Vorwort zur 6. Auflage

Das vorliegende Buch stellt den dritten Teil eines Analysis-Kurses für Studierende der Mathematik und Physik dar, und widmet sich der Maß- und Integrationstheorie, den Integralsätzen im $\mathbb{R}^n$ und ihren Anwendungen.

Von der ersten Auflage, die 1981 erschien, bis zur 5. Auflage blieb der Text, bis auf kleinere Korrekturen, im Wesentlichen unverändert. Für die jetzige Neuauflage wurde das Buch weitgehend umgearbeitet. Die wesentliche Änderung bezieht sich darauf, dass das Lebesguesche Integral jetzt auf der Grundlage der abstrakten Maß- und Integrationstheorie dargestellt wird, während in den früheren Auflagen der Ausgangspunkt das Integral für stetige Funktionen mit kompaktem Träger auf dem $\mathbb{R}^n$ war, das sukzessive auf allgemeinere Funktionenklassen erweitert wurde. Ich habe mich auf mehrfachen Wunsch zu dieser Änderung des Aufbaus entschlossen, da in den heutigen Studienplänen für Mathematik von der Vorlesung Analysis 3 meist erwartet wird, dass sie die Grundlagen der Maß- und Integrationstheorie bereitstellt. Die Vorlesung Analysis 3 sollte nach meiner Meinung aber nicht zu einem Kurs über Maß- und Integrationstheorie entarten. Ein wesentlicher Teil bleibt die Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$ mit den Integralsätzen und deren zahlreichen Anwendungen.

Das Buch beginnt mit einer Einführung in die Maßtheorie. Der §3 behandelt die Fortsetzung eines Prämaßes zu einem Maß. Insbesondere wird das Lebesgue-Maß auf der σ-Algebra der Borelschen Mengen im $\mathbb{R}^n$ konstruiert. Danach wird der Integral-Begriff auf abstrakten Maßräumen entwickelt und in §5 werden die wichtigsten Konvergenzsätze der Lebesgueschen Integrationstheorie bewiesen, nämlich die Sätze von der monotonen und von der majorisierten Konvergenz, sowie die Vollständigkeit von L^1. Der §7 ist dem Satz von Fubini im $\mathbb{R}^n$ gewidmet, und es können jetzt die ersten mehrdimensionalen Integrale und Volumina berechnet werden. Um die Durststrecke bis dahin nicht zu verlängern, beschränken wir uns hier auf den $\mathbb{R}^n$ und verzichten auf eine allgemeine Theorie der Produkt-Maße. Der nächste Paragraph über rotationssymmetrische Funktionen dient ebenso dem Ziel, möglichst bald interessante Integrale zu berechnen und Beispiel-Material zur Verfügung zu haben. In §9 beweisen wir die Transformationsformel über das Verhalten von Integralen bei stetig differenzierbarem Koordinatenwechsel, was wesentlich für die Integrationstheorie auf Mannigfaltigkeiten ist. Im Paragraphen über Fourier-Integrale kommen fast alle bis dahin gelernten Sätze der Integrations-Theorie zur Anwendung.

Der nächste Teil des Buches ist dem Gaußschen Integralsatz und seinen Anwendungen gewidmet. Dabei haben wir aus didaktischen Gründen zunächst davon abgesehen, diesen Satz im Differentialformenkalkül zu formulieren, sondern beweisen ihn in seiner klassischen Form. Der Gaußsche Satz wird dann in §16 zur Behandlung der Potentialgleichung benutzt. Wir leiten dabei insbesondere die Poissonsche Integralformel zur

Lösung des Dirichletschen Randwertproblems für die Kugel ab. In §17 erfolgt eine kurze Einführung in die Theorie der Distributionen, in deren Rahmen wir Fundamental-Lösungen für die Potentialgleichung, die Helmholtzsche Schwingungsgleichung und die Wärmeleitungsgleichung bestimmen.

Die letzten vier Paragraphen (§§ 18–21) führen schließlich den Kalkül der Differentialformen ein, mit deren Hilfe der allgemeine Stokessche Integralsatz bewiesen wird. Dabei haben wir uns, um die Abstraktion in Grenzen zu halten, auf den $\mathbb{R}^n$ und seine Untermannigfaltigkeiten beschränkt. Als Anwendungen beweisen wir u.a. den Brouwerschen Fixpunktsatz sowie Integralsätze für holomorphe Funktionen einer und mehrerer Veränderlichen.

Der Umfang des dargestellten Stoffes ist mehr, als in einer einsemestrigen Vorlesung behandelt werden kann. Als eine Auswahl-Möglichkeit bietet sich an, die Integrationstheorie bis zum Gaußschen Integralsatz und seinen Anwendungen zu bringen (§ 1 – 10 und 14 – 16). Falls ein mehrdimensionales Integral schon zur Verfügung steht (nicht notwendig die volle Lebesguesche Integrationstheorie), kann man auch beim Differentialformenkalkül (§ 18 und 19) einsteigen und unter Benutzung von §9 und §14 mit §20 und §21 zum Stokesschen Integralsatz gelangen. Dieser kann dann in die klassische Form des Gaußschen Integralsatzes zurückübersetzt werden und steht so für Anwendungen in §16 und §17 zur Verfügung.

Im Zuge der Neubearbeitung erhielt das Buch durch TeX-Satz auch eine neue äußere Form. Hierfür geht mein herzlicher Dank an Frau YOSHIDA Kuniko, die den Großteil des Textes mit LaTeX gesetzt und die Figuren (mit `pstricks`) erstellt hat.

München, September 2010

Otto Forster

Vorwort zur 8. Auflage

Bei der Überarbeitung für die 7. und 8. Auflage wurde an einigen Stellen der Text ergänzt und es kamen neue Aufgaben und Abbildungen hinzu.

Besonderer Dank gebührt einigen sorgfältigen Lesern der 6. und 7. Auflage, durch deren Hilfe eine ganze Reihe von Druckfehlern beseitigt werden konnte.

München, Oktober 2016 O.F.

http://www.springer.com/978-3-658-16745-5

Analysis 3
Maß- und Integrationstheorie, Integralsätze im IRn und Anwendungen
Forster, O.
2017, VIII, 312 S. 38 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-658-16745-5