zahlverständnis zuordnen. Sie verfolgen weiters den Verlauf von einzelnen Gruppierungen über alle Erhebungszeitpunkte, wobei sie zwischen „Early Understanders“ und „Late Understanders“ unterscheiden und damit auch Veränderungen in den Gruppierungen im Entwicklungsverlauf in die Analysen miteinbeziehen.

Zusammenfassend ist festzustellen, dass die meisten Studien von vornherein festlegen, welche Gruppierungen differenziell betrachtet werden. Aufgrund dieser Vorgangsweise können z. B. Fälle mit einem unterschiedlichen Leistungsstand zu Beginn, die jedoch später im Laufe der Zeit gleiche Lösungswege bzw. kognitive Konzepte aufweisen, nicht differenziell betrachtet werden. So ist zu hinterfragen, ob nicht das oft replizierte Ergebnis, dass zu Beginn vorhandene fachspezifische Fähigkeiten und Vorgangsweisen später einen hohen Leistungsstand zeigen, zwar auf prospektiv gebildete Gruppen zutrifft, jedoch andere Verläufe möglicherweise außer Acht lässt. Infolgedessen scheint es sinnvoll, vorerst (intra-)individuelle Entwicklungsverläufe zu generieren und diese retrospektiv zu gruppieren.

In älteren Untersuchungen, wie z. B. bei HIEBERT und WEARNE (1996) und bei CARPENTER, FRANKE, JACOBS, FENNEMA und EMPSON (1997), die sich mit Zahlverständnis und Lösungswegen auseinandersetzen, werden diese als zwei Arten verschiedenen Wissens (konzeptuell vs. prozedural) gedeutet. Das hat zur Folge, dass die beiden Wissensarten theoretisch begründet und getrennt in Items operationalisiert angeboten werden müssen. Es ist jedoch zu hinterfragen, inwieweit z. B. beim Legen mit Plättchen das intendierte Zahlverständnis oder vielleicht doch eher (prozedurale) Fähigkeiten des Plättchen-Legens erhoben werden. Nachfolgende Forschungsergebnisse kommen zum Ergebnis, dass sich Zahlverständnis und das Ausführen von Lösungswegen gegenseitig beeinflussen. Diese Beziehung wird als „iterativ“ (RITTLE-JOHNSON, SIEGLER & ALIBALI, 2001, S. 347) bezeichnet. Es gibt einen „general consensus that the relations between conceptual and procedural knowledge are often bi-directional and iterative“ (RITTLE-JOHNSON & SCHNEIDER, 2015, S. 1129). Damit ist offen, inwieweit unterschiedliche Wissensarten notwendig sind, um das Vorgehen beim Addieren und Subtrahieren erklären zu können. Ausgehend vom Antwortverhalten beim Lösen von Rechnungen lässt sich das inhaltspezifische Wissen klären und es ist nicht unbedingt erforderlich, unterschiedliche Wissensarten zu postulieren, bei denen Fragen der Messbarkeit auftreten. Spätere Untersuchungen, so auch BENZ (2005), SELTER (2000a) und TORBEYNS et al. (2009a), bieten allein Aufgaben zum Rechnen an und entwerfen nicht spezifische Items zum Zahlverständnis.

2.5.2 Vorliegende inhaltliche evidenzbasierte Erkenntnisse und Folgerungen

Die vorliegende Forschung zur Entwicklung kindlicher Lösungswege im Bereich von Addition und Subtraktion von der zweiten bis zur vierten Schulstufe lässt sich in einigen wesentlichen, darin weitgehend übereinstimmenden Erkenntnissen wie folgt zusammenfassen:

- Die Entwicklung von Lösungswegen zu Addition und Subtraktion verläuft individuell höchst unterschiedlich. Es bestehen große interindividuelle Differenzen. Kinder gelangen offenbar höchst verschieden zu ihren gar nicht einheitlichen (vorläufigen) Konzepten von Zahlen und Wissen über Rechenoperationen.
- Das (intra-)individuelle Lösungsverhalten bezüglich Lösungsmethoden ist innerhalb einer Erhebung recht stabil. Auch bei Einzelfallstudien, bei denen die Entwicklung nachgezeichnet wird, ist das Lösungsverhalten über die Erhebungszeitpunkte hinweg gleich. Häufig werden bei verschiedenen Aufgabentypen gleiche Lösungsmethoden praktiziert, obwohl andere aus didaktischer Erwachsenenansicht besser geeignet wären. Kinder scheinen durchgehend ähnliche Lösungswege einzuhalten.
- Grob kann von einer Entwicklungsreihenfolge vom Zählen zum Rechnen ausgegangen werden. Der Übergang ist fließend. Kinder verwenden zeitgleich beide Möglichkeiten. Sei es, dass sie verschiedene Aufgabentypen unterschiedlich, je nachdem mit Zählen bzw. Rechnen lösen; sei es, dass sie gleiche Aufgabentypen oder sogar dieselbe Aufgabe einmal mit dieser, das nächste Mal mit einem anderen Zugang zu bewältigen versuchen. Ebenso kann von einem fließenden Übergang von einem Zahlkonzept ohne Stellenwerte zu einem Stellenwertkonzept ausgegangen werden.
- Die Entwicklung von Lösungsmethoden ist eng verflochten mit der Entwicklung des Zahlverständnisses und Wissens über Rechenoperationen. Kinder, die zu Beginn ein elaboriertes Zahlverständnis zeigen, praktizieren auch am Ende der Erhebung elaborierte Lösungsmethoden. Das fachspezifische Vorwissen, wie z. B. das Zahl- bzw. das Stellenwertverständnis, scheint einer der besten Prädiktoren für den späteren Einsatz von Lösungsmethoden zu sein.

Aus diesen Erkenntnissen können folgende Konsequenzen zur empirischen Untersuchung der Entwicklung von Lösungswegen bei Addition und Subtraktion abgeleitet werden:

- Es besteht ein Zusammenhang zwischen Lösungsmethoden und Zahlverständnis. Daher soll es möglich sein, Kindern Plus- und Minusaufgaben zu stellen und mittels der erhobenen Lösungswege das vorhandene Wissen

bezüglich Zahlen und Rechenoperationen zu analysieren und die dahinterliegenden Konzepte zu beschreiben.

- Kinder gelangen auf höchst verschiedenen Wegen zu ihren gar nicht einheitlichen (vorläufigen) Konzepten, und es ist anzunehmen, dass die Entwicklung des individuellen Wissens über Addieren und Subtrahieren nicht fachimmanent, sondern nach eigenen Regeln erfolgt (siehe dazu auch REISS, HEINZE & PEKRUN, 2007, S. 108).
- Da sich die Lösungswege äußerst unterschiedlich entwickeln, ist über Entwicklungsverläufe trotz zahlreicher, allerdings eher partieller Untersuchungen wenig bekannt. UFER, REISS UND HEINZE (2009, S. 65) stellen fest, dass weder in deutschsprachigen, aber auch nicht in den wenigen internationalen Studien ein Modell hervorgegangen ist, das eine Entwicklungsperspektive für mathematische Kompetenz aufweist. Bisherige Versuche, die Entwicklung im Bereich des Zahl- und Operationsdenkens in einem allgemeingültigen Modell, in einer Hierarchie von einheitlich zu durchlaufenden Stufen abzubilden, sind „wenig überzeugend“ (GAIDOSCHIK, 2010, S. 159) ausgefallen. So wird auch in der vorliegenden Untersuchung von der Arbeitshypothese ausgegangen, dass es unterschiedliche Entwicklungsverläufe, jedoch kein allgemeingültiges Modell gibt.
- Entwicklungsverläufe bedürfen Längsschnittstudien. Um die Stabilität bzw. Variabilität der Merkmale, wie z. B. Lösungsmethoden, Fehler, Lösungsquote von der zweiten bis zur vierten Schulstufe in der Entwicklung nachvollziehen zu können, werden die kindlichen Lösungswege erhoben und ausgewertet.

Im Mittelpunkt der vorliegenden Untersuchung steht die differenzielle Frage, mit welchen Lösungswegen und mit welchem Erfolg Schülerinnen und Schüler Rechnungen lösen. Dabei wird versucht, den Entwicklungsverlauf von kindlichen Lösungswegen über einen längeren Beobachtungszeitraum nachzuvollziehen und Deutungsmuster zwischen Lösungsverhalten und den individuellen Zahlvorstellungen zu finden.

Darüber hinaus geht es, wie in jedem Forschungsprozess, nicht (nur) um das Nachvollziehen der Denkwege von Kindern. Es gilt, das situationsübergreifend Typische von Entwicklungsverläufen hinsichtlich der Fragestellung herauszuarbeiten und von allem anderen abzusehen, also zu abstrahieren (BIKNER-AHSBAHS, 2003, S. 211) und Ansätze zu einer Theorie zu generieren.

Wie Kinder addieren und subtrahieren

Längsschnittliche Analysen in der Primarstufe

Fast, M.

2017, XIII, 261 S. 12 Abb., 4 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-658-16218-4