

2 Die Newton'sche Gravitationstheorie

Von welchem Ausgangspunkt wollen wir Einsteins Gravitationstheorie kennenlernen? Wir rekapitulieren zu Beginn die Beschreibung der Gravitation nach Newton. Vektoren im $\mathbb{R}^3$ machen wir durch Fettdruck kenntlich.

Auf eine Masse m , die sich im Abstand $\mathbf{r}$ von einer anderen Masse M befindet, wirkt, nach dem Newton'schen Gravitationsgesetz, die Kraft

$$\mathbf{F} = -\frac{MmG}{r^3} \mathbf{r}. \quad (2.1)$$

Erweitern wir die Betrachtung auf N Massen, die über die Gravitation wechselwirken und verwenden das zweite Newton'sche Gesetz der Mechanik $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$, so erhalten wir die Bewegungsgleichung:

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = -G \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{m_i m_j (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.2)$$

Diese Gesetze ((2.1) und (2.2)) bilden eine sehr erfolgreiche Theorie. So lassen sich beispielsweise Planetenbahnen durch diese Theorie beschreiben.¹ Aber auch Phänomene auf anderen Größenordnungen wie die Bahnkurven von waagerechten oder schrägen Würfeln lassen sich mit der Newton'schen Theorie hinreichend gut beschreiben.

¹ Eine umfangreiche Darstellung der Kepler'schen Gesetze findet sich in [NOL 13a, Kap. 2.5].

Wollen wir nun die Aussage der Newton'schen Theorie verallgemeinern, ist es ratsam eine weitere Größe einzuführen. Analog zum Elektromagnetismus stellen wir eine Feldstärke auf. Die Gravitationsfeldstärke $\mathbf{g}$ beschreibt ein Gravitationsfeld, so wie die elektrische Feldstärke $\mathbf{E}$ ein elektrisches Feld beschreibt:

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m} \stackrel{(2.1)}{=} -\frac{GM}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (2.3)$$

Im Elektromagnetismus wird die elektrische Feldstärke $\mathbf{E}$ durch ein Potential ausgedrückt. Auch in der Gravitationstheorie lässt sich $\mathbf{g}$ durch den Gradienten eines Skalarfeldes ausdrücken. Dazu führen wir das Gravitationspotential $\Phi(\mathbf{r})$ ein:²

$$\mathbf{g} = -\nabla\Phi(\mathbf{r}) \Rightarrow \Phi(\mathbf{r}) := -\frac{GM}{|\mathbf{r}|}. \quad (2.4)$$

Betrachten wir mehrere Massen, die das Feld erzeugen oder eine kontinuierliche Verteilung, so formulieren wir:

$$\Phi(\mathbf{r}) = -G \sum_j \frac{m_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} = -G \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.5)$$

Nun können wir die Bewegungsgleichung (2.2) für eine Masse m am Ort $\mathbf{r}$ durch das Potential ausdrücken:

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -m\nabla\Phi(\mathbf{r}). \quad (2.6)$$

Wir folgen weiter der Argumentation in der Elektrostatik und stel-

² Wir normieren das Gravitationspotential Φ dergestalt, dass es für $r \rightarrow \infty$ verschwindet.

len nun Feldgleichungen auf. Feldgleichungen sind Differentialgleichungen der Potentiale [FLI 12a, Kap. 1]. Wir bestimmen dazu:

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = \nabla \cdot (\nabla\Phi(\mathbf{r})). \quad (2.7)$$

In der Elektrostatik ist die elektrische Ladung q die Quelle des Feldes. Durch die Analogiebetrachtung muss also nach Gleichung (2.3) die Masse als Proportionalitätsfaktor zwischen Feld und Kraft die Quelle sein. In der Newton'schen Theorie betrachten wir demnach Massenverteilungen, bzw. bei kontinuierlichen Verteilungen die Massendichte $\rho(\mathbf{r})$, als Quelle des Feldes. Wir stellen zwei Feldgleichungen auf. Im ersten Fall betrachten wir ein Vakuum, also ohne die Anwesenheit von Masse.³ Ist keine Masse vorhanden, tritt auch kein Gravitationsfeld auf. Diese Feldgleichung wird in diesem Fall Laplace-Gleichung genannt:

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.8)$$

Ist eine Masse vorhanden, müssen wir zur Bestimmung der Poisson-Gleichung, wie die Feldgleichung dann genannt wird, die Definition

³ Die Laplace-Gleichung gilt, allgemeiner formuliert, in Raumgebieten, in denen sich keine Masse befindet. Betrachten wir beispielsweise nur die Erde als Masse im Universum, so gilt außerhalb der Erde die Laplace-Gleichung. Auch wenn hier offensichtlich kein Vakuum vorliegt.

unseres Potentials (2.5) einsetzen:⁴

$$\begin{aligned}
 \Delta\Phi(\mathbf{r}) &= \Delta \left(-G \int d^3r' \frac{\rho(r')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \\
 &= -G \left(\int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \\
 &= -G \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \{-4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\} \\
 &= 4\pi G \rho(\mathbf{r}).
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Der Ausdruck in der geschweiften Klammer wurde mit einer Berechnung aus [SCHE 10, Kap.5.1.7] aufgelöst. Im Anhang B.2.2 dieser Arbeit kann die Schlussfolgerung nachvollzogen werden.

Im Abschnitt 4.1 werden wir erkennen, dass die nun präsentierte Theorie der Gravitation mit den Feldgleichungen (2.8) und (2.9) nicht mit der Speziellen Relativitätstheorie (kurz: SRT) vereinbar ist. Nach der Formulierung der SRT besteht also die Notwendigkeit einer neuen Theorie der Gravitation. Auf Basis dessen vollziehen wir dann Einsteins Allgemeine Relativitätstheorie nach. Zunächst rekapitulieren wir allerdings einige wichtige Erkenntnisse der Speziellen Relativitätstheorie.

⁴ Die analoge Betrachtung in der Elektrostatik ist im Vorlesungsskript [SCHE 10, Kap. 5.1.7] oder im Lehrbuch von Fließbach [FLI 12b, Kap. 6] nachzulesen.

Allgemeine Relativitätstheorie und Gravitationswellen

Eine Einführung für Lehramtsstudierende

Pohl, J.

2017, IX, 243 S., Softcover

ISBN: 978-3-658-17124-7