

Kapitel 2

Downside-Risiko-Kriterien

Nur wenige Monate nachdem der für die Kapitalmarkttheorie grundlegende Aufsatz „Portfolio Selection“ von HARRY MARKOWITZ im März 1952 im Journal of Finance erschienen war, veröffentlichte die Zeitschrift Econometrica im Juli desselben Jahres den Beitrag „Safety First and the Holding of Assets“ von ANDREW ROY. Obwohl beide Autoren zu diesem Zeitpunkt noch nicht voneinander gehört hatten, behandeln ihre Arbeiten doch dieselbe Thematik. Zwar war die zentrale Idee der Beurteilung einzelner riskanter Anlagen anhand ihrer erwarteten Rendite und ihres Risikos schon in den frühen fünfziger Jahren des vergangenen Jahrhunderts bekannt; die quantitative Analyse von Portfoliozusammenstellungen stellte jedoch etwas gänzlich Neues dar. Danach besteht ein effizientes Portfolio nicht aus isoliert betrachtet vorteilhaften Titeln (Stock Picking), sondern aus einer vorteilhaften Zusammenstellung der betrachteten Wertpapiere.

Bekanntlich hat sich die *Portfolioselektion* zu einem Grundmodell der Finanzwirtschaft entwickelt. Das Modell besitzt positiven Gehalt, weil es die Existenz dominierter Wertpapiere am Kapitalmarkt erklärt. Wertpapiere mit einem ungünstigen Rendite-Risiko-Verhältnis werden Portfolios beigemischt, wenn sie einen *Diversifikationseffekt* bewirken. Die Diversifikation stellt daher ein Instrument zur Risikoreduktion dar. Heute wird die Portfolioselektion überwiegend als normatives Modell verstanden, weil sie dem Anleger eine effiziente Zusammenstellung seines Portfolios liefert. Dies begründet ihre Popularität in der Praxis.

Aus theoretischer Sicht ist die Portfolioselektion aus zwei Gründen besonders fruchtbar: Zum einen sind Entscheidungen nach dem der Portfolioselektion zugrunde liegenden Erwartungswert-Varianz-Kriterium unter Voraussetzungen, die die Verteilung der Portfoliorenditen und/oder die Risikonutzenfunktion des Anlegers betreffen, mit der Erwartungsnutzenmaximierung nach dem Bernoulli-Prinzip kompatibel. Beispielsweise spielen bei einer quadratischen Risikonutzenfunktion nur die beiden ersten Momente der Verteilung, also Erwartungswert und Varianz der betrachteten unsicheren Größe, eine Rolle. Gleichwohl wird die quadratische Risikonutzenfunktion kritisiert, weil sie die Eigenschaft einer mit dem Vermögen zunehmenden Risikoaversion aufweist, die empirisch kaum zu beobachten ist. Ein weiteres Beispiel liefert die Normalverteilung, die durch die Angabe von Erwar-

tungswert und Varianz schon vollständig beschrieben ist. Die Portfolioselektion auf Basis des (μ, σ) -Prinzips lässt sich also entscheidungstheoretisch fundieren.

Zum anderen gelingt unter der Voraussetzung homogener Erwartungen aller Marktteilnehmer im Markträumungsgleichgewicht des vollkommenen Kapitalmarktes die Bewertung einzelner Finanztitel. Unter diesen Voraussetzungen gilt das Separationstheorem von JAMES TOBIN, nach dem alle effizienten Portfolios unabhängig von der individuellen Risikoaversion Kombinationen des Marktportfolios mit der risikolosen Anlage darstellen. Einzelne Wertpapiere liegen dann auf der *Wertpapierkennlinie*, die den Tradeoff zwischen erwarteter Rendite und nicht-diversifizierbarem Risiko angibt. Hierbei stellt sich im *Capital-Asset-Pricing-Modell* (CAPM) heraus, dass der Kapitalmarkt neben der Verzinsung überlassener liquider Mittel lediglich die systematischen Risiken ex ante mit einer proportionalen Prämie vergütet. Unsystematische, wertpapierspezifische Risiken sind diversifizierbar. Investoren können solche Risiken durch geeignete Portfoliozusammenstellungen vermeiden. Folglich spielen diversifizierbare Risiken bei der Bewertung riskanter Titel keine Rolle.¹

Die Portfolioselektion steht daher im Zentrum der Kapitalmarkttheorie, deren Akzeptanz durch die Vergabe des Nobelpreises für Wirtschaftswissenschaften im Jahr 1990 an die Kapitalmarkttheoretiker HARRY MARKOWITZ, MERTON MILLER und WILLIAM SHARPE dokumentiert wird. In seiner Rede anlässlich der Preisverleihung machte Markowitz deutlich, dass er bei der Entwicklung der Portfolioselektion zur Quantifizierung des mit einem Investment verbundenen Risikos anfänglich die *Semivarianz* der Rendite heranzog. Die Semivarianz misst die Schwankungen unterhalb der erwarteten Rendite und lässt sich deshalb mit dem Risiko eines Finanztitels assoziieren. Für symmetrische Renditeverteilungen ist es aber unerheblich, ob die Semivarianz oder die Varianz als Streuungsmaß verwendet wird. Letztere hat sich in der Beurteilung risikobehafteter Anlagen sowohl aufgrund der Kompatibilität des Erwartungswert-Varianz-Kriteriums mit dem Bernoulli-Prinzip als auch aufgrund der günstigeren Handhabbarkeit bei der Programmierung entsprechender Optimierungskalküle durchgesetzt.

Gewöhnlich verwendet man heute in der Portfolioselektion die *Volatilität*, d. h. die annualisierte Standardabweichung der Rendite, um das Risiko in gleichen Einheiten auszudrücken wie die erwartete Rendite. Hinzu kommt, dass effiziente Portfolios im Rendite-Volatilitätsdiagramm auf der *Kapitalmarktgeraden* positioniert werden können, wenn am Kapitalmarkt eine risikolose Anlageform existiert, die zum gleichen Zinssatz Geldanlagen wie Kreditaufnahmen gestattet, und die Standardabweichung der Rendite das Risiko misst. Verwendet man die Varianz, resultiert hingegen eine gekrümmte Linie.

Der *Safety-first-Ansatz* unterscheidet sich nun von der Portfolioselektion dadurch, dass eine konkrete Auswahlregel verwendet wird. Im Mittelpunkt steht dabei die Wahrscheinlichkeit, eine gegebene Zielrendite zu verfehlen. Für die Zielrendite finden sich auch die Bezeichnungen *Target* oder *Threshold Return*; die angesproche-

¹ Wir fügen an, dass bei Marktunvollkommenheiten unsystematische und diversifizierbare Risiken auseinanderfallen. Systematische und nicht-diversifizierbare Risiken erhalten dann eine unterschiedliche Ex-ante-Risikoprämie.

ne Wahrscheinlichkeit heißt *Downside- bzw. Shortfall-Wahrscheinlichkeit* oder – im Deutschen – *Ausfallwahrscheinlichkeit*

Dennoch lassen sich Portfolioselektion und Safety-first-Ansatz miteinander verbinden: Die Portfolioselektion ermittelt effiziente Portfolios, indem sie zu gegebenem Risiko ein Portfolio aus den in Frage kommenden Titeln zusammenstellt, das eine maximale Rendite erwarten lässt, bzw. zu einer gegebenen erwarteten Rendite diejenige Portfoliozusammenstellung ermittelt, die mit dem geringsten Risiko verbunden ist. Wenn – wie im vorliegenden Fall – mehrere Dimensionen die Anlageentscheidung beeinflussen, ist zur Auswahl einer optimalen Zusammenstellung aus der Menge effizienter Portfolios letztlich die Kenntnis der individuellen Präferenzen nötig. Erst die Spezifizierung einer Risikonutzenfunktion gestattet deshalb die konkrete Portfolioselektion. Ohne Kenntnis der Nutzenfunktion können lediglich dominierte Positionen ausgeschlossen werden.

Eine Regel zur Auswahl unter effizienten Portfolios stellt dann der Safety-first-Ansatz dar. Um dieses Entscheidungskriterium zu formalisieren, führen wir folgende Notation ein:

$$\begin{aligned}
 R_P &= \text{Portfoliorendite;} \\
 E(R_P) &= \text{erwartete Portfoliorendite } (\mu_P); \\
 \sigma_P &= \text{Portfoliovolatilität;} \\
 \tau &= \text{Zielrendite;} \\
 \wp_\tau &= \text{Downside-Wahrscheinlichkeit } (\text{Prob}(R_P < \tau)); \\
 \Pi_P &= \frac{E(R_P) - \tau}{\sigma_P}.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Wenn wir annehmen, dass die Portfoliorenditen normalverteilt sind, errechnet sich die Downside-Wahrscheinlichkeit wie folgt, wobei $N(\cdot)$ die Verteilungsfunktion einer standardnormalverteilten Zufallsvariablen bezeichnet:

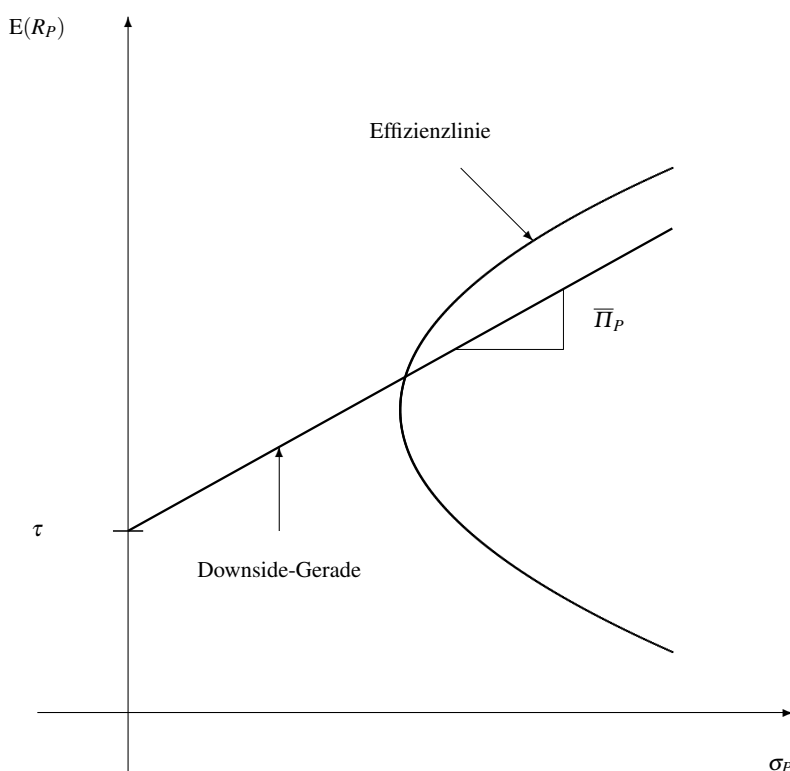
$$\begin{aligned}
 \wp_\tau &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma_P} \cdot \int_{-\infty}^{\tau} \exp \left\{ -\frac{(x - E(R_P))^2}{2 \cdot \sigma_P^2} \right\} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\frac{\tau - E(R_P)}{\sigma_P}} \exp \left\{ -\frac{y^2}{2} \right\} dy \\
 &= 1 - N \left(\frac{E(R_P) - \tau}{\sigma_P} \right).
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Portfolios, die im Koordinatensystem aus Volatilität und erwarteter Rendite auf der Geraden

$$\begin{aligned}
 E(R) &= \tau + N^{-1}(1 - \wp_\tau) \cdot \sigma \\
 &= \tau + \Pi_P \cdot \sigma
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

positioniert sind, weisen deshalb zu einer gegebenen Zielrendite die gleiche Downside-Wahrscheinlichkeit auf. Diese Geraden heißen *Downside-Geraden*. Anders formuliert: Alle Portfolios mit einer gegebenen Downside-Wahrscheinlichkeit $\bar{\phi}_\tau$ zu einem bestimmten Target bzw. mit der zugehörigen Risikoprämie $\bar{\Pi}_P$ können auf dieser Geraden positioniert werden. Portfolios oberhalb der in Abbildung 2.1 veranschaulichten Downside-Geraden besitzen eine geringere, Portfolios unterhalb der Geraden eine höhere Downside-Wahrscheinlichkeit.

Abb. 2.1 Downside-Gerade



Je nachdem, ob die Downside-Wahrscheinlichkeit und/oder der Target vorgegeben sind, unterscheidet man im Rahmen des Safety-first-Ansatzes drei Auswahlkriterien.

- 1) Bei gegebener Zielrendite ist das Portfolio gesucht, das die geringste Downside-Wahrscheinlichkeit besitzt: *Roy-Kriterium*.
- 2) Bei gegebener Downside-Wahrscheinlichkeit ist das Portfolio zu bestimmen, das den höchsten Target aufweist: *Kataoka-Kriterium*.

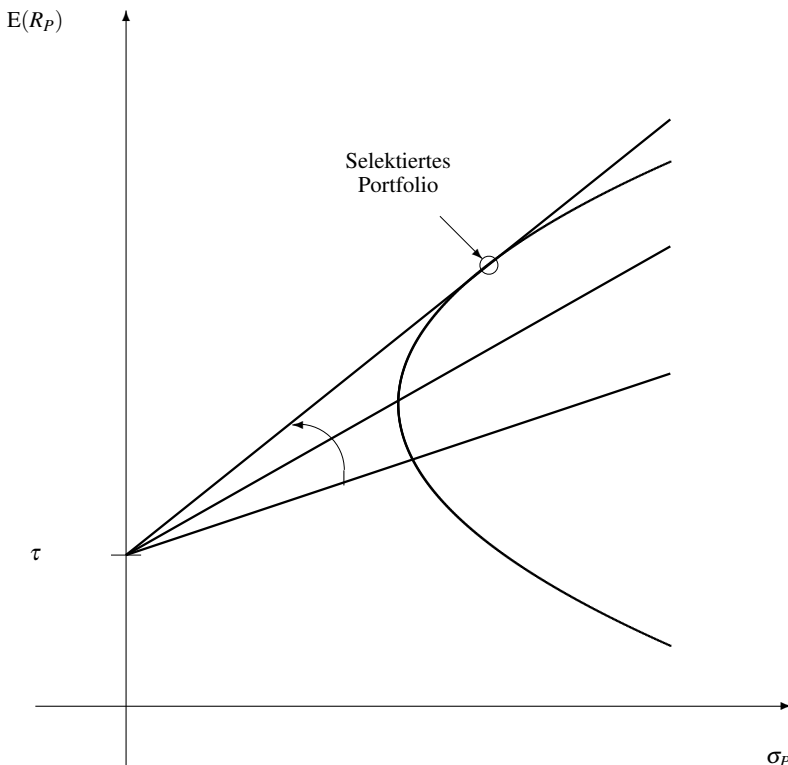
- 3) Gesucht ist das Portfolio mit der höchsten erwarteten Rendite, das bei gegebener Zielrendite eine ebenfalls gegebene Downside-Wahrscheinlichkeit nicht überschreitet: *Telser-Kriterium*.

2.1 Roy-Kriterium

Nach dem Roy-Kriterium ist die Downside-Wahrscheinlichkeit bei gegebener Zielrendite zu minimieren. Dies ist für normalverteilte Portfoliorenditen gleichbedeutend damit, die Steigung der Downside-Geraden zu maximieren (vgl. Abbildung 2.2):

$$\begin{aligned} \rho_{\tau} &\rightarrow \min \\ \Leftrightarrow \Pi_P &\rightarrow \max. \end{aligned} \quad (2.4)$$

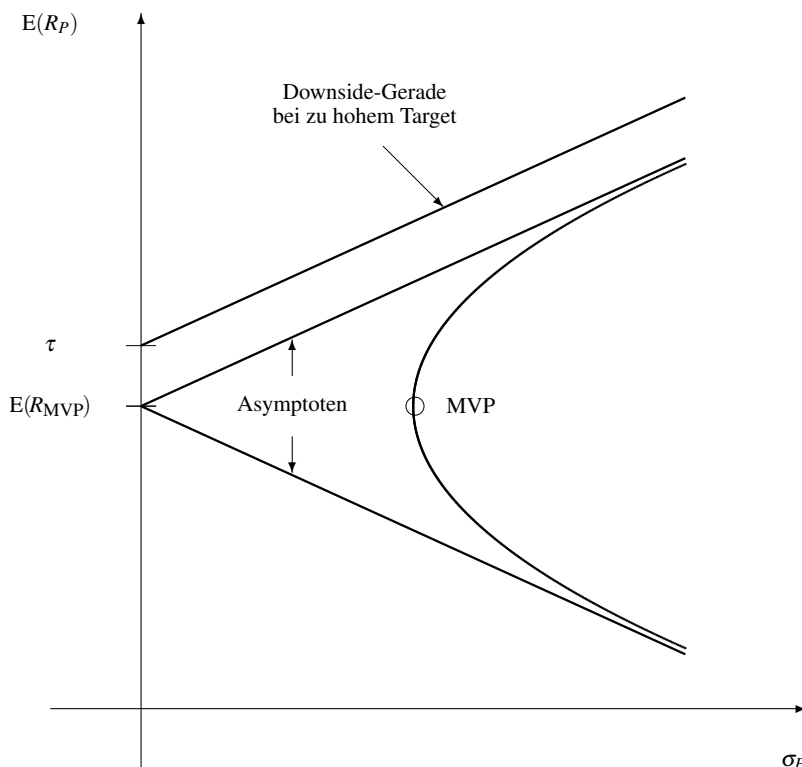
Abb. 2.2 Roy-Kriterium



Für die vorgegebene Zielrendite gilt jedoch folgende Grenze: Sie darf die erwartete Rendite des *Minimum-Varianz-Portfolios* (MVP) weder erreichen noch überschreiten. Die Begründung hierfür liegt in den geometrischen Eigenschaften der Effizienzlinie. Diese Linie stellt eine Hyperbel dar, wenn keine risikolose Anlageform existiert und Leerverkäufe uneingeschränkt möglich sind. Die Asymptoten der Effizienzlinie schneiden nun die Ordinate in Höhe der erwarteten Minimum-Varianz-Rendite. Für einen Target in dieser Höhe existiert kein Tangentialpunkt der Downside-Geraden an die Effizienzlinie, sondern nur eine Asymptote; deshalb gibt es in dieser Situation kein Downside-minimales Portfolio.

Gleiches gilt für einen Target oberhalb der erwarteten Minimum-Varianz-Rendite: Portfolios auf der Effizienzlinie weisen mit steigender erwarteter Rendite zu einem solchen Target zwar eine höhere Volatilität, gleichzeitig aber eine geringere Downside-Wahrscheinlichkeit auf. Die Steigung der Downside-Geraden kann also stets noch erhöht werden und strebt gegen den Wert für die Steigung der Asymptote, ohne jedoch dieses Infimum für die Downside-Wahrscheinlichkeit je zu erreichen (vgl. Abbildung 2.3).

Abb. 2.3 Downside-Gerade und Target



Der Safety-first-Ansatz ist keineswegs auf den Fall normalverteilter Portfoliorenditen beschränkt. Wenn die ersten beiden Verteilungsmomente einer beliebigen Verteilungsfunktion existieren, ist die *Tschebyscheff'sche Ungleichung* anwendbar. Diese Ungleichung lautet in unserem Zusammenhang:

$$\text{Prob} \left(\left| \frac{R_P - E(R_P)}{\sigma_P} \right| > \Pi_P \right) \leq \frac{1}{\Pi_P^2}. \quad (2.5)$$

Wenn wir Renditen unterhalb ihres Erwartungswertes betrachten, lässt sich hierfür schreiben:

$$\begin{aligned} \wp_\tau &= \text{Prob}(R_P < \tau) \\ &\leq \frac{1}{\Pi_P^2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Sind die im Allgemeinen recht groben Abschätzungen für die Downside-Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der Tschebyscheff'schen Ungleichung bereits ausreichend, resultiert also eine gleichlautende Optimierungsaufgabe wie beim Roy-Kriterium für normalverteilte Portfoliorenditen. Wieder entspricht die Minimierung der Downside-Wahrscheinlichkeit der Maximierung einer Prämie, die die über den Target hinausgehende erwartete Rendite ins Verhältnis zur Volatilität setzt. Letzteres impliziert eine möglichst hohe Steigung der Downside-Geraden.

2.2 Kataoka-Kriterium

Das Kataoka-Kriterium verfolgt einen *Chance-constrained-Ansatz*: Gesucht ist die maximale Zielrendite, die die Portfoliorendite höchstens mit vorgegebener Wahrscheinlichkeit unterschreitet. Die Nebenbedingung

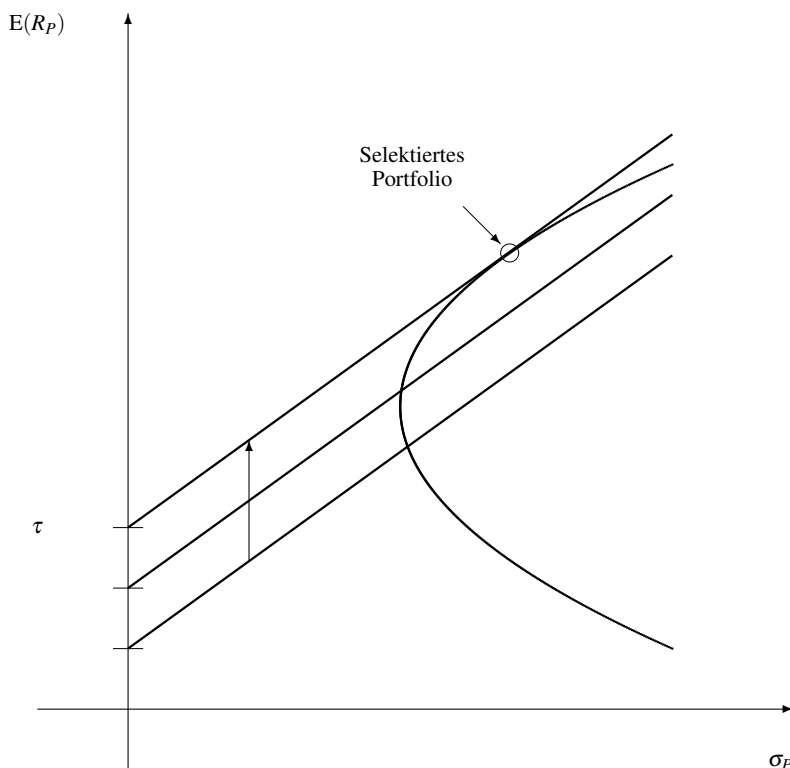
$$\text{Prob}(R_P < \tau) \leq \wp_\tau \quad (2.7)$$

lautet für normalverteilte Portfoliorenditen:

$$\tau \leq E(R_P) - N^{-1}(1 - \wp_\tau) \cdot \sigma_P. \quad (2.8)$$

Bei maximaler Zielrendite wird diese Ungleichung zur Gleichung und für einen festen Target resultieren die bereits behandelten Downside-Geraden (vgl. Abbildung 2.4):

$$E(R_P) = \tau + \overline{\Pi}_P \cdot \sigma_P. \quad (2.9)$$

Abb. 2.4 Kataoka-Kriterium

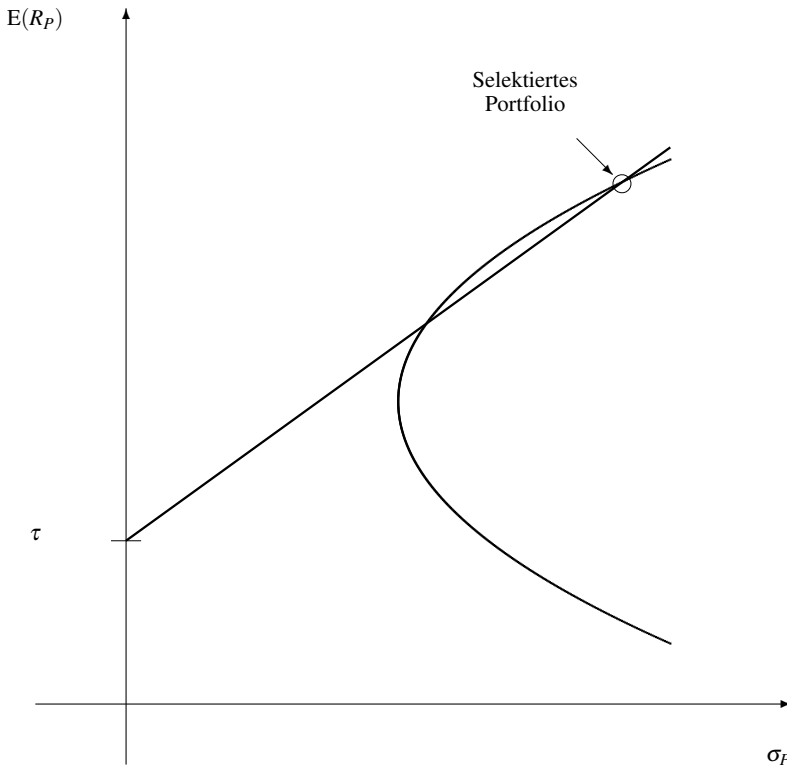
Analog zum Roy-Kriterium ergibt sich nun eine Grenze für die vorgegebene Downside-Wahrscheinlichkeit, um einen maximalen Target zu erreichen: Falls die mit der Downside-Wahrscheinlichkeit implizierte Steigung der Downside-Geraden geringer ausfällt als die Steigung der Asymptote an die Effizienzlinie, kann immer ein noch höherer Target gefunden werden. Ein Grenzwert existiert hierfür nicht.

2.3 Telser-Kriterium

Das Telser-Kriterium gibt sowohl die Zielrendite als auch die Downside-Wahrscheinlichkeit vor. Es selektiert unter den Portfolios, die diese Restriktion erfüllen, die Zusammenstellung mit der höchsten erwarteten Rendite. Wie bei den vorher behandelten Safety-first-Kriterien führt die Nebenbedingung für normalverteilte Renditen bzw. im allgemeinen Fall über die Tschebyscheff'sche Ungleichung zu einer Darstellung durch die Downside-Geraden. Hierbei sind nun drei Fälle möglich:

- 1) Die Downside-Gerade schneidet die Effizienzlinie zweimal. Gewählt wird dann der Schnittpunkt mit der höheren erwarteten Rendite. Diesen Fall veranschaulicht Abbildung 2.5.

Abb. 2.5 Telser-Kriterium



- 2) Downside-Gerade und Effizienzlinie besitzen keinen gemeinsamen Punkt, d. h. es existiert kein zulässiges Portfolio. Angesichts der zur Verfügung stehenden Anlagemöglichkeiten wurden der Target zu hoch und die Downside-Wahrscheinlichkeit zu niedrig gewählt.
- 3) Falls Downside-Gerade und Effizienzlinie genau einen gemeinsamen Punkt aufweisen, sind wiederum zwei Fälle möglich.
- Tangiert die Downside-Gerade die Effizienzlinie, entspricht das Telser-Kriterium den vorgenannten Safety-first-Kriterien von Roy und Kataoka.
 - Im anderen Fall handelt es sich um einen Schnittpunkt. Dann existiert kein optimales Portfolio, weil die erwartete Portfoliorendite immer weiter erhöht werden kann, ohne dabei die Downside-Restriktion zu verletzen. Letzteres

setzt allerdings die Möglichkeit voraus, Wertpapiere in beliebigem Umfang (leer) zu verkaufen. In Relation zum Target wurde hier der Wert für die maximal akzeptierte Downside-Wahrscheinlichkeit zu hoch angesetzt, um zu einer operablen Auswahlregel zu gelangen.

2.4 Literaturhinweise

Die Originalarbeiten zu den Downside-Risk-Kriterien lauten Roy (1952), Telser (1955/56) und Kataoka (1963). Pyle und Turnovsky (1971), Levy und Sarnat (1972) sowie Marquez Diez-Canedo (1982) zeigen, wie sich Portfolioselektion und Safety-first-Ansatz miteinander verbinden lassen. Hanssmann (1968) verwendet einen Lagrange-Ansatz zur Bestimmung von Portfolios mit minimaler Downside-Wahrscheinlichkeit. Das Lehrbuch von Breuer, Gürtler und Schuhmacher (2006, S. 115–154) enthält eine Übersicht über die Safety-first-Ansätze.

Breuer, W.; Gürtler, M.; Schuhmacher, F. (2006): *Portfoliomanagement II*, Wiesbaden.

Hanssmann, F. (1968): Probability of Survival as an Investment Criterion, *Management Science* 15, S. 33–48.

Kataoka, S. (1963): A Stochastic Programming Model, *Econometrica* 31, S. 181–196.

Levy, H.; Sarnat, M. (1972): Safety First – An Expected Utility Principle, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 7, S. 1829–1834.

Marquez Diez-Canedo, J. (1982): On the Equivalence Between the Safety First and Min-Variance Criterion for Portfolio Selection, *European Journal of Operational Research* 10, S. 144–150.

Pyle, D. H.; Turnovsky, S. J. (1971): Risk Aversion in Chance Constrained Portfolio Selection, *Management Science* 18, S. 218–225.

Roy, A. D. (1952): Safety First and the Holding of Assets, *Econometrica* 20, S. 431–449.

Telser, L. G. (1955/56): Safety First and Hedging, *Review of Economic Studies* 23, S. 1–16.

Downside-orientiertes Portfoliomanagement

Reichling, P.; Schulze, G.

2017, XIX, 258 S. 110 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-16663-2