§ 2 Inhalte, Prämaße, Maße

Ein Inhalt ist eine nicht-negative numerische Funktion auf einem Mengenring mit der Eigenschaft, dass der Inhalt einer Vereinigung zweier punktfremder Mengen gleich der Summe der Inhalte der einzelnen Mengen ist. Wichtig für die Integrations-Theorie ist eine Verschärfung dieser Eigenschaft, die σ-Additivität. Ein Inhalt heißt σ-additiv, wenn der Inhalt einer abzählbaren Vereinigung punktfremder Mengen gleich der Summe der Inhalte der einzelnen Mengen ist. Der elementar-geometrische Inhalt auf dem Mengenring der Quadersummen im $\mathbb{R}^n$ hat diese Eigenschaft. Sie ist wesentlich dafür, dass man diesen Inhalt zu einem Maß auf der Borel-Algebra des $\mathbb{R}^n$ fortsetzen kann, was im nächsten Paragraphen durchgeführt wird. Ein Maß ist dabei ein σ-additiver Inhalt, der auf einer σ-Algebra definiert ist.

Die erweiterte Zahlengerade $\overline{\mathbb{R}}$. In der Maß- und Integrationstheorie ist es oft nützlich, auch Funktionen zu betrachten, die die Werte $+\infty$ oder $-\infty$ annehmen können. Wir benutzen folgende Bezeichnungen:

$$\begin{aligned}
&\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = [-\infty, \infty],\\
&\overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} = [0, \infty].
\end{aligned}$$

Die Ordnung von $\mathbb{R}$ wird auf $\overline{\mathbb{R}}$ forgesetzt durch

$$-\infty < a < +\infty \qquad \text{für alle } a \in \mathbb{R}.$$

Außerdem führt man folgende Konventionen für Addition und Multiplikation mit den Symbolen $\pm\infty$ ein:

$$\begin{aligned}
a + (\pm\infty) &= \pm\infty + a = \pm\infty && \text{für alle } a \in \mathbb{R},\\
a \cdot (\pm\infty) &= (\pm\infty) \cdot a = \pm\infty && \text{für alle } a \text{ mit } 0 < a \leqslant \infty,\\
a \cdot (\pm\infty) &= (\pm\infty) \cdot a = \mp\infty && \text{für alle } a \text{ mit } -\infty \leqslant a < 0,\\
0 \cdot (\pm\infty) &= (\pm\infty) \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Ausdrücklich *nicht* definiert ist $\infty + (-\infty)$ oder $-\infty + \infty$.

Diese Konventionen sind so gewählt, dass folgendes gilt: Sei (c_k) eine Folge reeller Zahlen, die uneigentlich gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$) konvergiert. Dann gilt für alle $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
a + \lim_{k\to\infty} c_k &= \lim_{k\to\infty}(a + c_k),\\
a \cdot \lim_{k\to\infty} c_k &= \lim_{k\to\infty}(a \cdot c_k).
\end{aligned}$$

Auf $\overline{\mathbb{R}}_+$ sind Addition und Multiplikation stets definiert; diese Operationen genügen dem Assoziativ-Gesetz. Jedoch gilt für Verknüpfungen, in denen das Symbol $\pm\infty$ vorkommt, nicht die Kürzungsregel, da z.B. $1 + \infty = 2 + \infty$ und $1 \cdot \infty = 2 \cdot \infty$.

O. Forster, *Analysis 3,* Aufbaukurs Mathematik, DOI 10.1007/978-3-658-16746-2_2

Definition. Sei $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Mengenring. Unter einem *Inhalt* auf $\mathfrak{R}$ versteht man eine Funktion

$$\mu : \mathfrak{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, falls $A, B \in \mathfrak{R}$ disjunkte Mengen sind.

Bemerkungen.

1) Ist μ reellwertig, d.h. nimmt μ den Wert ∞ nicht an, folgt i) aus ii), denn nach ii) ist $\mu(\emptyset) = \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset)$. Falls $\mu(\emptyset) \in \mathbb{R}$, ist dann notwendig $\mu(\emptyset) = 0$.

2) Ein Inhalt ist immer *monoton*, d.h.

$$A \subset B \quad \Longrightarrow \quad \mu(A) \leqslant \mu(B),$$

denn $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$ und $\mu(B \setminus A) \geqslant 0$.

3) Seien $A, B \in \mathfrak{R}$ nicht notwendig disjunkte Mengen. Da

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A) \quad \text{und} \quad B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$$

jeweils punktfremde Zerlegungen sind, gilt

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \quad \text{und} \quad \mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A).$$

Falls $\mu(A \cap B) < \infty$, folgt daraus

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

4) Durch vollständige Induktion zeigt man: Ist $\mu : \mathfrak{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ein Inhalt und sind

$$A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathfrak{R}$$

paarweise punktfremd, so gilt

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i).$$

Dies gilt aber nicht notwendig für abzählbar unendliche Familien disjunkter Mengen $A_i \in \mathfrak{R}$. Dies führt zum Begriff der σ-Additivität:

Definition. Ein Inhalt $\mu : \mathfrak{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ auf einem Mengenring $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ heißt σ-*additiv*, falls für jede Folge von paarweise disjunkten Mengen $A_k \in \mathfrak{R}$, $k \geqslant 1$, deren Vereinigung $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ ebenfalls in $\mathfrak{R}$ liegt, gilt

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Ein σ-additiver Inhalt heißt *Prämaß*. Unter einem *Maß* versteht man einen σ-additiven Inhalt, der auf einer σ-Algebra definiert ist.

Der Inhalt μ heißt *endlich*, falls $\mu(A) < \infty$ für alle $A \in \mathfrak{R}$. Schließlich heißt μ σ-*endlich*, falls es eine Folge von Mengen $\Omega_m \in \mathfrak{R}$ gibt mit

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \Omega_m = \Omega \quad \text{und} \quad \mu(\Omega_m) < \infty \quad \text{für alle } m \geqslant 1.$$

Satz 1. *Sei $\mu : \mathfrak{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ein Inhalt auf dem Mengenring $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$. Man betrachte folgende Aussagen über μ:*

a) *μ ist σ-additiv.*

b) *μ ist* σ-subadditiv, *d.h. für jede Folge $A_k \in \mathfrak{R}$, $k \geqslant 1$ mit $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k =: A \in \mathfrak{R}$ gilt*

$$\mu(A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

c) *μ ist* stetig von unten, *d.h. für jede aufsteigende Folge $A_k \in \mathfrak{R}$, $k \geqslant 1$, mit $A_k \uparrow A \in \mathfrak{R}$ gilt*

$$\mu(A_k) \uparrow \mu(A).$$

d) *μ ist* stetig von oben, *d.h. für jede absteigende Folge $B_k \in \mathfrak{R}$, $k \geqslant 1$, mit $B_k \downarrow B \in \mathfrak{R}$ und $\mu(B_1) < \infty$ gilt*

$$\mu(B_k) \downarrow \mu(B).$$

Dann gelten die Implikationen

$$a) \Longleftrightarrow b) \Longleftrightarrow c) \Longrightarrow d)$$

Ist der Inhalt μ endlich, so sind sogar alle vier Aussagen a) bis d) äquivalent.

Dabei bedeutet die Schreibweise $\mu(A_k) \uparrow \mu(A)$, dass $\mu(A)$ der Limes für $k \to \infty$ der monoton wachsenden Folge $\mu(A_k)$ ist; analog ist $\mu(B_k) \downarrow \mu(B)$ zu verstehen.

Beweis. Wir beweisen zunächst die Äquivalenz von a), b), c) nach dem Schema

$$\text{b)} \Rightarrow \text{a)} \Rightarrow \text{c)} \Rightarrow \text{b)}$$

b) ⇒ a). Sei $A_k \in \mathfrak{R}$, $k \geqslant 1$, eine Folge von paarweise disjunkten Mengen mit $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{R}$. Da μ endlich additiv und monoton ist, gilt für jedes $m \geqslant 1$

$$\sum_{k=1}^{m} \mu(A_k) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\Big) \leqslant \mu(A),$$

also durch Grenzübergang $m \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \leqslant \mu(A).$$

Wegen b) gilt hier auch die umgekehrte Ungleichung, also die Gleichheit. Damit ist a) bewiesen.

a) $\Rightarrow$ c). Sei $A_k \in \mathfrak{R}$, $k \geqslant 1$ eine Folge von Mengen mit $A_k \uparrow A \in \mathfrak{R}$. Setzt man $A'_1 := A_1$ und $A'_k := A_k \setminus A_{k-1}$ für $k \geqslant 2$, so sind die A'_k paarweise disjunkt mit $\bigcup_{k=1}^m A'_k = A_m$ für alle $m \geqslant 1$ und $\bigcup_{k=1}^\infty A'_k = A$. Da μ endlich additiv ist, gilt

$$\sum_{k=1}^m \mu(A'_k) = \mu(A_m).$$

Wegen a) ist

$$\mu(A) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^m \mu(A'_k) = \lim_{m\to\infty} \mu(A_m),$$

also ist c) bewiesen.

c) $\Rightarrow$ b). Sei $A_k \in \mathfrak{R}$, $k \geqslant 1$, eine Folge von Mengen mit $A := \bigcup_{k=1}^\infty A_k \in \mathfrak{R}$. Wir definieren

$$\widetilde{A}_m := \bigcup_{k=1}^m A_k.$$

Da $\widetilde{A}_2 = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1)$, gilt $\mu(\widetilde{A}_2) \leqslant \mu(A_1) + \mu(A_2)$, und durch Induktion nach m zeigt man, dass

$$\mu(\widetilde{A}_m) \leqslant \sum_{k=1}^m \mu(A_k) \qquad \text{für alle } m \geqslant 1.$$

Da $\widetilde{A}_m \uparrow A$, folgt aus der Voraussetzung c), dass $\mu(\widetilde{A}_m) \uparrow \mu(A)$, also

$$\mu(A) \leqslant \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k),$$

d.h. die Eigenschaft b).

Damit ist die Äquivalenz von a), b), c) gezeigt. Nun beweisen wir die Implikationen c) $\Rightarrow$ d), und unter der Voraussetzung der Endlichkeit von μ, auch d) $\Rightarrow$ c)

c) $\Rightarrow$ d). Sei $B_k \in \mathfrak{R}$, $k \geqslant 1$, eine Folge mit $\mu(B_1) < \infty$ und $B_k \downarrow B \in \mathfrak{R}$. Wir definieren

$$A_k := B_1 \setminus B_k \in \mathfrak{R}.$$

Für die Folge A_k gilt $A_k \uparrow B_1 \setminus B$. Aus c) folgt

$$\mu(A_k) \uparrow \mu(B_1 \setminus B) = \mu(B_1) - \mu(B).$$

Da aber $\mu(A_k) = \mu(B_1) - \mu(B_k)$, folgt daraus $\mu(B_k) \downarrow \mu(B)$.

d) $\Rightarrow$ c). Es werde vorausgesetzt, dass $\mu(A) < \infty$ für alle $A \in \mathfrak{R}$. Sei $A_k \in \mathfrak{R}$, $k \geqslant 1$, eine aufsteigende Folge mit $A_k \uparrow A \in \mathfrak{R}$. Die Mengen $B_k := A \setminus A_k$ bilden dann eine absteigende Folge mit $B_k \downarrow \emptyset$. Nach d) gilt $\mu(B_k) \downarrow 0$. Da aber

$$\mu(B_k) = \mu(A) - \mu(A_k),$$

folgt daraus $\mu(A_k) \uparrow \mu(A)$, q.e.d.

Beispiele von Inhalten und Maßen

(2.1) Sei Ω eine beliebige Menge und $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ der Mengenring aller endlichen oder abzählbar unendlichen Teilmengen von Ω. Definiert man $\mu(A)$ als Anzahl der Elemente von A, so ist μ ein σ-additiver Inhalt auf $\mathfrak{R}$. Genau dann ist μ σ-endlich, wenn Ω höchstens abzählbar unendlich ist.

(2.2) Sei Ω eine beliebige nichtleere Menge, $a \in \Omega$ ein Punkt und $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra. Definiert man $\varepsilon_a : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}_+$ durch

$$\varepsilon_a(A) := \begin{cases} 1, & \text{falls } a \in A, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

so erhält man, wie man leicht nachprüft, ein Maß auf $\mathfrak{A}$. Man nennt ε_a die Einheitsmasse im Punkt a, oder auch *Diracmaß* in a.

(2.3) Sei $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra und seien $\mu_1, \dots, \mu_k : \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ Maße und $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}_+$ nichtnegative Konstanten. Dann ist auch

$$\mu := \sum_{i=1}^{k} c_i \mu_i : \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+, \qquad A \mapsto \mu(A) := \sum_{i=1}^{k} c_i \mu_i(A),$$

ein Maß. Dasselbe gilt auch für abzählbare Linear-Kombinationen von Maßen, vgl. Aufgabe 2.2.

(2.4) Wir geben jetzt noch ein Beispiel für einen endlichen Inhalt, der nicht σ-additiv ist. Sei Ω eine abzählbar unendliche Menge und $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ die Mengenalgebra aller $A \subset \Omega$, so dass entweder A oder das Komplement A^c endlich ist, vgl. Beispiel (1.2). Sei $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}_+$ definiert durch

$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ endlich,} \\ 1, & \text{falls } A^c \text{ endlich.} \end{cases}$$

Dann ist μ, wie man leicht nachprüft, ein Inhalt, der aber nicht σ-additiv ist, denn Ω ist die abzählbare disjunkte Vereinigung aller einpunktigen Mengen, die jeweils den Inhalt 0 haben, während Ω den Inhalt 1 hat.

(2.5) Das Lebesguesche Prämaß

Wir hatten in (1.5) den Mengenring $\mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n)$ der endlichen Quadersummen im $\mathbb{R}^n$ definiert. Wir definieren jetzt einen Inhalt

$$\lambda^n : \mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_+$$

mit Hilfe des elementar-geometrischen Inhalts von Quadern. Für einen Quader

$$Q := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_\nu \leqslant x_\nu < b_\nu\}, \quad a_\nu, b_\nu \in \mathbb{R}, a_\nu < b_\nu,$$

sei

$$\lambda^n(Q) := \mathrm{Vol}_n(Q) := \prod_{\nu=1}^{n}(b_\nu - a_\nu).$$

Ein beliebiges Element $A \in \mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n)$ lässt sich schreiben als endliche disjunkte Vereinigung von halboffenen Quadern Q_i,

$$A = \bigcup_{i=1}^{m} Q_i.$$

Man setzt dann

$$\lambda^n(A) := \sum_{i=1}^{m} \lambda^n(Q_i) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Vol}_n(Q_i).$$

Dabei stellt sich aber ein Problem: Eine Menge $A \in \mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n)$ lässt sich auf verschiedene Weisen als disjunkte Vereinigung von Quadern darstellen, und es muss die Wohldefiniertheit gezeigt werden, d.h. dass $\lambda^n(A)$ unabhängig von der Zerlegung von A in disjunkte Quader ist. Wir beginnen mit folgendem

Hilfssatz 1. *Sei Q ein halboffener Quader im $\mathbb{R}^n$, der die disjunkte Vereinigung von endlich vielen halboffenen Quadern $Q_1, \ldots, Q_m$ ist: $Q = \bigcup_{i=1}^m Q_i$. Dann gilt*

$$\mathrm{Vol}_n(Q) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Vol}_n(Q_i).$$

Die Aussage des Hilfssatzes ist zwar anschaulich klar (sofern man im n-dimensionalen Raum überhaupt von Anschauung sprechen kann), bedarf aber dennoch eines Beweises.

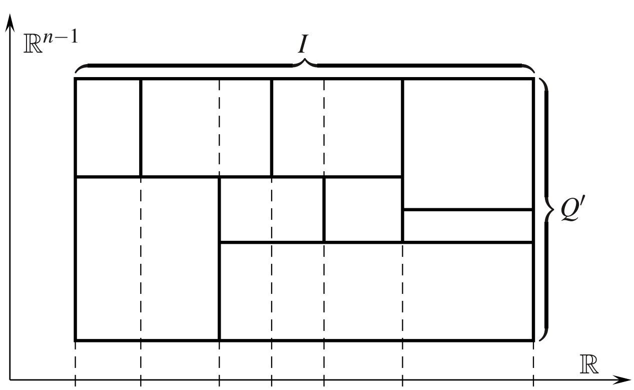

Bild 2.1

Beweis durch Induktion nach n.

Induktionsanfang $n = 1$. In diesem Fall sind $Q = [a,b[$ und alle $Q_i = [a_i,b_i[$ Intervalle. Nach evtl. Umnumerierung dürfen wir annehmen, dass $a_1 < a_2 < \ldots < a_m$. Da das Intervall Q die punktfremde Vereinigung der Intervalle Q_i ist, gilt dann

$$a = a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = a_3 < \ldots < b_{m-1} = a_m < b_m = b,$$

also $\mathrm{Vol}_1(Q) = b - a = \sum_{i=1}^m (b_i - a_i) = \sum_{i=1}^m \mathrm{Vol}_1(Q_i)$.

Induktionsschritt $n-1 \to n$, (siehe auch Bild 2.1). Die Quader Q und Q_i lassen sich zerlegen als

$$Q = I \times Q', \quad Q_i = I_i \times Q'_i$$

mit halboffenen Intervallen I, I_i und $(n-1)$-dimensionalen halboffenen Quadern Q', Q'_i. Nach Definition gilt

$$\mathrm{Vol}_n(Q) = \mathrm{Vol}_1(I)\mathrm{Vol}_{n-1}(Q'), \qquad \mathrm{Vol}_n(Q_i) = \mathrm{Vol}_1(I_i)\mathrm{Vol}_{n-1}(Q'_i).$$

Die endlich vielen Intervalle I_i haben als Vereinigung das Intervall I, sind aber nicht notwendig punktfremd. Indem man die Anfangs- und Endpunkte aller Intervalle I_i der Größe nach ordnet, bekommt man endlich viele disjunkte halboffene Intervalle J_k, $1 \leqslant k \leqslant s$, deren Vereinigung gleich I ist, so dass jedes Intervall I_i die (disjunkte) Vereinigung einiger der Intervalle J_k ist. Sei etwa

$$I_i = J_{k(i,1)} \cup \ldots \cup J_{k(i,r_i)}.$$

Dann ist Q_i die disjunkte Vereinigung der $J_{k(i,j)} \times Q'_i$. Da $\mathrm{Vol}_1(I_i) = \sum_j \mathrm{Vol}_1(J_{k(i,j)})$, gilt

$$\mathrm{Vol}_n(Q_i) = \sum_{j=1}^{r_i} \mathrm{Vol}_n(J_{k(i,j)} \times Q'_i)$$

Die Behauptung des Hilfssatzes ist deshalb gleichbedeutend mit

$$(*) \qquad \mathrm{Vol}_n(Q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{r_i} \mathrm{Vol}_n(J_{k(i,j)} \times Q'_i)$$

Wir ordnen die Quader $J_{k(i,j)} \times Q'_i$ nach gleichem ersten Faktor J_k. Sei $\iota(k)$ die Menge aller Indizes i, so dass ein $j \in \{1,\ldots,r_i\}$ existiert mit $k = k(i,j)$. Dann ist

$$\bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{r_i} J_{k(i,j)} \times Q'_i = \bigcup_{k=1}^{s} \bigcup_{i\in\iota(k)} J_k \times Q'_i$$

und es gilt $\bigcup_{i\in\iota(k)} Q'_i = Q'$ für alle k. Nach Induktions-Voraussetzung ist

$$\sum_{i\in\iota(k)} \mathrm{Vol}_{n-1}(Q'_i) = \mathrm{Vol}_{n-1}(Q').$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{r_i} \mathrm{Vol}_n(J_{k(i,j)} \times Q'_i) &= \sum_{k=1}^{s} \sum_{i\in\iota(k)} \mathrm{Vol}_n(J_k \times Q'_i) \\ &= \sum_{k=1}^{s} \mathrm{Vol}_1(J_k) \sum_{i\in\iota(k)} \mathrm{Vol}_{n-1}(Q'_i) = \sum_{k=1}^{s} \mathrm{Vol}_1(J_k)\mathrm{Vol}_{n-1}(Q') \\ &= \mathrm{Vol}_1(I)\mathrm{Vol}_{n-1}(Q') = \mathrm{Vol}_n(Q).\end{aligned}$$

Damit ist $(*)$ und gleichzeitig der Hilfssatz bewiesen.

Nun zum *Beweis der Wohldefiniertheit* von $\lambda^n : \mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_+$.

Sei $A \in \mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n)$ und seien

$$A = \bigcup_{i=1}^{m} Q_i = \bigcup_{j=1}^{s} \tilde{Q}_j$$

zwei Darstellungen von A als disjunkte Vereinigungen von halboffenen Quadern Q_i bzw. $\tilde{Q}_j$. Es muss gezeigt werden, dass

$$\sum_{i=1}^{m} \mathrm{Vol}_n(Q_i) = \sum_{j=1}^{s} \mathrm{Vol}_n(\tilde{Q}_j)$$

Nach Hilfssatz 1 gilt

$$\mathrm{Vol}_n(Q_i) = \sum_{j=1}^{s} \mathrm{Vol}_n(Q_i \cap \tilde{Q}_j) \quad \text{und} \quad \mathrm{Vol}_n(\tilde{Q}_j) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Vol}_n(\tilde{Q}_j \cap Q_i)$$

Daraus folgt

$$\sum_{i=1}^{m} \mathrm{Vol}_n(Q_i) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{s} \mathrm{Vol}_n(Q_i \cap \tilde{Q}_j) = \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{m} \mathrm{Vol}_n(Q_i \cap \tilde{Q}_j) = \sum_{j=1}^{s} \mathrm{Vol}_n(\tilde{Q}_j),$$

was zu beweisen war.

Nachdem nun die Wohldefiniertheit von λ^n gezeigt ist, folgt die Additivität direkt aus der Definition, d.h. $\lambda^n : \mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_+$ ist ein Inhalt.

Hilfssatz 2. *Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein halboffener Quader. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ halboffene Quader Q' und Q'' mit*

$$\overline{Q'} \subset Q \subset \mathring{Q}'' \quad \textit{und} \quad \mathrm{Vol}_n(Q') \geqslant (1-\varepsilon)\mathrm{Vol}_n(Q),\ \mathrm{Vol}_n(Q'') \leqslant (1+\varepsilon)\mathrm{Vol}_n(Q).$$

Dabei wird für eine Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ mit $\overline{B}$ die abgeschlossene Hülle und mit $\mathring{B}$ das Innere von B bezeichnet (vgl. An. 2, §1).

Beweis. Ist

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : a_\nu \leqslant x_\nu < b_\nu\}, \quad a_\nu, b_\nu \in \mathbb{R}, a_\nu < b_\nu,$$

so wähle man

$$Q' := \{x \in \mathbb{R}^n : a_\nu \leqslant x_\nu < b_\nu - \delta\}, \quad Q'' := \{x \in \mathbb{R}^n : a_\nu - \delta \leqslant x_\nu < b_\nu\}$$

mit genügend kleinem $\delta > 0$.

Satz 2. *Der oben definierte Inhalt $\lambda^n : \mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_+$ ist σ-additiv, d.h. ein Prämaß. Außerdem ist λ^n σ-endlich.*

Man nennt $\lambda^n : \mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_+$ das *Lebesguesche Prämaß*.

Falls klar ist, in welcher Dimension n man arbeitet, lässt man auch den oberen Index n weg und schreibt kurz λ statt λ^n.

Beweis.

1) Sei $A \in \mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n)$ und $A_k \in \mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n)$, $k \geqslant 1$, eine Folge von Quadersummen mit

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Nach Hilfssatz 2 existieren zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ Elemente $A', A_k'' \in \mathfrak{Q}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\overline{A'} \subset A, \quad A_k \subset \mathring{A}_k'' \qquad \text{und}$$
$$\lambda^n(A') \geqslant (1-\varepsilon)\lambda^n(A), \quad \lambda^n(A_k'') \leqslant (1+\varepsilon)\lambda^n(A_k).$$

Da $\overline{A'}$ kompakt ist und

$$\overline{A'} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{A}_k'',$$

gibt es nach dem Heine-Borelschen Überdeckungs-Satz endlich viele $\mathring{A}_k''$, $k = 1, \ldots, m$, die $\overline{A'}$ überdecken, also insbesondere

$$A' \subset \bigcup_{k=1}^{m} A_k'',$$

woraus folgt

$$(1-\varepsilon)\lambda^n(A) \leqslant \lambda^n(A') \leqslant \sum_{k=1}^{m} \lambda^n(A_k'') \leqslant (1+\varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^n(A_k).$$

Da dies für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, folgt

$$\lambda^n(A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^n(A_k).$$

Dies zeigt, dass der Inhalt λ^n σ-subadditiv ist, also nach Satz 1 sogar σ-additiv.

2) Zum Beweis der σ-*Endlichkeit* von λ^n genügt es zu bemerken, dass $\mathbb{R}^n$ die Vereinigung der Folge der halboffenen Würfel

$$\Omega_m := \{x \in \mathbb{R}^n : -m \leqslant x_\nu < m\}, \quad m \geqslant 1,$$

ist.

Damit ist Satz 2 bewiesen.

Im nächsten Paragraphen werden wir dann das Lebesguesche Prämaß zu einem Maß auf der σ-Algebra aller Borelschen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ fortsetzen.

AUFGABEN

2.1. Sei $\mu : \mathfrak{R} \to \mathbb{R}_+$ ein Inhalt auf dem Mengenring $\mathfrak{R} \subset \Omega$. Man zeige:

Seien $A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathfrak{R}$ mit $\mu(A_i) < \infty$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mu(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) &= \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i) - \sum_{i<j} \mu(A_i \cap A_j) \\ &+ \sum_{i<j<k} \mu(A_i \cap A_j \cap A_k) \\ &- \sum_{i_1<i_2<i_3<i_4} \mu(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4}) \\ &+ - \ \ldots \\ &+ (-1)^{m-1} \mu(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m).\end{aligned}$$

2.2. Sei $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Mengenring und sei $\mu_k : \mathfrak{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $k \geqslant 1$, eine Folge von Inhalten. Weiter sei $c_k \in \mathbb{R}_+$, $k \geqslant 1$, eine Folge nicht-negativer reeller Zahlen. Man zeige:

$$\mu := \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mu_k$$

ist ein Inhalt auf $\mathfrak{R}$. Sind alle μ_k σ-additiv, so auch μ.

2.3. Sei $\Omega := \{1, 2, 3, \ldots\}$ die Menge aller positiven ganzen Zahlen und $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ die Mengenalgebra aller $A \subset \Omega$, so dass entweder A oder das Komplement A^c endlich ist. Sei $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}_+$ definiert durch

$$\mu(A) := \sum_{n \in A} \frac{1}{n^2}, \quad \text{falls } A \text{ endlich,} \quad \text{und}$$

$$\mu(A) := 2 - \sum_{n \notin A} \frac{1}{n^2}, \quad \text{falls } A^c \text{ endlich.}$$

Man zeige:

a) μ ist ein Inhalt.

b) μ ist nicht σ-additiv.

2.4. Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion (d.h. $x \leqslant y \Rightarrow F(x) \leqslant F(y)$). Man zeige:

a) Es gibt genau einen Inhalt $\mu_F : \mathfrak{Q}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit

$$\mu_F(I) := F(b) - F(a) \quad \text{für ein Intervall } I := [a, b[\ \in \mathfrak{Q}(\mathbb{R}).$$

b) Der Inhalt μ_F ist genau dann σ-additiv, wenn F von links stetig ist, d.h.

$$\lim_{\xi \nearrow x} F(\xi) = F(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

http://www.springer.com/978-3-658-16745-5

Analysis 3
Maß- und Integrationstheorie, Integralsätze im IRn und Anwendungen
Forster, O.
2017, VIII, 312 S. 38 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-658-16745-5