2 Mathematik - die Wissenschaft der Muster und Strukturen

2.1 Was ist Mathematik?

Eine allgemein anerkannte Definition von Mathematik gibt es nicht (vgl. Davis & Hersh 1985, S. 2 ff; Devlin 1994, S. 1 ff). Fragt man Schüler „Was ist Mathematik?“, so stehen Begriffe wie *Zahlen* oder *Rechnungen* im Mittelpunkt ihrer Antworten (vgl. Loos & Ziegler 2015, S. 8 f). Ihre Vorstellungen von Mathematik sind geprägt durch ihre Erfahrungen, ihre ‚Definitionen‘ lassen daher auch Rückschlüsse auf den Mathematikunterricht und ihre Haltung gegenüber diesem Fach zu. Söbbeke & Steinbring (2004) orten aufgrund zweier Befragungen zu Beginn des 3. und am Ende des 4. Schuljahres eine *„starke Dominanz, Mathematik auf die Bereiche **Zahlen, Zählen und das Rechnen von Aufgaben** zu reduzieren“* (ebd., S. 37, Hervorh. im Orig.). Bei einer entsprechenden Umfrage in der Projektschule Mastrils antworten Viert-, Fünft- und Sechstklässler fast alle mit Sätzen wie *„Matematik ist rechnen […]“* (vgl. Abbildung 2.1-1).

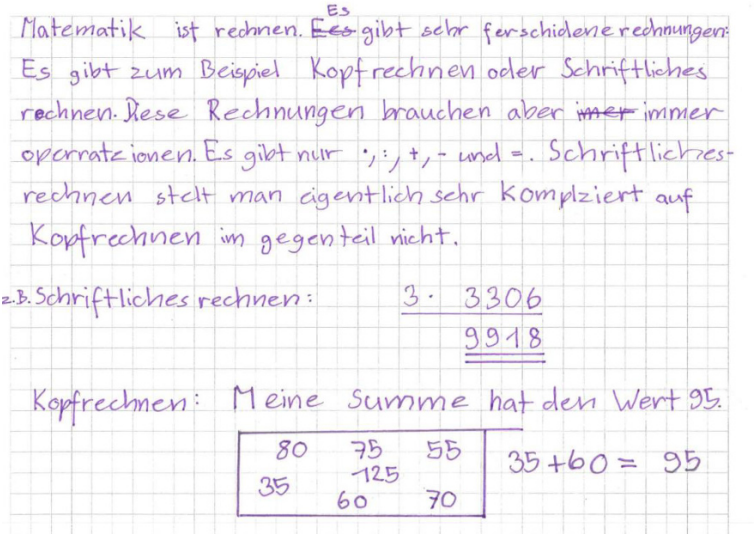


Abbildung 2.1-1: Ausschnitt aus einer Antwort einer Viertklässlerin

Die Schüler denken dabei hauptsächlich an das Operieren mit natürlichen Zahlen. Teilweise werden auch Zusammenhänge notiert, mehrmals zwischen der fortgesetzten Addition und der Multiplikation (vgl. Abbildung 2.1-2). Einige Kinder beziehen

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2017
B. Matter, *Lernen in heterogenen Lerngruppen*, Essener Beiträge
zur Mathematikdidaktik, DOI 10.1007/978-3-658-16694-6_2

die Brüche in ihre Antwort ein, allerdings beschränkt auf Bruchdarstellungen und Begriffe wie *Zähler* und *Nenner*. In keiner einzigen Antwort tauchen Begriffe wie *Raum* oder *Form* auf. Das überrascht jedoch nicht, da gemäß den vom Kanton Graubünden festgesetzten Stundentafeln die Fächer Mathematik und Geometrie noch immer getrennt unterrichtet werden. Für diese Kinder ist folglich Geometrie nicht Mathematik. Eine Formulierung wie *„Man kan sehr viele Sachen in Mathematik erkunden. […]"* lassen den Schluss zu, dass die betreffende Schülerin sich im Mathematikunterricht nicht nur mit reproduzierenden Aufgabenstellungen auseinandersetzen muss (vgl. Abbildung 2.1-2).

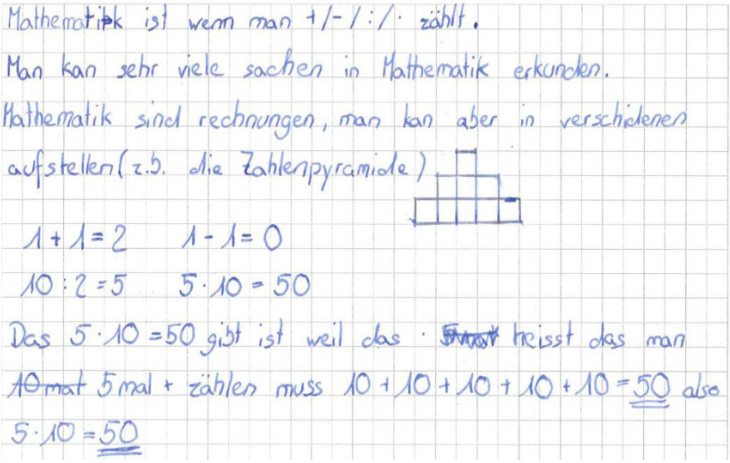


Abbildung 2.1-2: Ausschnitt aus einer Antwort einer Fünftklässlerin

Die Fünftklässlerin bezieht sich auf entsprechende Erfahrungen mit dem Aufgabenformat *Zahlenmauern,* auch wenn sie die Mauer nicht korrekt zeichnet. Einige Kinder heben die Größen hervor oder legen Gewicht auf die Bedeutung der Mathematik im Alltag und den Berufen. So machen Schüler mit Formulierungen wie *„Matematik hat etwas mit Zahlen zu tun, was* ***sehr*** *wichtig ist im Leben […]"* (Hervorh. im Orig.) zugleich Aussagen über ihre Einstellung gegenüber dem Fach Mathematik. Vielleicht kommen Kinder in einem kleinen Dorf im ländlichen Raum, wo Wohnen und Arbeiten eng miteinander verflochten sind, einfacher zu solchen Einsichten. Damit jedoch diese Erfahrungen aus dem täglichen Leben auch tatsächlich in den Mathematikunterricht einfließen, braucht es besondere Anstrengungen. Clements & Ellerton (1996, S. 167) berichten von einer Umfrage, in welcher Schüler aufgefordert wurden, alltägliche mathematische Probleme aufzubereiten. Die Schüler präsentierten jedoch eher Probleme in der Art wie diese in Schulbüchern zu finden sind.

Auch bei erwachsenen Menschen existieren unterschiedliche Auffassungen von Mathematik, vermutlich beeinflusst durch den erlebten Mathematikunterricht in verschiedenen Schulstufen und weiteren Faktoren wie Ausbildung und berufliche Tätigkeit (vgl. Loos & Ziegler 2015, S. 3 ff). Ein Mathematiker stellt die formalen Strukturen und deren vielfältige Beziehungen in den Vordergrund, Nichtmathematiker sehen eher den Anwendungsaspekt und damit die Mathematik als die *„Wissenschaft der Raum- und Zahlengrößen“* (DUDEN 1997, Fremdwörterbuch, Stichwort Mathematik; vgl. auch Davis & Hersh 1985, S. 2 ff; Devlin 1994, S. 1 ff). Für einen Wirtschaftswissenschaftler ist Mathematik das Fundament der Zinseszins- und Rentenrechnung und ein Werkzeug zur Generierung optimaler Strategien, beispielsweise in Modellen zur Diversifikation oder Investition (vgl. Zimmermann 2001, S. 2 f). Auch Naturwissenschaftler und Ingenieure sehen Mathematik als Schlüsseltechnologie, da mithilfe mathematischer Modelle eine *„Brücke […] zwischen theoretischen (Natur)Wissenschaften und konkreten praktischen (technischen, wirtschaftlichen, medizinischen u. a.) Gebieten“* (Tobies 2013, S. 195) geschlagen werden kann.

2.2 Definitionen im Laufe der Geschichte

Die Auffassung von Mathematik wandelte sich im Verlauf der Geschichte (vgl. Devlin 1994, S. 1; Loos & Ziegler 2015, S. 10 f).

> *„Aus einer früheren Sicht ist die Mathematik die Wissenschaft von Raum und Quantität, aus einer späteren ist sie die Wissenschaft des Schemas und der deduktiven Struktur.“*
>
> (Davis & Hersh 1985, S. 109)

Bedeutende mathematische Erkenntnisse früher Hochkulturen (Babylonier, Ägypter, Inkas) entwickelten sich aus Problemen des täglichen Lebens (vgl. Wußing 2008, S. 6 ff). Wenn Ägypter nach den Nilüberschwemmungen das Land neu ausmessen mussten, benötigten sie dazu konkrete geometrische Verfahren (vgl. ebd., S. 121). Die Mayas entwickelten ein unreines Vigesimalsystem aufgrund ihrer Himmelsbeobachtungen (vgl. ebd., S. 30 ff). Daher ist eine Definition wie *Mathematik als Wissenschaft von Raum und Zeit* für die damalige Zeit durchaus passend.

Mit Euklid hat ca. 300 Jahre vor Christus eine neue Ära begonnen (vgl. Wußing 2008, S. 190 ff). Als Erster hat er ein solides Fundament für eine mathematische Theorie geschaffen. Er sammelte das damals bekannte geometrische Wissen und leitete alle Ergebnisse durch logisches Folgern aus den fünf Axiomen ab, damals noch Postulate genannt (vgl. Arens 2009, S. 1). Die Postulate von Euklid hatten noch eine gewisse anschauliche Bedeutung, heute *„ist die Interpretation, die wir den Axiomen geben,*

irrelevant“ (Davis & Hersh 1985, S. 357). Deshalb ist ein mathematisches System ein logisches Skelett, welchem Bedeutung zugeschrieben wird oder auch nicht (vgl. Trudeau 1998, S. 192).

Der formalistische Ansatz führte zu einer Unterscheidung zwischen Objekt- und Bedeutungsebene (vgl. Hoffmann 2013, S. 18). Die Schaffung einer künstlichen Formelsprache für die Objektebene mit formalen Umformungsregeln ließ die Mathematik zu einem *„mechanischen Spiel“* (ebd.) werden. Axiome erscheinen als willkürliche Annahmen, vergleichbar mit den Spielregeln eines Spiels (vgl. Leuders 2003, S. 22). Ändert man die Spielregeln, so ergibt sich ein anderes Spiel. Entsprechend entstanden im 19. Jahrhundert durch das Ändern des fünften euklidischen Axioms (Parallelenaxiom) nichteuklidische Geometrien (vgl. Arens 2009, S. 1).

Die einzelnen Teilgebiete der Mathematik wurden auf die strukturellen Beziehungen zwischen den Elementen des betreffenden Gebiets reduziert (vgl. Yourgrau 2005, S. 69). Die Bedeutung der Begriffe spielt dabei keine Rolle, denn *„jede Definition führt einen Begriff lediglich auf andere Begriffe zurück, die ihrerseits einer Erklärung bedürfen“* (Hoffmann 2013, S. 18).

> *„Wenn die Axiome gewissermaßen das Spielfeld abstecken und die wichtigsten Grundregeln angeben, ist doch noch immer nicht klar, wer die Spieler sind und wie der Ball aussieht – wenn es überhaupt einen gibt.“*
> (Arens 2008, S. 22)

Hilbert soll gesagt haben*, „man könne statt „Punkte, Geraden und Ebenen“ jederzeit auch „Tische, Stühle und Bierseidel“ sagen; es komme nur darauf an, dass die Axiome erfüllt sind“* (Österreicher 2014, S. 110)*.*

Aus dieser Sicht erscheint die Definition der Mathematik als Wissenschaft des Schemas und der deduktiven Struktur passend. Aus den Axiomen sollten alle Sätze eines mathematischen Teilgebiets nach formalen Umformungsregeln hergeleitet werden können (vgl. Yourgrau 2005, S. 67). Diese Herleitungsregeln sind *„eine Frage der reinen Syntax, eine Reihe von mechanischen Instruktionen, die sich blind anwenden ließen ohne Rücksicht auf die Wahrheit oder den mathematischen Inhalt“* (ebd., S. 70). Gödel zeigte die Grenzen dieser formalen Methode auf und bewies, dass weder die Vollständigkeit noch die Widerspruchsfreiheit in Axiomensystemen garantiert ist (vgl. Hoffmann 2013, S. 38 ff; Wußing 2009, S. 460 f). Daher braucht es in der Mathematik, trotz der Bedeutung formaler Systeme, weiterhin Intuition und Kreativität (vgl. Yourgrau 2005, S. 90). Diese Einsicht schlägt eine Brücke zwischen formalen Systemen und der Mathematik *“as a socially constructed body of knowledge”* (Clements & Ellerton 1996, S. 109).

2.3 Vielfältig vernetzte Muster in der Mathematik

Für Lernen in einem *konstruktivistischen Umfeld* (vgl. Kap. 1, 3.8) ist die Definition von Mathematik als *„Wissenschaft des Schemas und der deduktiven Struktur“* (Davis & Hersh 1985, S. 109; vgl. Kap. 2.2) nur zum Teil geeignet. *„Das axiomatisch-deduktive Arbeiten ist […] nicht der primäre Modus unserer Gehirns, sondern muss herangebildet, erlernt und in vielfältigen Kontexten erprobt werden“* (Leuders 2003, S. 47). Eher passend für Mathematiklernen ist eine Definition, welche auf mathematischen Mustern und ihren vielfältigen Beziehungen beruht. Devlin (1994) spricht von *„The Science of Patterns“.* Mögliche Übersetzungen von *pattern* sind neben *Muster* auch *Vorlage* oder eben auch *Schema* (vgl. Wittmann & Müller 2012, S. 66). Im deutschen Sprachraum wird im Zusammenhang mit Mathematik eher der Begriff *Muster* verwendet, der jedoch unterschiedliche Assoziationen wecken kann. So kann ein *Muster* ein Modell, ein Ideal oder eine Vorlage sein, nach der gearbeitet wird (vgl. DUDEN 1972, Stichwort Muster; Lüken 2012, S. 19 f). Spricht man von etwas *Musterhaftem,* meint man etwas *Vorbildliches*; in einer Verzierung oder einem Ornament ist ein *Muster* ein sich wiederholendes Motiv. Ein *Muster* kann auch ein kleines Stück eines Gegenstandes sein, welches die Beschaffenheit des Ganzen zeigt (vgl. Wittmann & Müller 2012, S. 66). Devlin (2001) charakterisiert mathematische Muster folgendermaßen:

> *„[…] dass es sich bei den in der Mathematik untersuchten Mustern um teils reale, teils nur in der Vorstellung vorhandene handelt, um unbewegliche oder bewegliche (statische oder dynamische), qualitative oder quantitative, anwendungsbezogene oder rein zur Freude des Betrachters erdachte. Sie entstehen in der Welt, die uns umgibt, tauchen aus den Tiefen von Raum und Zeit und ergeben sich aus den Aktivitäten des menschlichen Geistes.“*
> (ebd., S. 23)

Muster in der Mathematik können sich beim Lösen von Sachsituationen oder mathematischen Problemen herausbilden. Das Erkennen von Mustern bedingt die Vernachlässigung unwichtiger Details und das Herausarbeiten übereinstimmender oder unterscheidender Merkmale (vgl. Kap. 2.3.4). *Verallgemeinern* und *Abstrahieren* sind daher wichtige Denkprozesse beim Mathematiklernen (vgl. Kap. 2.4).

> *„In der Mathematik wird die Abstraktion, d.h. das Absehen von unwichtigen Details, aber bewusst zum Programm erhoben und so weit wie nur möglich getrieben. Mithilfe mathematischer Begriffe können daher auch vollkommen verschiedene Dinge unter einen* ***mathematischen Hut*** *gebracht werden. Insofern ist für dieses Fach die Bezeichnung* ***Wissenschaft von Mustern*** *gerechtfertigt."*
>
> (Wittmann & Müller 2012, S. 66, Hervorh. im Orig.)

Die Auffassung von Mathematik als *Wissenschaft der Muster* passt zur Arbeitsweise unseres Gehirns. Neuronale Netze haben *„eine ausgeprägte Fähigkeit zum* ***Erkennen von Mustern****"* (Leuders 2003, S. 42, Hervorh. im Orig.). Artifizielle Netze können Bilder und Schriften erkennen und kommen in Bereichen wie der automatischen Handschriftenerkennung, der Erkennung von Gesichtern in Sicherheitskontrollen oder Börsenprognosen zur Anwendung. Mit dem Gehirn verfügen die Menschen über ein äußerst leistungsfähiges natürliches neuronales Netz und damit über ausgeprägte Fähigkeiten zur Mustererkennung. *„Es erkennt Muster und erschließt Regeln auf induktive und meist unbewusste Weise"* (ebd., S. 47). Der Komplexitätsgrad des Gehirns ist dabei wesentlich höher als derjenige artifizieller Netze (vgl. Malsburg, in Eckoldt 2013, S. 98). Diese Fähigkeit kann sich in geeigneten Lernsettings positiv auf das Mathematiklernen auswirken. Die Folgerungen aus den Zusammenhängen der Fähigkeit des Gehirns zur Mustererkennung, den Vorstellungen von Mathematik und dem Lehr-Lernverständnis werden in Kapitel 3 diskutiert. In den folgenden Teilkapiteln wird exemplarisch die Bedeutung mathematischer Muster im spiraligen Curriculum illustriert.

2.3.1 Das Muster *Dreieckszahlen* entdecken

Den Schülern des 4.-6. Schuljahres in der Projektschule *Mastrils* wurden folgende Aufgaben gestellt (vgl. Matter 2014, S. 6 f; Rasch 2008, S. 89 ff; Steinmetz 2010, S. 27 ff):

> *4. Klasse: 4 Freunde verabschieden sich voneinander mit Handschlag. Wie viele Handschläge sind es?*
>
> *5. Klasse: 5 Freunde verabschieden sich voneinander mit Handschlag. Wie viele Handschläge sind es?*
>
> *6. Klasse: 6 Freunde verabschieden sich voneinander mit Handschlag. Wie viele Handschläge sind es?*

Die Schüler lösten die Aufgaben in Einzelarbeit. Bei den unterschiedlichen Anzahlen der Freunde ging es nicht um einen der Jahrgangsstufe angepassten

Schwierigkeitsgrad der Aufgabe, sondern um den zusätzlichen Nutzen beim nachträglichen Vergleichen der Lösungen. Dieses Prinzip kann in altershomogenen Lerngruppen mit demselben Effekt genutzt werden. Die Abbildung 2.3-1 zeigt verschiedene Darstellungsmöglichkeiten der Lösungswege.

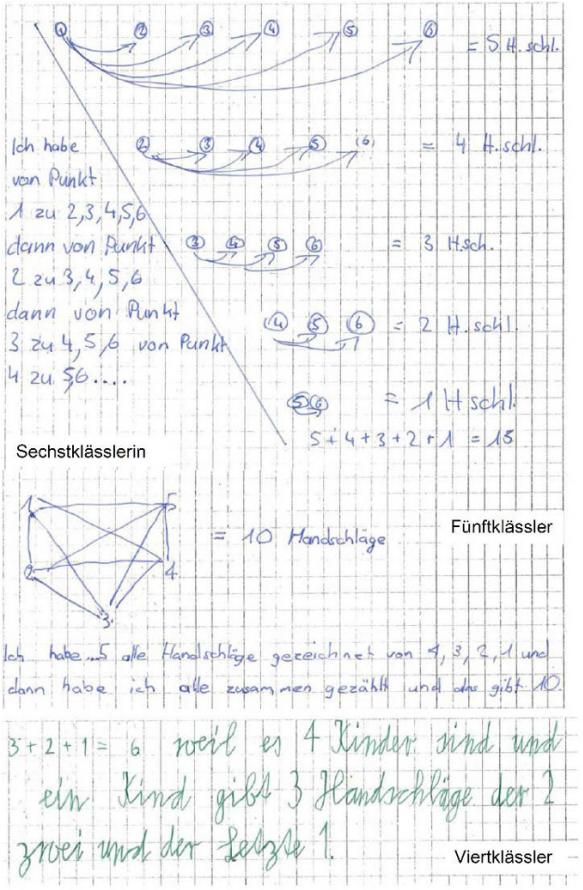


Abbildung 2.3-1: Lösungswege zur Aufgabe ‚Handschläge unter Freunden

Die Sechstklässlerin löste die Aufgabe mit einem Pfeildiagramm, der Fünftklässler mit einem Netz und der Viertklässler erklärte in einem kurzen Text. Alle Lösungsstrategien mündeten in einem übereinstimmenden Muster, nämlich in der Summe der ersten 3, 4 oder 5 natürlichen Zahlen, je nach vorgegebener Anzahl der Freunde.

Nach dem individuellen Lösen wurden Dreiergruppen gebildet, so dass je ein Schüler jeden Jahrgangs vertreten war. Neben dem Austausch über die Lösungen mussten zusätzliche Aufträge bearbeitet werden:

> *Vergleicht eure Lösungswege. Findet ihr Gemeinsamkeiten?*
> *Wie viele Handschläge sind es bei 7, 8, 9 oder 10 Freunden? Begründet eure Antwort.*

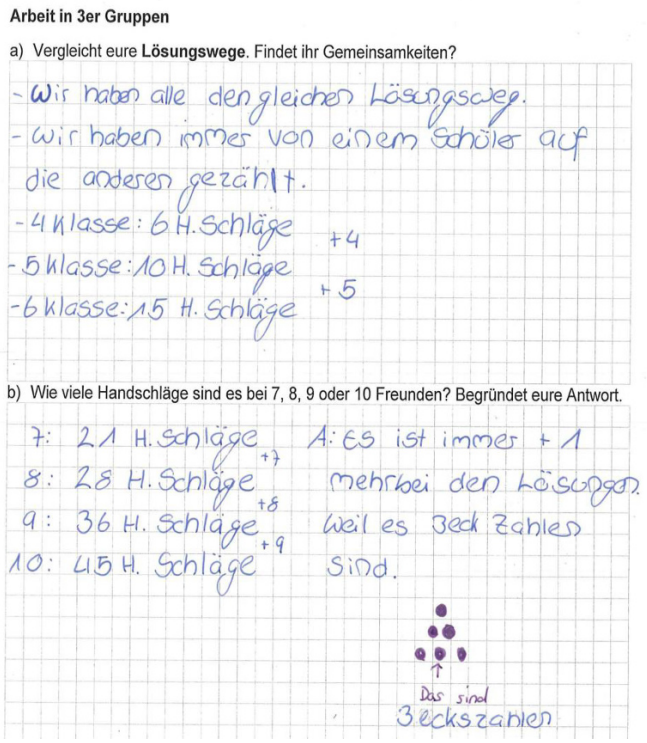


Abbildung 2.3-2: Antworten einer Dreiergruppe

Schüler, welche die Lösungen nur teilweise gefunden hatten, konnten mithilfe der Erklärungen ihrer Mitschüler ihre Strategien vervollständigen, die helfenden Kinder vertieften durch das Erklären die eigenen Erkenntnisse (vgl. Kap. 3.9). Alle Gruppen konnten Gemeinsamkeiten in ihren Lösungswegen finden, die Muster fortsetzen und beschreiben, allerdings ohne Verwendung einer formalen Sprache (vgl. Abbildung 2.3-2).

Einzelne Gruppen erinnerten sich dabei an früher gelöste Aufgaben zur Stellentafel (vgl. Kap. 2.3.2) und notierten den Begriff *Dreieckszahlen*. Eine Gruppe hat in ihrer gemeinsamen Antwort den Ursprung dieses Begriffs dargestellt (vgl. Abbildung 2.3-2). Bereits die Lösung der Sechstklässlerin (vgl. Abbildung 2.3-1) zeigt ein Dreiecksmuster. Die Anzahlen 1, 3, 6, 10, … lassen sich mit Plättchen als Dreiecke legen, da die folgende natürliche Zahl stets als neue Plättchenreihe gelegt werden kann (vgl. Abbildung 2.3-3).

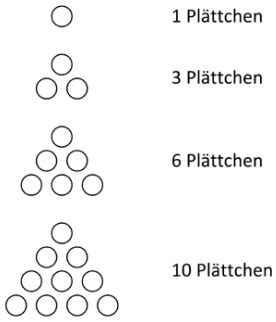


Abbildung 2.3-3: Dreieckszahlen

In der ‚Freunde-Aufgabe' kann das Hinzulegen einer weiteren Plättchenreihe konkretisiert werden. Kommt bei 4 Freunden ein 5. Freund hinzu, so bleibt die bisherige Anzahl Handschläge erhalten, also 1+2+3 = 6 Handschläge. Dazu kommen jedoch die Handschläge, welche dieser 5. Freund den 4 bisherigen Freunden gibt. Somit werden es 10 Handschläge. Dies lässt sich allgemeiner formulieren: Kommt bei n Freunden ein $(n+1)$-ter Freund dazu, so braucht es zu den bisherigen $1+2+3+\ldots+(n-1)$ Handschlägen n weitere, da der neu dazu gekommene Freund jedem bisherigen die Hand gibt. Diese Interpretation des Musters findet in zahlreichen weiteren Aufgabenstellungen über die ganze Schulzeit hinweg ihren Niederschlag. Einige weitere Beispiele werden dies belegen und zugleich dazu dienen, das Muster *Dreieckszahlen* zu umfassenderen Mustern zu erweitern.

2.3.2 Das Muster *Dreieckszahlen* fortsetzen

Ausgehend von der folgenden Aufgabe wird das Muster *Dreieckszahlen* weiter erkundet und fortgesetzt:

> *„Wie viele verschiedene Zahlen können Sie in einer dreispaltigen Stellentafel (H/Z/E) mit 1, mit 2 und mit 3 Plättchen darstellen?"*
> (Krauthausen & Scherer 2007, S. 149)

Abbildung 2.3-4 zeigt die möglichen Kombinationen in systematischer Darstellung. Die Vermutung liegt nahe, dass es sich bei den Anzahlen der möglichen Plättchen-Kombinationen wiederum um Dreieckszahlen handelt. Bei der Erhöhung um ein Plättchen kann stets die Verteilung aus der vorangegangenen Stufe übernommen werden. Für die Erhöhung von 2 auf 3 Plättchen zeigen die grau schattierten Bereiche (vgl. Abbildung 2.3-4) eine identische Verteilung, da in beiden Fällen für die Z- und die E-Spalte 0, 1 oder 2 Plättchen zum Verteilen zur Verfügung stehen. Neu dazu kommen die Varianten mit 3 Plättchen für diese beiden Spalten. Dasselbe Muster galt bereits beim Übergang von 1 auf 2 Plättchen, wie sich leicht in Abbildung 2.3-4 erkennen lässt.

	H	Z	E		
1 Plättchen	x			100	3 Zahlen
		x		10	
			x	1	
2 Plättchen	xx			200	6 Zahlen
	x	x		110	
	x		x	101	
		xx		20	
		x	x	11	
			xx	2	
3 Plättchen	xxx			300	10 Zahlen
	xx	x		210	
	xx		x	201	
	x	xx		120	
	x	x	x	111	
	x		xx	102	
		xxx		30	
		xx	x	21	
		x	xx	12	
			xxx	3	

Abbildung 2.3-4: Plättchen in der Stellentafel

Auch für die weiteren Übergänge gilt diese Gesetzmäßigkeit entsprechend. Beim Übergang von n auf $(n+1)$ Plättchen kann für $1, 2, \dots, n, (n+1)$ Plättchen in der H-Spalte die Verteilung übernommen werden, da $0, 1, \dots, n$ Plättchen für die beiden anderen Spalten zur Verfügung stehen. Neu dazu kommen die Varianten mit $(n+1)$ Plättchen verteilt in den beiden rechten Spalten. Dieses Muster ähnelt dem Muster beim Übergang von n auf $(n+1)$ Freunde in Kapitel 2.3.1. Unklar ist jedoch noch, weshalb bei dieser Plättchenverteilung die Zunahme der Anzahl Varianten stets der folgenden natürlichen Zahl entspricht, oder formaler ausgedrückt: Beim Übergang von n auf $(n+1)$ Plättchen nimmt die Anzahl der möglichen Zahlen um $(n+2)$ zu. Das lässt sich verifizieren durch eine systematische Verteilung der Plättchen auf die beiden rechten Spalten: Zuerst liegen alle $(n+1)$ Plättchen in der Z-Spalte, nachfolgend wird ein Plättchen nach dem anderen in die E-Spalte verschoben, bis alle $(n+1)$ Plättchen

in der E-Spalte liegen. Somit kommen $(n+2)$ neue Varianten hinzu und das Muster *Dreieckszahlen* ist bestätigt. Bei n Plättchen können also $1+2+3+\ \ldots+n+(n+1)$ verschiedene Zahlen gelegt werden.

Doch wie lassen sich solche Summen effizient ausrechnen, beispielsweise die Summe der ersten 100 natürlichen Zahlen? Glaubt man der Überlieferung, so entspricht das einer Aufgabe, welche der junge Carl Friedrich Gauß im Gymnasium in Braunschweig lösen musste (vgl. Wolff et al. 1966, S. 10). Er überraschte seinen Lehrer mit der schnell gefundenen richtigen Lösung. Die Erkenntnis, dass $1+100, 2+99, 3+98, \ldots, 50+51$ stets 101 ergibt, mündet im Ergebnis $50 \cdot 101 = 5050$. Die Herleitung dieser Formel ist zugleich ein Beispiel für ein Muster, das sich arithmetisch und geometrisch konkretisieren lässt (vgl. Abbildung 2.3-5). Die Verallgemeinerung der geometrischen oder arithmetischen Überlegungen führt auf die Gauß'sche Summenformel $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen.

Anstatt die Summen aus der ersten und letzten Zahl, der zweiten und zweitletzten Zahl usw. zu bilden, können die Summen in entgegengesetzter Reihenfolge untereinander geschrieben werden, z. B. für die Summe von 1 … 10:

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10
10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1

11 +11+11+11+11+11+11+11+11+ 11 $= 10 \cdot 11 = 110 \Rightarrow 1+2\,..+10 = \frac{10\cdot 11}{2} = 55$

Geometrische Deutung:
Durch punktsymmetrisches Zusammenfügen von zwei Dreiecken mit 10 Plättchen in der längsten Plättchenreihe entsteht ein Rechteck mit den Seiten 10 und 11 Plättchen.

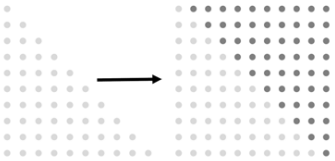


Abbildung 2.3-5: Summenformel von Gauß

Die Verwandtschaft des Musters *Dreieckszahlen* und des Musters $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ kann am Beispiel der Handschläge unter Freunden auch mit unterschiedlichen Lösungsstrategien veranschaulicht werden. In der ersten Strategie, welche in den Dokumenten der Schüler erkennbar ist (vgl. Abbildung 2.3-1), verabschiedet sich der erste von n Freunden von den $(n-1)$ anderen Freunden, der zweite muss dem ersten die Hand nicht mehr schütteln und macht somit noch $(n-2)$ Handschläge. Das geht so weiter bis zum letzten Freund, der gar keine Hand mehr schütteln muss. Es resultiert somit die Summe der ersten $(n-1)$ natürlichen Zahlen. Die zweite Strategie fußt auf der Überlegung, dass jeder der n Freunde $(n-1)$ Handschläge gibt. Damit wird aber jeder Handschlag doppelt gerechnet, also ergeben sich $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ Handschläge. Das

entspricht zugleich der Summenformel für die Summe der ersten $(n-1)$ natürlichen Zahlen[4].

Die Aufgabe mit der Stellentafel regt zu einer Ausdehnung der Überlegungen an. Was geschieht, wenn neben der Anzahl der Plättchen auch die Anzahl der Spalten variiert? Gibt es Fortsetzungen des Musters *Dreieckszahlen*? Mit dieser Frage haben sich die Viert-, Fünft- und Sechstklässler der Projektschule Mastrils im Schuljahr 2010/11 auseinandergesetzt. Dabei ist die Tabelle in Abbildung 2.3-6 entstanden.

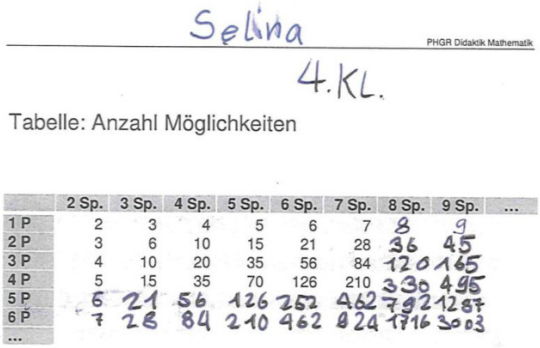


Abbildung 2.3-6: Plättchen legen in mehrspaltigen Stellentafeln

Bisher wurde das Legen von Plättchen in einer dreispaltigen Stellentafel diskutiert. Dabei ergab sich aus der Verteilung der Plättchen in 2 Spalten die Begründung für den Zuwachs der Verteilungsmöglichkeiten beim Schritt von n auf $(n+1)$ Plättchen. Es wurde festgestellt, dass beim Schritt von 2 auf 3 Plättchen 4 neue Zahlen dazu kommen, von 3 auf 4 Plättchen 5 neue Zahlen oder allgemein beim Schritt von n auf $(n+1)$ Plättchen $(n+2)$ neue Zahlen. Aus der Begründung für diesen Zuwachs (s. o.) folgt, dass bei 2 Spalten mit wachsender Anzahl an Plättchen die Folge der natürlichen Zahlen entsteht. Für 3 Spalten wurde die Folge der Dreieckszahlen hergeleitet. Die schrittweise Zunahme der Plättchen entspricht den Zahlen in der Spalte links davon, also derjenigen für 2 Plättchen: $3+3=6,\ 6+4=10,\ 10+5=15$ und so weiter. Offenbar lässt sich dieses Muster weiterführen. Bei der vierspaltigen Stellentafel entspricht die jeweilige Zunahme den Dreieckszahlen der vorhergehenden Spalte: $4+6=10,\ 10+10=20$ und so weiter. Es handelt sich daher um Summen von

[4] Der Unterschied der beiden Formeln liegt in der unterschiedlichen Bedeutung des Parameters n.

Dreieckszahlen, die *Tetraederzahlen* (vgl. Schmidt 1997, S. 42). Eine passende Vorstellung von Tetraederzahlen ergibt sich, wenn Dreiecke aus Kugeln oder Sandsäcken so übereinander geschichtet werden, dass ein Tetraeder entsteht (vgl. Oechsler 2014, S. 27 ff).

Für die fünfspaltige Stellentafel ergeben sich somit Summen von *Tetraederzahlen*. Da dies geometrisch nicht mehr veranschaulicht werden kann, nennt man sie *Hypertetraederzahlen*[5] (vgl. Gardner 1980, S. 201 f). Im Fall der fünfspaltigen Stellentafel spricht man von *Hypertetraederzahlen 1. Ordnung,* in den nachfolgenden Spalten entsprechend von *Hypertetraederzahlen 2., 3., 4., … Ordnung*:

Natürliche Zahlen	1, 2, 3, 4, 5, 6, …
Dreieckszahlen	1, 3, 6, 10, 15, 21, …
Tetraederzahlen	1, 4, 10, 20, 35, 56, …
Hypertetraederzahlen 1. Ordnung	1, 5, 15, 35, 70, 126, …
Hypertetraederzahlen 2. Ordnung	1, 6, 21, 56, 126, 252, …
usw.	

Die Tabelle in Abbildung 2.3-6, welche nach rechts und nach unten unbegrenzt ist, zeigt dieses Muster auch in horizontaler Leseweise, nämlich bei der Zunahme der Spaltenzahl bei konstanter Anzahl Plättchen. Alle Zahlen außer 2 treten mindestens zweimal auf und sind Glieder von Folgen unterschiedlicher Ordnung. Die Zahl 2 erscheint lediglich als *natürliche Zahl.* Die weiteren Zahlen 6, 20, 70, 252,… in der Diagonalen (vgl. Abbildung 2.3-6) tauchen als *natürliche Zahlen* und in je zwei weiteren Folgen auf, so die 6 als *Dreieckszahl* und *Hypertetraederzahl 2. Ordnung,* 20 als *Tetraederzahl* und *Hypertetraederzahl 16. Ordnung* und so fort. Bei den natürlichen Zahlen ab der 2 in der 1. Zeile, welche insgesamt genau zweimal erscheinen wie 4, 5, 7, 8, 9, 11, …, handelt es sich stets um ein 2. Glied einer der oben aufgelisteten Zahlenfolgen und damit auch um die Zahlen in der ersten Spalte in Abbildung 2.3-6. Genau viermal auftretende Zahlen gehören zu je vier Folgen verschiedener Ordnung. So tritt 10 als *natürliche Zahl*, als *Dreieckszahl,* als *Tetraederzahl* und als *Hypertetraederzahl 6. Ordnung* in Erscheinung, 56 als *natürliche Zahl, Tetraederzahl, Hypertetraederzahl 2. Ordnung* und als *Hypertetraederzahl 52. Ordnung.* Die Zahl 1 taucht als 1. Glied jeder der unendlich vielen Zahlenfolgen unendlich oft auf. Hätte Abbildung 2.3-6 eine Spalte für eine einspaltige Stellentafel und eine Zeile für 0 Plättchen, so würden diese aus lauter Einsen bestehen.

[5] Dieser Begriff ist abgeleitet aus dem Begriff Hypertetraeder für ein Tetraeder im 4-dim. Raum.

Entsprechend der Zugehörigkeit zu verschiedenen Folgen, kann eine Zahl unterschiedlich gedeutet werden. So wurde 10 beim Legen von 3 Plättchen in der dreispaltigen Stellentafel als Dreieckszahl interpretiert (vgl. Kap. 2.3.2). 10 könnte jedoch auch als Tetraederzahl verstanden werden (vgl. Abbildung 2.3-4): Bei 3 Plättchen gibt es 6 Zahlen mit mindestens einem Hunderter, 3 Zahlen ohne Hunderter, jedoch mindestens einem Zehner und 1 Zahl mit nur Einern. Entsprechende Deutungen können für andere mehrfach auftretende Zahlen gefunden werden.
Das Potenzial dieser Aufgabenstellung erscheint unerschöpflich. Die Zahlenfolgen in Abbildung 2.3-6 allein bieten bereits zahlreiche Möglichkeiten zur Erkennung von Mustern und zum Kommunizieren und Argumentieren. Die Muster laden losgelöst von einem realen Kontext zu weiteren Entdeckungen, Verallgemeinerungen und Abstraktionen ein (vgl. Kap. 2.4). Bevor weitere Konkretisierungen der diskutierten Muster aufgegriffen werden, folgt eine Betrachtung des Pascaldreiecks.

2.3.3 Beziehungen zum Pascaldreieck entdecken

Plättchen können nicht nur gelegt, sondern auch geworfen werden. Die Farbverteilungen beim Werfen zweifarbiger Wendeplättchen sind passende Veranschaulichungen von Zahlzerlegungen. So findet sich in der Schweizer Ausgabe des Zahlenbuchs 1 (vgl. Wittmann et al. 2012a, S. 51 ff) eine entsprechende Aufgabe mit 5 Plättchen, also aller möglichen Zerlegungen der Zahl 5 in zwei Summanden (vgl. Abbildung 2.3-7).

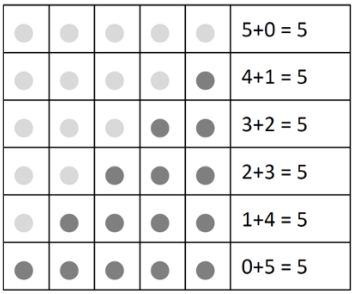


Abbildung 2.3-7: Farbverteilung und Zahlzerlegung

Durch die Variierung der Anzahl Plättchen ergeben sich die Zerlegungen weiterer Zahlen. Obwohl das Üben von Zahlzerlegungen im Vordergrund steht, machen die Kinder auch Erfahrungen zur Kombinatorik und zur Wahrscheinlichkeitsverteilung bei Zufallsexperimenten. Bei 5 Plättchen erkennen sie wahrscheinlich, dass die

Aufteilungen 3 rote/2 blaue und 2 rote/3 blaue wesentlich häufiger auftreten als 5 gleichfarbige Plättchen. Durch Aufzeichnen oder Legen der verschiedenen Möglichkeiten (vgl. Abbildung 2.3-8) kann die Ursache der ungleichen Wahrscheinlichkeiten veranschaulicht werden.

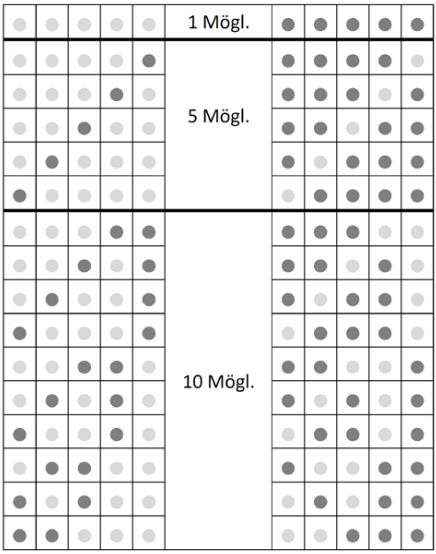


Abbildung 2.3-8: Veranschaulichung der Wahrscheinlichkeitsverteilung

Das kombinatorische Muster hat eine geometrische Ausprägung, welche die Symmetrie der Verteilung erkennen lässt und findet zugleich ihren ‚arithmetischen Niederschlag' in den Tauschaufgaben der Abbildung 2.3-7. Aufgaben mit diesem oder ähnlichen kombinatorischen Mustern werden den Kindern in der Schule und im Alltag immer wieder begegnen (vgl. Kap. 2.3.4).
Die Abbildung 2.3-9 zeigt einen systematischen Überblick über die Farbverteilungen rot/blau beim Werfen von 1, 2, 3, 4 oder 5 Plättchen. Die Bestimmung der Verteilung ist bei kleinen Anzahlen einfach[6]:

[6] Solche Verteilungen können mit in der Wahrscheinlichkeitsrechnung üblichen Baumdiagrammen veranschaulicht und bestimmt werden (vgl. Schmid & Schweizer 1988, S. 8 f; Selter & Spiegel 2004, S. 291 ff; Wittmann et al. 2012a, S. 52).

- 1 Plättchen: 1 x rot (r), 1 x blau (b)
- 2 Plättchen: 1 x rr, 2 x rb (rb, br), 1 x bb.
- 3 Plättchen: 1 x rrr, 3 x rrb (rrb, rbr, brr), 3 x rbb (rbb, brb, bbr), 1 x bbb

Bei den einfarbigen Varianten müssen alle Plättchen die gleiche Farbe zeigen. Daher gibt es in diesen Fällen stets nur eine Möglichkeit. Somit muss in der Tabelle zuoberst und zuunterst stets eine 1 stehen. Einfach lassen sich auch die Anzahlen des Typs xxx…xxxy (ein Plättchen einer bestimmten Farbe, alle anderen Plättchen zeigen die jeweils andere Farbe) ermitteln. Handelt es sich insgesamt um n Plättchen, so kann jedes die Farbe y zeigen, somit sind es n Möglichkeiten:

- xxx…xxyx
- xxx…xyxx
- …
- xyx…xxx
- yxx…xxx.

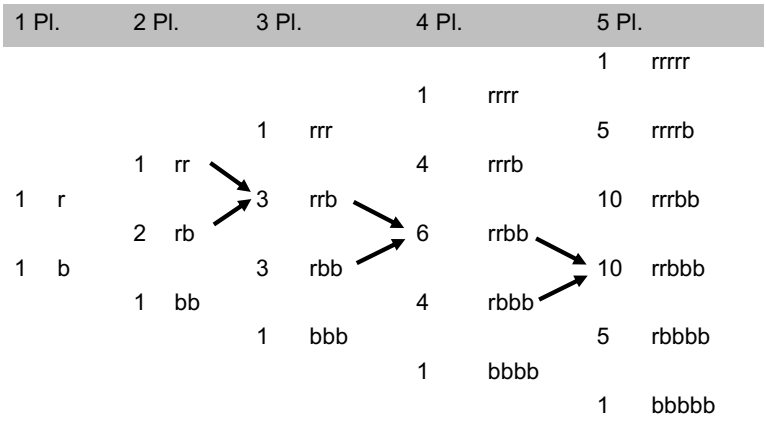


Abbildung 2.3-9: Aufteilungen beim Werfen von 1, 2, 3, 4 oder 5 Plättchen

Also stehen an den entsprechenden Stellen in der Tabelle stets natürliche Zahlen. Wenn beide Farben mehrfach auftreten, wird die Bestimmung der Anzahlen zunehmend anspruchsvoller. Eine rekursive Strategie erleichtert diese Arbeit. Exemplarisch kann dieses Vorgehen anhand der Pfeile in Abbildung 2.3-9 nachverfolgt werden:

- Beim Übergang von 2 auf 3 Plättchen ergibt sich die Situation rrb durch Hinzufügen von einem blauen Plättchen zu rr (→ rrb) oder durch Hinzufügen

von einem roten Plättchen zu den beiden Varianten rb (→ rbr, brr). Also sind es insgesamt 1+2 = 3 Möglichkeiten.

- Beim Übergang von 3 auf 4 Plättchen ergibt sich die Situation rrbb durch Hinzufügen von einem blauen Plättchen zu den drei Varianten von rrb (→ rrbb, rbrb, brrb) oder durch Hinzufügen von einem roten Plättchen zu den ebenfalls drei Varianten von rbb (→ rbbr, brbr, bbrr). Damit sind es insgesamt 3+3 = 6 Möglichkeiten.
- Beim Übergang von 4 auf 5 Plättchen kann entsprechend abgeleitet werden, dass bei rrbb in allen 6 Fällen ein blaues Plättchen und in allen 4 Fällen von rbbb ein rotes Plättchen dazu gefügt wird. Somit sind es 6+4 = 10 Möglichkeiten für die Situation rrbbb.

Mithilfe dieser rekursiven Überlegung können alle weiteren Anzahlen bestimmt werden. Durch Weglassen der Farbverteilungen erhält man das *Pascaldreieck*, das üblicherweise in Zeilen, nicht in Spalten notiert wird (vgl. Abbildung 2.3-10; Gardner 1980, S. 202).

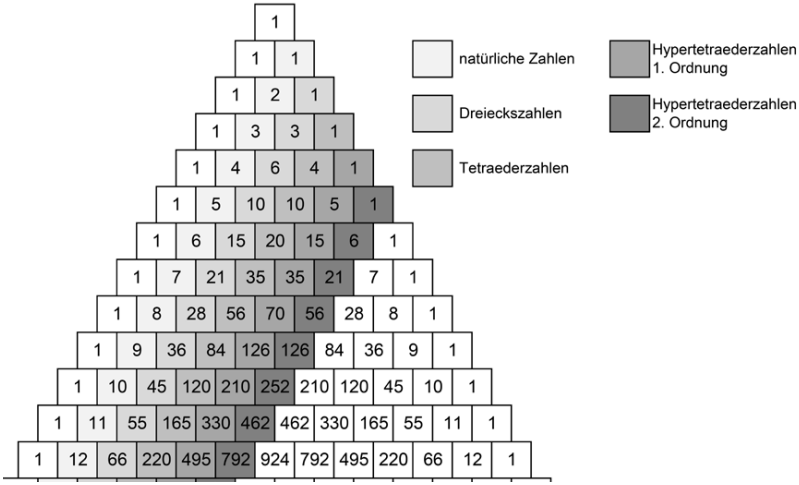


Abbildung 2.3-10: Pascaldreieck

An der Spitze wird eine 1 hinzugefügt. Beim Plättchenwurf entspricht dies dem Werfen von 0 Plättchen, es fällt weder rot noch blau. Entsprechend nummeriert man die Zeilen im Pascaldreieck mit 0 beginnend und kann daher die Zeilennummer stets in der 2. Diagonalen (links oder spiegelbildlich rechts) ablesen. Die Diagonalen werden von links nach rechts ebenfalls mit 0 beginnend nummeriert. (Aus Symmetriegründen könnte diese Nummerierung auch von rechts nach links erfolgen.)

Im Pascaldreieck sind zahlreiche Muster enthalten, ebenso zahlreich sind deren Anwendungsmöglichkeiten (vgl. Bicker 2011, S. 46 ff; Enzensberger 2011, S. 125 ff; Gardner 1980, S. 199 ff; Gerdiken 2000, S. 11 ff; Selter & Spiegel 2004, S. 297 ff). Einige Muster und Anwendungen folgen aus den bisherigen Überlegungen in diesem Kapitel:

- Im Pascaldreieck steht in den äußersten Diagonalen stets die Zahl 1. Die weiteren Zahlen sind jeweils gleich der Summe der beiden benachbarten Zahlen in der vorhergehenden Zeile. (Die Zahlen der k-ten und $(k+1)$-ten Diagonalen in der n-ten Zeile ergeben die Zahl in der $(n+1)$-ten Zeile und $(k+1)$-ten Diagonalen). Stellt man sich in allen Zellen außerhalb des Dreiecks eine 0 vor, so kann dieses Muster auch auf die 1 an den Rändern übertragen werden. Aus diesem Bildungsgesetz des Pascaldreiecks folgt, dass die Summe der Zahlen einer Zeile stets doppelt so groß ist wie die Summe der Zahlen in der vorhergehenden Zeile. Daher handelt es sich bei diesen Summen stets um Potenzen von 2, in der n-ten Zeile beträgt die Summe 2^n.
- Werden die ersten n Zahlen in einer Diagonalen addiert, so entspricht die Summe derjenigen Zahl, welche in der Zelle rechts unter der letzten Zahl der zu berechnenden Summe steht. Beispielsweise beträgt die Summe der ersten 11 natürlichen Zahlen 66. Daraus folgt, dass die 2. Diagonale der Folge der Dreieckszahlen entspricht, die 3. Diagonale den Tetraederzahlen, die 4. Diagonale den Hypertetraederzahlen 1. Ordnung und so weiter (vgl. Abbildung 2.3-10).
- Die Anzahlen der Möglichkeiten beim Werfen von n Plättchen lassen sich in der n-ten Zeile ablesen. Beispielsweise gibt es 210 Möglichkeiten für 6xr/4xb, ebenso 210 Möglichkeiten für 4xr/6xb. Würde man alle Anordnungen aufzeichnen, könnte man die roten und blauen Felder austauschen (vgl. Symmetrie in Abbildung 2.3-8 für 5 Plättchen). Dieser Zusammenhang wird im Pascaldreieck durch die vertikale Symmetrieachse repräsentiert.
- Die Anzahl der Handschläge beim Verabschieden von n Freunden (vgl. Kap. 2.3.1) kann im Pascaldreieck direkt abgelesen werden. Wenn sich 8 Freunde voneinander verabschieden, so ergeben sich 28 Handschläge. Diese Zahl 28 steht in der Zelle rechts neben der Zahl 8.
- Der Vergleich von Abbildung 2.3-6 und Abbildung 2.3-10 zeigt, dass die Anzahl der Lösungen beim Legen von n Plättchen in einer Stellentafel ebenfalls im Pascaldreieck enthalten ist. Offenbar liegt jedoch ein struktureller Unterschied zur Aufgabe mit den Handschlägen vor, der sich im Pascaldreieck bemerkbar macht. Während bei den ‚Handschlägen der Freunde' die Anzahl der

Möglichkeiten in der rechten Nachbarzelle steht, sind beim Legen von Plättchen entsprechende Anzahlen in den Diagonalen zu finden. Im Kapitel 2.3.5 wird dieser Unterschied begründet.

- Die Abbildung 2.3-6 ist bereits eine Darstellung des Pascaldreiecks, wie ein Vergleich mit Abbildung 2.3-10 zeigt. Die natürlichen Zahlen in der 1. Diagonalen, außer der Zahl 2, können auch als 2. Glied einer der unendlich vielen weiteren Zahlenfolgen gelesen werden. Diejenigen Zahlen, welche in weiteren Diagonalen des Pascaldreiecks erscheinen, gehören entsprechend zu weiteren Folgen. Falls diese auf der vertikalen Symmetrieachse liegen (6, 20, …), handelt es sich jeweils um die gleiche Diagonale und damit um die gleiche Zahlenfolge, anderenfalls um unterschiedliche Diagonalen und Folgen (vgl. Kap. 2.3.2).

2.3.4 Beziehungen zwischen Mustern erkunden

Bestimmte Muster zeigen sich in unterschiedlichen Teilgebieten der Mathematik und lassen sich auf unterschiedlichen kognitiven Niveaus erfahren und anwenden. Muster können mehr oder weniger eng ‚verwandt' sein, d. h. sie weisen neben gemeinsamen Merkmalen, ein, zwei oder mehrere unterschiedliche Merkmale auf. Es gibt völlig strukturgleiche Aufgaben, obwohl sie in einem anderen Kontext eingebettet sind. In diesen Aufgaben zeigen sich identische Muster. In andern Aufgaben werden bereits bekannte Muster fortgesetzt oder in allgemeinerer Form aufgegriffen. Damit die Beziehungen der Muster untereinander erkannt und in neuen Aufgabenstellungen erfolgreich angewendet werden können, müssen Lernende durch Abstrahieren die wesentlichen Eigenschaften herausarbeiten (vgl. Wittmann & Müller 2012, S. 66). Für die erfolgreiche Bewältigung solcher Prozesse brauchen die Schüler gute Beispiele, damit sie durch *Mathematisieren* (vgl. Kap. 2.4, 2.5) zu entsprechenden Einsichten gelangen können. Wie in der Einleitung zu Kapitel 2.3 ausgeführt wurde, hängt dies mit der Arbeitsweise unseres Gehirns zusammen.

In diesem Kapitel werden die bereits betrachteten Muster in ein ausgedehnteres Beziehungsnetz eingebettet und ihre Bedeutung im Verlauf der Schulzeit exemplarisch dargelegt. Ausgangspunkt ist die Frage nach den Gemeinsamkeiten und Unterschieden dieser Muster. Bei allen betrachteten Aufgaben müssen aus einer gegebenen Menge mit n Elementen eine bestimmte Anzahl von Elementen ausgewählt werden. Gefragt wird nach der Anzahl der Möglichkeiten für diese Auswahl:

- Bei der Verabschiedung von Freunden besteht die gegebene Menge aus n Freunden. Gesucht ist die Anzahl der Möglichkeiten, aus diesen n Elementen 2 auszuwählen.
- Beim Werfen von Plättchen besteht die gegebene Menge aus n Plättchen. Dabei sollen k Plättchen rot zeigen (und damit die anderen $(n-k)$ Plättchen blau). Gesucht ist die Anzahl der Möglichkeiten, aus n Plättchen k rote auszuwählen.
- Beim Legen von Plättchen besteht die gegebene Menge aus n Spalten. Es werden k Plättchen gelegt. Gesucht ist die Anzahl der Möglichkeiten, aus n Elementen (Spalten) k auszuwählen, um ein Plättchen hineinzulegen.

Beim ‚Werfen' beziehungsweise ‚Legen von Plättchen' macht sich ein wesentlicher Unterschied im Muster *k Elemente aus einer Menge mit n Elementen auswählen* bemerkbar. Beim Legen können in die einzelnen Spalten mehrere Plättchen gelegt werden, d. h. die gleiche Spalte ist mehrmals wählbar. Daher kann k auch grösser als n sein. Zeigt beim ‚Plättchen werfen' ein Plättchen rot, so kann das gleiche Plättchen nicht auch blau zeigen. k kann somit höchstens gleich groß sein wie n. Auch bei den ‚Handschlägen unter Freunden' schüttelt sich ein bestimmter Freund nicht selbst die Hand. Es handelt sich um einen Spezialfall des ‚Plättchen-Werf-Musters' mit $k = 2$. In der Kombinatorik spricht man von

*k Elemente aus einer n-Menge **ohne** Wiederholung auswählen*

beziehungsweise

*k Elemente aus einer n-Menge **mit** Wiederholung auswählen* (vgl. Glaser et al. 1982, S. 35 ff; Schmid & Schweizer 1988, S. 48 ff).

Mit *Dreieckszahlen*, *Tetraederzahlen*, *Auswahl mit* und *ohne Wiederholung* beschäftigen sich die Schüler im Verlauf ihrer Schulzeit in unterschiedlichen mathematischen Teilgebieten und im Alltag immer wieder. Einige Beispiele aus verschiedenen Schuljahren sollen dies illustrieren[7].

Dem Muster *k-Auswahl aus einer n-Menge ohne Wiederholung* entsprechen die bereits diskutierten Aufgaben ‚Plättchen werfen' und ‚Handschläge unter Freunden'. Das ‚Werfen von Plättchen' erscheint in späteren Schuljahren als ‚Werfen von

[7] Die Zuweisung der Schuljahre entspricht den Lehrplänen des Kantons Graubünden, den Zuordnungen in den betreffenden Lehrmitteln oder den Erfahrungen des Autors. Die Beispiele sind ‚neutral' formuliert, wie sie in verschiedenen älteren oder neueren Lehrmitteln enthalten sind. Wörtliche Übernahme einer Aufgabe aus einem Lehrmittel wird als Zitat gekennzeichnet und die entsprechende Quelle angegeben. Die Quellenangaben entsprechen lediglich einer Auswahl aus vielen Lehrmitteln mit gleichen oder ähnlichen Aufgaben.

Münzen‘, insbesondere in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Das gleiche Muster taucht in weiteren Zusammenhängen auf:

- Die Situation mit $k = 2$ zeigt sich in Aufgaben zu Spielturnieren ‚jeder gegen jeden‘, wie etwa bei einem Tischtennis- oder Schachturnier (vgl. Bongartz et al. 2007, S. 91 f, 3. Schuljahr). Es gibt auch Einbettungen in Aufgaben zu Partys, wenn jeder mit jedem anstößt (vgl. Deller et al. 2000a, S. 67, ca. 9. Schuljahr). Während in den ersten Schuljahren das *Entdecken* im Vordergrund steht, wird in höheren Schuljahren meistens reproduzierend geübt, beispielsweise beim Thema *Gleichungen*. Dabei geht es eher um das Anwenden der (leider häufig unverstandenen) Formel $Anzahl = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ mit unterschiedlichen Vorgaben (vgl. Kap. 2.3.2). Manchmal ist die $Anzahl$ gegeben, manchmal n, manchmal melden sich Personen vom Turnier ab oder an (vgl. Deller et al. 2000a, S. 67, ca. 9. Schuljahr).
- Das gleiche Muster mit $k = 2$ erscheint auch in geometrischen Anwendungen (vgl. Deller et al. 2000b, S. 17, ca. 10. Schuljahr; Hohl et al. 2003, Arbeitsblatt A22*, 4. Schuljahr; Oechsler 2014, S. 25 f, 7. Schuljahr). Gegeben ist eine bestimmte Anzahl an Punkten[8], gesucht ist die Anzahl der Geraden, welche durch diese Punkte gelegt werden können. Der Lösungsweg des Fünftklässlers zu den ‚Handschlägen unter Freunden‘ in Abbildung 2.3-1 belegt die übereinstimmende Struktur dieser beiden Aufgaben.
  Die Aufgabe kann auch umgekehrt formuliert sein. Gegeben ist eine bestimmte Anzahl Geraden, gefragt ist die maximale Anzahl an Schnittpunkten (vgl. Büktas 1978, S. 87, ca. 11. Schuljahr). In einigen Lehrmitteln wird die Aufgabe ausgedehnt auf die Auswahl von 3 Punkten ($k = 3$), wenn nach der Anzahl Dreiecke oder Kreise gefragt wird, welche durch die gegebenen Punkte bestimmt sind (vgl. Glaser et al. 1982, S. 42, ca. 11. Schuljahr).
- Binomische Formeln werden in allen Algebra Schulbüchern thematisiert. Das Muster entspricht dem Muster beim Werfen von Plättchen. Bei dieser Aufgabe werden aus 5 Plättchen 0, 1, 2, 3, 4 oder 5 Plättchen ausgewählt, welche rot zeigen. Die restlichen Plättchen zeigen blau (vgl. Abbildung 2.3-8). Beim Ausmultiplizieren des Terms $(a + b)^5$ wird aus 0, 1, 2, 3, 4 oder 5 Klammern der Parameter b, aus den übrigen a, ausgewählt. Der ausmultiplizierte Term

[8] Dabei dürfen nie drei oder mehr Punkte auf einer Geraden liegen.

lautet daher $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ (vgl. Glaser et al. 1982, S. 41 f, ca. 11. Schuljahr; Selter & Spiegel 2004, S. 299; Kap. 2.3.5).

- Das Muster aus dem ‚Plättchen werfen' manifestiert sich auch in Aufgaben zu ‚kürzesten Wegen' in Quadratrastern (vgl. Büktas 1978, S. 87, ca. 11. Schuljahr; Hengartner et al. 2010, S. 235 ff, 1.-4. Schuljahr; Wittmann et al. 2012a, S. 187 f, 1. Schuljahr). Soll die Anzahl der kürzesten Wege von A nach B bestimmt werden, so muss aus fünf Entscheidungen an Kreuzungen zweimal links gewählt werden, die anderen dreimal rechts (vgl. Abbildung 2.3-11). Das entspricht wiederum dem Werfen von fünf Plättchen, wobei zweimal rot fallen soll. Es gibt zehn Wege. Hengartner et al. (2010, S. 236) weisen ausdrücklich auf den Zusammenhang mit dem Pascaldreieck hin: Um die Anzahl der (kürzesten) Wege zu einer bestimmten Kreuzung zu bestimmen, müssen stets die Anzahlen der Wege zu den beiden vorhergehenden Kreuzungen addiert werden.

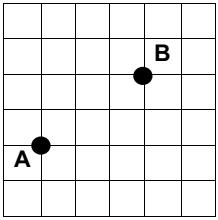


Abbildung 2.3-11: Wege im Schachbrettmuster

- Beim Zahlenlotto werden aus 45 (n) Zahlen 6 (k) Gewinnzahlen ausgewählt (vgl. Glaser et al. 1982, S. 40 ff, ca. 11. Schuljahr; Keller et al. 2013, S. 91 ff, 9. Schuljahr). Die Berechnung der Anzahl möglicher Tipps führt wiederum auf die gleiche Struktur wie beim Werfen von Plättchen: Es werden 45 Plättchen geworfen. Wie viele Möglichkeiten gibt es für 6 rote?

In Stochastik-Lehrmitteln wird das Muster *k-Auswahl aus einer n-Menge ohne Wiederholung* mit dem Urnenmodell durch *Ziehen ungeordneter Stichproben ohne Zurücklegen* (oder *mit einem Griff*) verknüpft (vgl. Schmid & Schweizer 1988, S. 53 ff, ca. 11. Schuljahr). Im Pascaldreieck können die Anzahlen zum Muster *k-Auswahl aus einer n-Menge ohne Wiederholung* in der Zeile n und der Diagonalen k abgelesen werden. Beispielsweise ist 210 der Koeffizient von a^4b^6 beim Ausmultiplizieren des Binoms $(a + b)^{10}$, der Wert steht in der 10. Zeile und 6. (oder 4.) Diagonalen. Die vertikale Symmetrieachse des Pascaldreiecks äußert sich darin, dass es nicht darauf ankommt, a oder b, rot oder blau auszuwählen.

Beim Muster *k-Auswahl aus einer n-Menge mit Wiederholung* ist die Aufgabe mit dem ‚Legen von Plättchen in der Stellentafel' ab dem 3. Schuljahr für Orientierungsübungen im Zahlenraum und für die Förderung des Verständnisses von Dezimalbrüchen geeignet (vgl. Affolter et al. 2014a, S. 237 ff, 5. Schuljahr; Hengartner et al. 2010, S. 69 ff, 4.-6. Schuljahr; Wittmann et al. 2013, S. 87 ff, 4. Schuljahr). Auch zu diesem Muster gibt es zahlreiche weitere Aufgaben im Verlauf der Schuljahre:

- Im Schweizer Zahlenbuch (vgl. Wittmann et al. 2012b, S. 261 f, 2. Schuljahr) kann Lea eine Glace zusammenstellen: *„Lea mag Vanille, Erdbeer und Schokolade. Wie kann sie 3 Kugeln nehmen?"*
  Jede der drei Sorten kann wiederholt gewählt werden. Es handelt sich somit um exakt die gleiche Struktur wie beim Legen von 3 Plättchen in einer dreispaltigen Stellentafel. Anstatt H-, Z- und E-Spalte gibt es die Glacesorten Vanille, Erdbeer und Schokolade (vgl. Abbildung 2.3-4).
- Aufgaben mit Domino- und Triominosteinen erscheinen in Lehrmitteln und beim Spielen im Alltag (vgl. Affolter et al. 2013b, S. 92 f, 7. Schuljahr). Bei der Bestimmung der Anzahl verschiedener Dominosteine müssen 2 Elemente aus den Zahlen 0, 1, …, 6 ausgewählt werden, bei den Triominosteinen 3 Elemente aus den Zahlen 0, 1, …, 5. Die Steine können auch gleiche Zahlen enthalten. In Abbildung 2.3-12 sind eine Lösungsstrategie für die Anzahl der Dominosteine und die dazugehörende Lösung ablesbar[9].

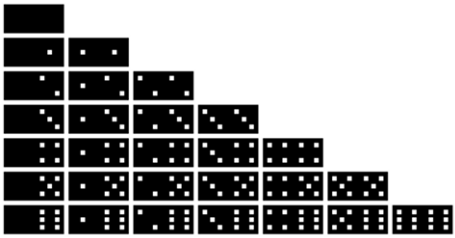


Abbildung 2.3-12: Dominosteine

Die Darstellung der Lösung ist derjenigen der Sechstklässlerin bei der Aufgabe ‚Handschläge unter Freunden' ähnlich (vgl. Abbildung 2.3-1). Allerdings handelt es sich bei den ‚Freunden' um eine Auswahl ohne Wiederholung und beim ‚Domino' um eine solche mit Wiederholung. Offenbar sind bei der Auswahl von

[9] Diese Darstellung entspricht der im mathbuch 1 (Affolter et al. 2013a, S. 123) abgebildeten Veranschaulichung der Lösung.

nur zwei Elementen aus einer n-Menge bei beiden Typen die gleichen Lösungswege möglich. Beim Typ mit Wiederholung muss die Anzahl der Kombinationen der Elemente mit sich selbst zusätzlich addiert werden (vgl. Glaser et al. 1982, S. 42, ca. 11. Schuljahr). Bei Anwendung der Gauß'schen Summenformel wird mit $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ anstatt $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ gerechnet.

- Beim Werfen von k nicht unterscheidbaren Würfeln müssen k aus 6 (n) zur Verfügung stehenden Augenzahlen ausgewählt werden. Erfahrungen zu der Anzahl der Möglichkeiten beim Werfen von drei Würfeln können Zweitklässler beim Spiel *Würfelraten* machen (vgl. Wittmann & Müller 2001, S. 51 ff). Der Lehrer wirft verdeckt drei Würfel, die Schüler müssen die Summe der Augenzahlen erraten und dürfen dazu Fragen stellen, allerdings nur solche, die der Lehrer mit ja oder nein beantworten kann. Protokollieren die Schüler die zu den Augensummen passenden Rechnungen, so kann das zum Begründen der Häufigkeitsverteilung anregen.

In Stochastik-Lehrmitteln wird das Muster *k-Auswahl aus einer n-Menge mit Wiederholung* mit dem Urnenmodell durch *Ziehen ungeordneter Stichproben mit Zurücklegen* verknüpft (vgl. Schmid & Schweizer 1988, S. 55, ca. 11. Schuljahr). So wie beim Muster *Ziehen ohne Wiederholung* können auch beim *Ziehen mit Wiederholung* die Anzahlen im Pascaldreieck abgelesen werden (vgl. Abbildung 2.3-10). Wird beispielsweise ein Würfel geworfen, so gibt es 6 Möglichkeiten, werden zwei (nicht unterscheidbare) Würfel geworfen, so entspricht dies dem Legen von zwei Plättchen in einer 6-spaltigen Stellentafel, also 21 Möglichkeiten, entsprechend findet man bei drei und mehr Würfeln die Zahlen 56, 126 und so weiter. Diese Zahlen liegen in einer Diagonalen. Folglich sind alle Lösungen zu den Aufgaben mit dem Muster *k-Auswahl aus einer n-Menge* im Pascaldreieck enthalten (vgl. Kap. 2.3.5).

Den Schülern können Dreieckszahlen, Tetraederzahlen usw. auch begegnen, ohne dass es um kombinatorische Fragestellungen geht. Exemplarisch sei hier das Thema *Funktionen* erwähnt. Zahlenfolgen können durch Rekursionsformeln oder Funktionsvorschriften definiert werden (vgl. Wolff et al. 1966, S. 9 ff). Die Folgen der natürlichen Zahlen, Dreieckszahlen, Tetraederzahlen und so weiter sind arithmetische Folgen (AF). Die Differenzenfolge bei den natürlichen Zahlen ist konstant gleich 1, also bilden die natürlichen Zahlen eine arithmetische Folge 1. Ordnung. Für die Dreieckszahlen ist die erste Differenzenfolge gleich der Folge der natürlichen Zahlen und damit erst die zweite Differenzenfolge konstant. Bei den Tetraederzahlen bilden die Dreieckszahlen die erste Differenzenfolge und somit ist erst die dritte Differenzenfolge konstant und so weiter. Man spricht von arithmetischen Folgen 2., 3.,

… Ordnung. Die Ordnung entspricht zugleich dem Grad der Funktionsvorschrift (vgl. Tabelle 2.3-1).
Mittels solcher Formeln und Vorschriften können die Anzahlen der möglichen Ausfälle bei Aufgaben des Musters k*-Auswahl aus einer* n*-Menge mit Wiederholung* bestimmt werden. Im konkreten Fall des Würfelns ist n = 6. Beim Würfeln mit einem Würfel muss die Funktion 1. Grades genommen werden, also existieren $f(6) = 6$ unterschiedliche Ausfälle. Bei zwei Würfeln ist es die Funktion 2. Grades, es gilt $g(6) = 21$, bei 3 Würfeln diejenige 3. Grades und daher $h(6) = 56$.

	Rekursionsformel	Funktionsvorschrift
Natürliche Zahlen AF 1. Ordnung	$a_{n+1} = a_n + 1, a_1 = 1$	$f(n) = n$
Dreieckszahlen AF 2. Ordnung	$a_{n+1} = a_n + n + 1, a_1 = 1$	$g(n) = \frac{1}{2}(n^2 + n)$
Tetraederzahlen AF 3. Ordnung	$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1, a_1 = 1$	$h(n) = \frac{1}{6}(n^3 + 3n^2 + 2n)$

Tabelle 2.3-1: Arithmetische Folgen, Rekursionsformeln und Funktionsvorschriften[10]

Abschließend zu dieser exemplarischen Betrachtung von mathematischen Mustern und ihren Beziehungen untereinander wird der Zusammenhang zwischen dem Pascaldreieck und den betrachteten Mustern begründet.

2.3.5 Beziehungen im Pascaldreieck begründen

Das Wort *MATHE* besteht aus 5 verschiedenen Buchstaben. Diese Buchstaben können auf mehrere Arten (zu meistens sinnlosen Wörtern) kombiniert werden. Bei der Auswahl stehen in einem ersten Schritt alle 5 Buchstaben zur Verfügung, im zweiten Schritt noch 4, dann 3, 2 und schließlich noch 1. Somit ergeben sich $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ mögliche *Permutationen* (Anordnungen). Dieses Produkt wird mit $5!$ abgekürzt geschrieben und als *5 Fakultät* gelesen. Etwas komplizierter ist es mit einem Wort, das auch gleiche Buchstaben enthält, beispielsweise mit dem Wort *ZOOLOGIE.* Könnten die *O*'s unterschieden werden, zum Beispiel durch eine Nummerierung O_1, O_2, O_3, so gäbe es $8! = 40'320$ Permutationen. Eine dieser Anordnungen heißt $LO_2ZGO_1IEO_3$, eine weitere $LO_3ZGO_2IEO_1$. Da sich die *O*'s jedoch in Wirklichkeit nicht unterscheiden lassen, sind diese beiden Anordnungen identisch. Die 3 *O*'s lassen sich auf $3! = 6$

[10] Auf eine vollständige Herleitung wird hier verzichtet.

Arten anordnen. Somit gibt es bei dieser Verteilung der Buchstaben *L, Z, G, I* und *E* insgesamt 6 identische Permutationen. Da dies für jede Verteilung dieser 5 Buchstaben gilt, können insgesamt $\frac{8!}{3!} = 6720$ mögliche Permutationen unterschieden werden.

Mit den Fakultäten können alle Aufgaben mit dem Muster k*-Auswahl aus einer* n*-Menge* gelöst werden. Beim Werfen von 6 Plättchen mit den Seiten rot und blau gibt es für das ‚Wort' *rrrrbb* $\frac{6!}{4!\cdot 2!} = 15$ mögliche Anordnungen. Sollen aus den 20 Schülern einer Klasse 4 Schüler für eine besondere Aufgabe ausgewählt werden, so können jedem Schüler zwei Zustände zugeordnet werden, beispielsweise ein w für *gewählt* und ein n für *nicht gewählt*. Somit ergibt sich ein ‚Wort' aus 20 Buchstaben, nämlich 16 n's und 4 w's und daher $\frac{20!}{4!\cdot 16!} = 4845$ Auswahlmöglichkeiten. Terme dieser Art heissen *Binomialkoeffizienten* und können abgekürzt geschrieben werden, in diesem Fall mit $\binom{20}{4}$ (vgl. Glaser et al. 1982, S. 41; Selter & Spiegel 2004, S. 295 ff). Allgemein gilt $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ für die *Auswahl von* k *Elementen aus einer* n*-Menge*. Allerdings passt die bisherige Überlegung nur für die Auswahl *ohne Wiederholung.*

Da sich die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten einerseits mit den Binomialkoeffizienten berechnen lässt und andererseits diese Anzahlen im Pascaldreieck abgelesen werden können, muss dieses Dreieck aus Binomialkoeffizienten bestehen. Der Term für den Ausfall *rrrrbb* $\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!\cdot 2!} = 15$ beim Wurf von 6 Plättchen (s. o.) entspricht dem Wert in der 6. Zeile und der 4. Diagonalen. Entsprechend kann jede Zahl im Pascaldreieck durch einen Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ ausgedrückt werden (vgl. Abbildung 2.3-13). Die Erzeugungsregel und die Symmetrieeigenschaft können algebraisch oder durch kombinatorische Überlegungen nachgewiesen werden (vgl. Glaser et al. 1982, S. 44 ff).

Für die Erklärung des Zusammenhangs zwischen der Auswahl *mit Wiederholung* und den *Fakultäten* kann auf die Abbildung 2.3-4 zurückgegriffen werden. In dieser Tabelle stellt jedes Kreuz ein Plättchen dar. Wenn die Anordnungen für 3 Plättchen betrachtet werden, so liegen im Prinzip stets drei Kreuze nebeneinander, allerdings unterschiedlich durch die Spaltengrenzen zwischen der H- und der Z-Spalte und der Z- und der E-Spalte voneinander getrennt. Somit lässt sich jede Anordnung durch ein

‚Wort' aus Strichen (als Symbole für die Spaltengrenzen) und Kreuzen darstellen[11]. Beispielsweise steht *xxx//* für die Zahl 300, *x/x/x* für die Zahl 111 oder */x/xx* für die Zahl 12. Es handelt sich stets um ein ‚Wort' aus 5 ‚Buchstaben', nämlich 3 x und 2 / und daher existieren $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = 10$ mögliche Anordnungen.

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0}\quad\binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0}\quad\binom{2}{1}\quad\binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0}\quad\binom{3}{1}\quad\binom{3}{2}\quad\binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0}\quad\binom{4}{1}\quad\binom{4}{2}\quad\binom{4}{3}\quad\binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0}\quad\binom{5}{1}\quad\binom{5}{2}\quad\binom{5}{3}\quad\binom{5}{4}\quad\binom{5}{5}$$

$$\binom{6}{0}\quad\binom{6}{1}\quad\binom{6}{2}\quad\binom{6}{3}\quad\binom{6}{4}\quad\binom{6}{5}\quad\binom{6}{6}$$

Erzeugungsregel:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Symmetrie:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Abbildung 2.3-13: Pascaldreieck mit Binomialkoeffizienten

Für die *k-Auswahl aus einer n-Menge mit Wiederholung* gibt es $(n-1)$ Spaltengrenzen und k Kreuze. Das entsprechende ‚Wort' besteht daher aus $(k+n-1)$ ‚Buchstaben', wobei je k und $(n-1)$ ‚Buchstaben' gleich sind. Die Lösung ist gleich dem Binomialkoeffizienten $\binom{n+k-1}{k}$. Beim Würfeln kann deshalb die Anzahl der möglichen Würfe mit einem Würfel in der 6. Zeile und der 1. Diagonalen abgelesen werden, mit zwei Würfeln in der 7. Zeile und der 2. Diagonalen, mit drei Würfeln in der 8. Zeile und der 3. Diagonalen und so weiter (vgl. Abbildung 2.3-10). Mit jedem zusätzlichen Würfel wird das ‚Wort' um ein Kreuz länger, k also um 1 grösser und damit auch der Term $n+k-1$.

Es gilt also:

- Bei der *k-Auswahl aus einer n-Menge ohne Wiederholung* kann die Anzahl der Möglichkeiten durch $\binom{n}{k}$ ausgedrückt werden. Bei konstantem n befinden sich die entsprechenden Zahlen in der n-ten Zeile (für $k = 0 \ldots n$).

[11] Diese Idee wird in mehreren Lehrmitteln verwendet (z. B. Schmid & Schweizer 1988, S. 55).

- Bei der *k-Auswahl aus einer n-Menge mit Wiederholung* kann die Anzahl der Möglichkeiten durch $\binom{n+k-1}{k}$ ausgedrückt werden. Bei konstantem n befinden sich die entsprechenden Zahlen in einer Diagonalen; k kann beliebig groß werden.

2.4 Mathematisieren

Ausgehend von Problemen, welche in einem außer- oder innermathematischen Kontext eingebettet sind, entwickeln Lernende konzeptuelles und prozedurales Wissen (vgl. Kap. 3.1), welches zunehmend losgelöst von Kontexten zur Verfügung steht (vgl. van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers 2014, S. 521). Mathematiklernen in diesem Sinne umfasst Prozesse des Ordnens von Erfahrungen und Erkenntnissen, des Abstrahierens, des Generalisierens, des Symbolisierens und des ‚Neu-Organisierens' von vorhandenem Wissen (vgl. Freudenthal 1987, S. 98; Hefendehl-Hebeker 2003, S. 110 ff; Treffers 1987, S. 51 ff). Diese Aktivitäten der Lernenden lassen sich unter dem Oberbegriff *Mathematisieren* zusammenfassen (vgl. van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers 2014, S. 522). Treffers (1987) unterscheidet zwischen horizontaler und vertikaler Mathematisierung:

> *„We distinguish **horizontal** and **vertical** mathematisation in order to account for the difference between transforming a problem field into a mathematical problem on the one hand, and processing within the mathematical system on the other hand."*
>
> (ebd., S. 247, Hervorh. im Orig.)

Horizontale Mathematisierung macht ein *„Problemfeld der mathematischen Behandlung […] zugänglich"* (Freudenthal 1987, S. 98), vertikale Mathematisierung *„stands for all kinds of re-organizations and operations done by the students within the mathematical system itself"* (van den Heuvel-Panhuizen 2003, S. 12) und mündet in *„konventionalisierten Verfahren und Techniken"* (Krauthausen & Scherer 2007, S. 142). Sowohl die horizontale als auch die vertikale Mathematisierung führen zur Konstruktion von relationalem Wissen. Ersteres bettet mathematisches Wissen in *„personen- und situationsgebundener Wirklichkeit"* ein (Freudenthal 1987, S. 99). Unterschiedliche Aufgabenstellungen können gleiche oder verwandte Muster beinhalten, wie das mit den Aufgaben zum Muster *k-Auswahl aus einer n-Menge* illustriert wurde (vgl. Kap. 2.3). Die erkannten Muster wurden verglichen, fortgesetzt und verallgemeinert. Gemeinsamkeiten und Unterschiede wurden aufgespürt und mit den Binomialkoeffizienten wurde ein *„konventionalisiertes Verfahren"* (s. o.) zur

Bestimmung der Lösungen entwickelt. Auf diese Weise führt vertikales Mathematisieren zur Konstruktion von vernetztem Wissen innerhalb der Fachstruktur und zur Förderung der Fähigkeit, dieses Wissen in neuen Problemstellungen anzuwenden (vgl. Kap. 2.5). Krauthausen & Scherer (2007, S. 142 ff) fassen dieses Verständnis von horizontaler und vertikaler Mathematisierung unter dem Begriff *„fortschreitende Schematisierung"* zusammen. Beide Mathematisierungsarten sind eng verknüpft und nicht trennscharf unterscheidbar (vgl. Freudenthal 1987, S. 98 f; van den Heuvel-Panhuizen 2003, S. 12). In einem sinnvollen Mathematikunterricht müssen beide im Verbund auftreten[12]:

> *„This […] creates for the learner the possibility of concept attainment by orienting himself to a variety of phenomena, which benefits the building of formal mathematical concepts and structures and their application."*
> (Treffers 1987, S. 251)

Auf diese *fortschreitende Schematisierung* kann sich die Heterogenität jahrgangsgemischter Lerngruppen positiv auswirken (vgl. Kap. 2.5, 4.3.2).

2.5 Muster und Strukturen

In der vorliegenden Arbeit werden wiederholt die Begriffe *Muster* und *Struktur* verwendet. Dieser Begriffskombination begegnet man in der Mathematikdidaktik häufig, ohne dass eine Offenlegung des Begriffsverständnisses stattfindet (vgl. Lüken 2012, S. 18). Die beiden Begriffe lassen sich kaum trennscharf definieren und voneinander abgrenzen (vgl. Deutscher 2012, S. 86; Wittmann & Müller 2008, S. 43). Formulierungen wie *„Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept"* (Wittmann & Müller 2008, S. 42) oder *„Muster, Strukturen und Gesetzmäßigkeiten erkennen und beschreiben"* (Deutschschweizer Erziehungsdirektorenkonferenz 2015, S. 7) machen jedoch keinen Sinn, wenn *Muster* und *Struktur* synonym verwendet werden. Da in der vorliegenden Untersuchung beide Begriffe in unterschiedlichem Sinn eingesetzt werden, ist eine Klärung der Begriffsinhalte notwendig. Überschneidungen der Bedeutungen können trotzdem nicht ausgeschlossen werden. Zugleich wird der Zusammenhang zwischen *Muster und Strukturen* und *Mathematiklernen (in heterogenen Gruppen)* beleuchtet.

[12] Diese Auffassung von Mathematisieren wurde in der am niederländischen Freudenthal-Institut entwickelten Design-Theorie *Realistic Mathematics Education* verwirklicht (vgl. Kap. 5.2.2).

Muster können als Vorlage, Vorbild, sich wiederholende Schemata oder idealisierte Modelle aufgefasst werden (vgl. Deutscher 2012, S. 85 ff; Lüken 2012, S. 19 ff; Wittmann & Müller 2008, S. 47 f; Kap. 2.3). In diesem Sinne umfasst der Begriff *„alle möglichen Arten von Regelmäßigkeiten“* (Lüken 2012, S. 21), darunter auch Gesetzmäßigkeiten und funktionale Beziehungen (vgl. Steinweg 2013, S. 20). Der Begriff *Struktur* steht für das innere **Beziehungs**gefüge einer Aufgabe oder eines mathematischen Teilgebiets. Damit verbunden ist eine Sicht auf eine Aufgabe oder ein mathematisches Teilgebiet als Ganzes (vgl. Brockhaus 2001, Stichwort Struktur; Lüken 2012, S. 18 f).

Axiome und formale Umformungsregeln führen in der Mathematik zu logischen Skeletten, welche semantisch unterschiedlich interpretiert werden können (vgl. Kap. 2.2). Nicht die Elemente dieser Skelette, sondern die Beziehungen unter diesen Elementen sind wesentlich. *„Die Beziehungen zwischen den Elementen (und auch zwischen Teilmengen) einer Menge prägen Letzterer eine **Struktur** auf“* (Basieux, 2013, S. 10, Hervorh. im Orig.). So kann einer Menge M durch eine Ordnungsrelation eine Ordnungsstruktur aufgeprägt werden, zum Beispiel den reellen Zahlen durch die Relation „kleiner oder gleich“[13] (vgl. ebd., S. 72). Die Elemente von Zahlbereichen können durch eine Grundoperation miteinander verknüpft werden. Dadurch erhält die betreffende Menge eine algebraische Struktur[14] (vgl. ebd., S. 88 ff). Für solche Verknüpfungen können bestimmte Eigenschaften vorgegeben (definiert) werden, welche beispielsweise den Rechengesetzen (Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetz) entsprechen.

Strukturen sind mit zahlreichen Mustern vernetzt. So können Lernende in operativ strukturierten Aufgaben zur Addition mit natürlichen Zahlen unterschiedliche Muster entdecken (vgl. Wittmann & Müller 1994, S. 25 f; Kap. 7.1.2). Diese Muster sind die Folge einer dem Zahlbereich $\mathbb{N}$ aufgeprägten Struktur, erzeugt durch eine vorgegebene Verknüpfungsvorschrift (die Addition) für die Elemente von $\mathbb{N}$ und den Eigenschaften dieser Verknüpfung. Möglicherweise erkennen die Schüler Muster, welche mit anderen Strukturen, zum Beispiel der Ordnungsstruktur, zusammenhängen.

---

[13] Ein weiteres Beispiel ist der Ordnungsgraph zur Teilermenge der Zahl 800 in Kapitel 7.2.7 (vgl. Abbildung 7.2-25).

[14] Nicht nur Zahlbereichen kann durch Verknüpfungen eine algebraische Struktur aufgeprägt werden. Weitere Beispiele sind die Mengen von Matrizen, die Potenzmenge einer Menge M oder die Menge der Symmetrien eines Quadrats. Gruppen, Ringe, Vektorräume und weitere Begriffe sind Bezeichnungen für algebraische Strukturen (vgl. Reinhardt & Soeder 1974, S. 37).

Die bisherigen Überlegungen führen zu der dieser Untersuchung zugrunde liegenden Auffassung von *Mustern* und *Strukturen*. Eine *Struktur* wird durch ein Themengebiet und die Aufgabenstellungen vorgegeben (vgl. Deutscher 2012, S. 86; Wittmann & Müller 2008, S. 43). Die Lernenden setzen sich mit den durch die Lehrer vorgelegten Aufgaben auseinander, erkennen und erforschen Muster und setzen diese in Beziehung zueinander (vgl. Wittmann & Müller 2008, S. 49; Kap. 3.3). Dadurch entwickeln die Schüler ein zunehmend besseres Verständnis der Struktur.
Bei Aufgabenformaten wie Zahlenmauern (s. u.) kann die Struktur einer Aufgabe als durch eine algebraische Struktur erzeugtes Muster gesehen werden. In solchen Fällen wird die oben erwähnte Auslegung der Begriffe angewendet. Solange es um den vorgegebenen inneren Aufbau der Aufgabe (oder des Themenbereichs) geht, ist die Rede von *Struktur*. Handelt es sich jedoch um die durch die Aktivitäten der Lernenden erkannten Gesetzmäßigkeiten, Regelmäßigkeiten, Beziehungen u. a. m., so ist die Rede von *Mustern*. Einige Beispiele illustrieren diese Auffassung:

- Alle in Kapitel 2.3 diskutierten Muster wie Dreieckszahlen, Tetraederzahlen, Pascaldreieck, Permutationen, Summen der ersten n natürlichen Zahlen (und Gauß'sche Formel) oder Produkte aus den ersten n natürlichen Zahlen (Fakultäten) sowie deren Beziehungen untereinander, können die Lernenden durch geeignete Aufgaben mit der vorgegebenen Struktur *Auswahl von k Elementen aus einer n-Menge* entdecken und erforschen. Der Lehrer orientiert sich bei der Auswahl der Aufgaben an dieser Struktur[15], so dass die Schüler die Möglichkeit erhalten, sich (im Laufe der Zeit) die Struktur des Lerngegenstands zu erarbeiten. Die anzuregenden Lernprozesse entsprechen dem horizontalen und vertikalen Mathematisieren (vgl. Kap. 2.4) und können über mehrere Schuljahre hinweg verlaufen.
- Zahlenmauern werden durch gegeneinander versetzte Steinschichten gebildet (vgl. Kap. 7.1.1). Jeder Stein enthält eine Zahl, die Summe zweier benachbarter Zahlen wird im darüber liegenden Stein eingetragen (vgl. Wittmann & Müller 2001, S. 106). Diese Vorgabe definiert eine Struktur, welche algebraisch folgendermaßen beschrieben werden kann (vgl. Abbildung 7.1-1): Bezeichnen a, b, c, … die Zahlen in den Basissteinen, dann gilt für die Zahlen in der zweiten Reihe a+b, b+c, c+d, …, in der dritten Reihe a+2b+c, b+2c+d, …, in der vierten

[15] Es kann sich auch um eine übergeordnete Struktur handeln. In diesem Fall könnte bei der Auswahl der k Elemente das Kriterium *mit/ohne Wiederholung* kombiniert werden mit dem Aspekt *mit/ohne Berücksichtigung der Reihenfolge*.

Reihe a+3b+3c+d, … und so weiter. Diese Struktur ist ihrerseits ein durch die additive Struktur in $\mathbb{N}$ erzeugtes Muster mit enger Verwandtschaft zum Pascaldreieck (vgl. Abbildung 2.3-10). Im Kontext einer Lernsequenz mit dem Aufgabenformat *Zahlenmauern* gilt dieses Beziehungsgefüge jedoch als (vorgegebene) Struktur, welche dank geeigneter Fragestellungen zur Erforschung der sich aus dieser Struktur ergebenden Muster und deren Beziehungen führen soll (vgl. Kap. 7.1.1).

- So wie durch die Addition wird dem Zahlbereich $\mathbb{N}$ auch durch die Multiplikation eine algebraische Struktur aufgeprägt. Wiederum können weitere Vorgaben bei den Lernenden zu erwünschten Vernetzungen führen (vgl. Kap. 7.2). Beim vernetzten Lernen des Einmaleins werden beispielsweise Nachbaraufgaben, Verdoppelungs- oder Halbierungsaufgaben definiert, so dass die Lernenden ausgehend von Schlüssel- oder Merkaufgaben ein numerisches Netzwerk aufbauen können (vgl. Keller et al. 2011, S. 171 ff; Wittmann & Müller 2012b, S. 20). Die Schüler erforschen operative Beziehungen zwischen Produkten und Ergebnissen, nutzen erkannte Muster als Rechenvorteile oder zur Selbstkontrolle, knüpfen Beziehungen zur Teilbarkeit und wenden ihre Erkenntnisse in weiteren Aufgaben an, beispielsweise für Zerlegungen von Zahlen in Produkte (vgl. Kap. 7.2.3). Der Transfer zwischen arithmetischen und verwandten geometrischen Mustern (Punkte- oder Rechtecksfelder) kann bei den Lernenden zu einem vertieften Verständnis der Struktur führen (vgl. Prediger et al. 2013, S. 14; Kap. 7.2.1).
- In der Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ werden durch die Grundoperationen ebenfalls algebraische Strukturen erzeugt. Die Grundoperationen müssen so definiert sein, dass die ganzen Zahlen in den rationalen Zahlen eingebettet sind (vgl. Kap. 7.3.1). Das Operieren mit Brüchen ist für die Schüler anspruchsvoll, eine wichtige Voraussetzung dafür sind anschauliche Grundvorstellungen (vgl. Padberg 2012, S. 249; Streefland 1991, S. 11). Diese können durch einen vielseitigen Wechsel zwischen unterschiedlichen Repräsentationen gefördert werden (vgl. Prediger et al. 2013, S. 14). Darstellungen in Rechtecken ermöglichen beispielsweise Einsichten in das Erweitern und Kürzen oder das eigenständige Ableiten von Regeln zum Addieren von Brüchen. In der Intervention *Bruchvorstellungen* dient das Lesh-Modell (vgl. Abbildung 7.3-1) mit fünf verschiedenen Repräsentationsarten als (vorgegebene) Struktur, auf deren Basis die Aufgaben ausgewählt oder entwickelt wurden (vgl. Kap. 7.3.1).

Entsprechend der Arbeitsweise des Gehirns (vgl. Kap. 2.3) braucht es geeignete Kontexte, so dass die Lernenden beim horizontalen Mathematisieren (vgl. Kap. 2.4) Muster entdecken und erkunden können. Durch Abstrahieren, also das *„Heraussondern bestimmter Merkmale in der Absicht das Gleichbleibende und Wesentliche“* (Brockhaus 2001, Stichwort Abstraktion) in den Aufgaben zu erkennen, konstruieren sich die Schüler mentale Vorstellungen der Muster. Sie erkennen wesentliche übereinstimmende und trennende Eigenschaften und verknüpfen die Muster zu einem (individuellen) Netzwerk. Durch vertikales Mathematisieren (vgl. Kap. 2.4) können sie sich so eine Struktur eines mathematischen Teilgebiets insgesamt erarbeiten.

Mathematik lässt sich somit nicht allein aus den Anwendungen ableiten, eine ‚innermathematische' Auseinandersetzung ist notwendig (vgl. Wittmann 2003, S. 27 f). Diese Ansicht vertritt auch Archimedes in einem fiktiven Dialog von Alfred Rényi:

> *„Die Römer werden die Mathematik niemals richtig verstehen; ihr Trachten ist zu sehr auf das Praktische gerichtet, für abstrakte Theorien haben sie keinen Sinn […]. Man kann die abstrakte Mathematik nicht von ihren Anwendungen trennen.* ***Wer die abstrakte Mathematik ablehnt, versperrt sich den Weg zu ihren Anwendungen.*** *Wer die Mathematik mit Erfolg anwenden will, muss Phantasie besitzen und träumen können.“*
>
> (Rényi 1967, in Wittmann & Müller 2012, S. 68, Hervorh. BM)

Verinnerlichte Strukturen und die mentale Verfügbarkeit von Mustern erhöhen die Kompetenzen der Schüler im Problemlösen, Argumentieren und Darstellen (vgl. Müller et al. 2012, S. 78 f; Steinweg 2013, S. 25; Wittmann & Müller 2008, S. 49 ff). Die Lernenden erkennen in neuen Kontexten Merkmale bekannter Strukturen oder Unterschiede zu bekannten Strukturen. Eine verinnerlichte Struktur ermöglicht dadurch nicht nur das Lösen von Aufgaben mit gleicher Struktur, sie kann auch erfolgreiche Lernprozesse in Aufgaben mit einer ‚verwandten' Struktur auslösen[16]. Die mentale Verfügbarkeit von Mustern ist eine Grundlage für ein tiefgreifendes Verständnis mathematischer Zusammenhänge. Beispielsweise fördert die mentale Verfügbarkeit des Musters *Dreieckszahlen* in Form der *Gauß'schen Summenformel* (vgl. Kap. 2.3.2) ein tieferes Verständnis der quadratischen Gleichungen beim Lösen von ‚Turnieraufgaben' (vgl. Kap. 2.3.4). In diesem Sinne bedeutet strukturelles Denken

[16] Im Sinne Piagets kann man von einem kognitiven Konflikt sprechen. Der Lernende versucht diesen durch eine mehr oder weniger starke Anpassung der vorhandenen Schemata (kognitiven Struktur) aufzulösen (vgl. Kap. 3.2).

„Durchschaubarmachen der Mathematik bis in die Tiefe“ (Basieux 2013, S. 169). Entsprechend verknüpft strukturelles Lernen neues und altes Wissen und reorganisiert letzteres (vgl. Miller 2006, S. 218; Steinbring 2005, S. 57 f; Kap. 2.4, 3.2).

Die in Kapitel 2.3 diskutierten Muster lassen erahnen, dass sich immer wieder zahlreiche Anknüpfungspunkte für weitere Erkundungen bieten. Weder die historische Entwicklung noch die individuelle Konstruktion verlaufen auf geradlinigen Wegen, schon eher sind es viele Straßen mit zahlreichen Windungen, Kreuzungen, Umwegen und Sackgassen. Seit Gödel weiß man, dass Intuition und Kreativität nicht nur für die individuell konstruierte Mathematik Bedeutung haben, sondern auch in der formalen Mathematik unabdingbar sind (vgl. Kap. 2.2). Überhaupt lässt sich die individuelle Konstruktion des mathematischen Wissens gut mit der historischen Entwicklung der Mathematik vergleichen.

> *„Genauso wie sich Mathematik historisch aus kleinen Anfängen entwickelt hat und erst im Laufe von Jahrtausenden und Jahrhunderten ihren heutigen Stand erreicht hat, entwickeln sich mathematische Kompetenzen auch im einzelnen Menschen nur im Laufe von Jahren und Jahrzehnten […].“*
> (vgl. Wittmann & Müller 2012, S. 78)

Nicht jeder Mensch kommt in seiner individuellen Entwicklung gleich weit und auch gleichaltrige Lernende können sich auf unterschiedlichen Niveaus befinden. So wie die formale Mathematik nie vollständig sein wird (vgl. Kap. 2.2), ist auch die individuelle Konstruktion nie abgeschlossen. Basieux (2013, S. 12) schreibt dazu treffend: *„Die Vervollkommnung geschieht in einem endlosen kreativen Prozess.“*

In den 1970er Jahren führte die formalistische Sichtweise *„zu einer Orientierung von Lehrplänen an Mengenlehre, Gruppentheorie und Vektorraumalgebra“* (Leuders 2003, S. 24). Der lückenlose Aufbau des mathematischen Wissens mit einem strengen Formalismus wurde zu einem zentralen Anliegen des Mathematikunterrichts. Ausgangspunkte für die Lernprozesse waren die durch die historische Entwicklung entstandenen Strukturen. Deduktion ersetzte aktiv-entdeckendes und soziales Erarbeiten der Muster und Strukturen (vgl. Leuders 2003, S. 24; Steinbring 2005, S. 14; van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers 2014, S. 521 f; Wittmann 2001, S. 6).

Der *konstruktivistische* Weg beginnt bei guten Beispielen, horizontales und vertikales Mathematisieren führen zu abstrakten Mustern und Strukturen und damit zu formaler Mathematik und zur Unterscheidung einer Objekt- und einer Bedeutungsebene (vgl. Kap. 2.2). Nach Steinbring (2005) ist dies die Grundlage, auf welcher die soziale Interaktion stattfindet (vgl. Kap. 3.6):

> *„[…] mathematical knowledge in the contexts of its acquisition should be understood as a dynamic process of mathematization. Thereupon, the particular epistemological characteristic of mathematical knowledge consists in the (mostly invisible) structures and relations which are coded by means of signs / symbols and related to reference contexts."*
> (ebd., S. 48)

Der *formalistische* und der *konstruktivistische* Weg basieren auf Strukturen. Während beim ersten Weg der Lernende direkt aus den Strukturen mathematisches Wissen ableitet, beschreitet er beim zweiten Weg die umgekehrte Richtung, der von passenden Kontexten zu den darin enthaltenen Strukturen führt.

Für den jahrgangsübergreifenden Mathematikunterricht bietet der konstruktivistische Weg und die Auffassung von *Mathematik als Wissenschaft von Mustern und Strukturen* und den sich daraus ergebenden Konsequenzen[17] ein enormes Potenzial für das Lernen der Schüler (vgl. Kap. 4). Der Lehrer muss bei der Auswahl der Aufgaben in mehrjährigen Zyklen denken und sich an fundamentalen Ideen orientieren, welche die Schüler *„dazu befähigen, bisherige Erfahrungen besser zu ordnen, neue Erfahrungen und Einsichten zu ermöglichen und zukünftige Erfahrungen in Aussicht zu stellen"*[18] (Winter 1987, S. 15; Kap. 3.3). Die Orientierung an fundamentalen Konzepten und das Spiralprinzip ermöglichen den Schülern, erkannte Muster zu vernetzen, zu verinnerlichen und darauf zurückzugreifen. Sie erwerben durch horizontales und vertikales Mathematisieren relationales Wissen (vgl. Bruner 1970, S. 42 f; Klika 2003, S. 5; Krauthausen & Scherer 2007, S. 135; Kap. 2.4). Verfügen die Lehrer über gute Kenntnisse zu den Strukturen und über die Stellung der Aufgaben innerhalb der Strukturen, kann das Spiralprinzip den jahrgangsübergreifenden Mathematikunterricht beleben (vgl. Nührenbörger & Pust 2011, S. 4; Kap. 4.3.2).

[17] Konsequenzen wie natürliche Differenzierung, entdeckendes Lernen und soziale Interaktion werden in Kapitel 3 näher betrachtet.

[18] Das gilt auch für Lehrer jahrgangshomogener Klassen.

http://www.springer.com/978-3-658-16693-9

Lernen in heterogenen Lerngruppen
Erprobung und Evaluation eines Konzepts für den jahrgangsgemischten Mathematikunterricht
Matter, B.
2017, XIX, 371 S. 114 Abb., 30 Abb. in Farbe., Softcover
ISBN: 978-3-658-16693-9