

§ 1 Vollständige Induktion

Aufgabe 1 A. Wir halten k fest und beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion nach $n \geq k$.

Induktionsanfang: $n = k$.

Es gilt

$$\sum_{m=k}^k \binom{m}{k} = \binom{k}{k} = 1 = \binom{k+1}{k+1}.$$

Induktionsschritt: $n \rightarrow n+1$.

Es gelte die Behauptung für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$, dann ist

$$\binom{n+2}{k+1} = \sum_{m=k}^{n+1} \binom{m}{k}$$

zu bestätigen. Nun gilt nach Induktionsvoraussetzung (IV)

$$\begin{aligned} \sum_{m=k}^{n+1} \binom{m}{k} &= \sum_{m=k}^n \binom{m}{k} + \binom{n+1}{k} \\ &\stackrel{\text{(IV)}}{=} \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k} \\ &= \binom{n+2}{k+1}, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt An. 1, §1, Hilfssatz zu Satz 4 verwendet wurde. Damit ist die Induktionsbehauptung bewiesen.

Aufgabe 1 C. Die Aufgabe erinnert etwas an den Binomischen Lehrsatz (An. 1, §1, Satz 5). Man kann diese Analogie noch stärker sichtbar machen, indem man folgendes Symbol einführt: Für eine reelle Zahl x und eine natürliche Zahl n sei

$$x^{[n]} := \prod_{j=1}^n (x - j + 1) = x(x-1) \cdots (x-n+1)$$

die *fallende Fakultät von x mit n Faktoren* (oder auch *verallgemeinerte Potenz von x*). Damit wird dann

$$\binom{x+y}{n} = \frac{1}{n!} (x+y)^{[n]},$$

$$\binom{x}{n-k} \binom{y}{k} = \frac{1}{(n-k)!k!} x^{[n-k]} y^{[k]}.$$

Wegen $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ ist deshalb die Behauptung der Aufgabe gleichbedeutend mit

$$(1) \quad (x+y)^{[n]} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{[n-k]} y^{[k]}.$$

Diese Formel kann jetzt in völliger Analogie zum Binomischen Lehrsatz durch vollständige Induktion nach n bewiesen werden.

Induktionsanfang: $n = 0$.

Klar, beide Seiten der Gleichung (1) haben den Wert 1.

Induktionsschritt: $n \longrightarrow n+1$.

$$\begin{aligned} (x+y)^{[n+1]} &= (x+y)^{[n]}(x+y-n) \\ &\stackrel{(IV)}{=} \sum_{k=0}^n \left\{ \binom{n}{k} x^{[n-k]} y^{[k]} \right\} \{ (x-n+k) + (y-k) \} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{[n+1-k]} y^{[k]} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{[n-k]} y^{[k+1]} \\ &= \left(x^{[n+1]} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{[n+1-k]} y^{[k]} \right) + \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{[n-k]} y^{[k+1]} + y^{[n+1]} \right) \\ &= x^{[n+1]} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{[n+1-k]} y^{[k]} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} x^{[n+1-k]} y^{[k]} + y^{[n+1]} \\ &= x^{[n+1]} + \sum_{k=1}^n \left\{ \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right\} x^{[n+1-k]} y^{[k]} + y^{[n+1]} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{[n+1-k]} y^{[k]}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Setzt man in der Formel für x und y natürliche Zahlen N und M ein, so besitzt die Formel

$$(2) \quad \binom{N+M}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{N}{n-k} \binom{M}{k}$$

eine kombinatorische Interpretation und einen entsprechenden Beweis. Wir denken uns eine $(N + M)$ -elementige Menge

$$S = \{A_1, \dots, A_N, B_1, \dots, B_M\},$$

die aus zwei Sorten von Elementen besteht. Die Anzahl aller n -elementigen Teilmengen von S ist nach An. 1, §1, Satz 4, gleich $\binom{N+M}{n}$. Die n -elementigen Teilmengen von S zerfallen in $n + 1$ Klassen K_0, \dots, K_n : Die Klasse K_k besteht aus denjenigen Teilmengen von S , die $n - k$ Elemente aus $\{A_1, \dots, A_N\}$ und k Elemente aus $\{B_1, \dots, B_M\}$ enthalten. Deshalb ist die Anzahl der Teilmengen der Klasse K_k gleich

$$\binom{N}{n-k} \binom{M}{k}$$

und durch Aufsummieren ergibt sich die Formel (2).

Aufgabe 1 G. Setzt man im Binomischen Lehrsatz

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = (x+y)^n$$

speziell $x = 1$ und $y = -1$, erhält man für $n \geq 1$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0^n = 0.$$

Dies lässt sich auch schreiben als

$$\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ gerade}}} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ ungerade}}} \binom{n}{k}.$$

Da $\binom{n}{k}$ die Zahl der k -elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge M_n angibt, folgt also, dass es genau so viele Teilmengen mit einer geraden Anzahl von Elementen gibt wie Teilmengen mit einer ungeraden Anzahl von Elementen.

Bemerkung: Ist n ungerade, so lässt sich dies auch einfach so einsehen: Ordnet man jeder geradzahligen Teilmenge $T \subset M_n$ ihr Komplement $T^c := M_n \setminus T$ zu, so erhält man eine bijektive Beziehung zwischen der Menge aller geradzahligen Teilmengen und der Menge aller ungeradzahligen Teilmengen.

Aufgabe 1 H. Wir zeigen b), a), c) und e).

b) Da $\ell \geq 1$, kann man schreiben

$$\begin{aligned} \binom{2^n}{\ell} &= \frac{2^n \cdot (2^n - 1) \cdot \dots \cdot (2^n - \ell + 1)}{\ell!} \\ &= \frac{2^n}{\ell} \cdot \frac{(2^n - 1) \cdot \dots \cdot (2^n - \ell + 1)}{(\ell - 1)!} = \frac{2^n}{\ell} \cdot \binom{2^n - 1}{\ell - 1}. \end{aligned}$$

Wir zerlegen ℓ als $\ell = 2^m u$ mit einer ungeraden Zahl u . Da $\ell < 2^n$, folgt $m < n$. Es gilt damit

$$\binom{2^n}{\ell} = \frac{2^{n-m}}{u} \cdot \binom{2^n - 1}{\ell - 1} \implies u \cdot \binom{2^n}{\ell} = 2^{n-m} \cdot \binom{2^n - 1}{\ell - 1}.$$

Wäre $\binom{2^n}{\ell}$ ungerade, würde die linke Seite der letzten Gleichung eine ungerade Zahl sein. Die rechte Seite ist aber eine gerade Zahl, Widerspruch! Also ist $\binom{2^n}{\ell}$ gerade, q.e.d.

a) Wir zeigen durch Induktion nach ℓ , dass $\binom{2^n - 1}{\ell}$ für $0 \leq \ell \leq 2^n - 1$ ungerade ist.

Der *Induktions-Anfang* $\ell = 0$ ist trivial, da $\binom{2^n - 1}{0} = 1$.

Induktions-Schritt $\ell - 1 \rightarrow \ell$, ($1 \leq \ell \leq 2^n - 1$). Es gilt

$$\binom{2^n - 1}{\ell - 1} + \binom{2^n - 1}{\ell} = \binom{2^n}{\ell} \implies \binom{2^n - 1}{\ell} = \binom{2^n}{\ell} - \binom{2^n - 1}{\ell - 1}.$$

Da $\binom{2^n}{\ell}$ nach Teil b) gerade und $\binom{2^n - 1}{\ell - 1}$ nach Induktions-Voraussetzung ungerade ist folgt, dass $\binom{2^n - 1}{\ell}$ ungerade ist.

c) Wir zeigen jetzt durch Induktion nach ℓ , dass $\binom{2^n + \ell}{\ell}$ für $0 \leq \ell \leq 2^n - 1$ ungerade ist.

Der *Induktions-Anfang* $\ell = 0$ ist trivial, da $\binom{2^n}{0} = 1$.

Induktions-Schritt $\ell - 1 \rightarrow \ell$, ($1 \leq \ell \leq 2^n - 1$). Es gilt

$$\begin{aligned} \binom{2^n + \ell}{\ell} &= \frac{(2^n + \ell)(2^n + \ell - 1) \cdot \dots \cdot (2^n + 1)}{\ell!} \\ &= \frac{(2^n + \ell)}{\ell} \cdot \frac{(2^n + \ell - 1) \cdot \dots \cdot (2^n + 1)}{(\ell - 1)!} \\ &= \frac{(2^n + \ell)}{\ell} \cdot \binom{2^n + \ell - 1}{\ell - 1}. \end{aligned}$$

Behauptung. $\frac{(2^n + \ell)}{\ell} = \frac{r}{s}$ mit ungeraden Zahlen r, s .

Beweis hierfür. Wir zerlegen ℓ als $\ell = 2^m s$ mit einer ungeraden Zahl s . Da $\ell < 2^n$, folgt $m < n$. Es folgt $2^n + \ell = 2^m(2^{n-m} + s) = 2^m r$, mit $r := 2^{n-m} + s$ ungerade. Daraus folgt die Behauptung.

Setzen wir die gerade bewiesene Gleichung oben ein, erhalten wir

$$s \binom{2^n + \ell}{\ell} = r \binom{2^n + \ell - 1}{\ell - 1}.$$

Die rechte Seite ist nach Induktions-Voraussetzung ungerade. Deshalb ist auch $\binom{2^n + \ell}{\ell}$ ungerade, q.e.d.

e) Es ist zu zeigen, dass die ganzen Zahlen

$$A := \binom{k}{\ell} \quad \text{und} \quad B := \binom{2^n - 1 - \ell}{k - \ell}$$

gleiche Parität haben, d.h. beide gerade oder beide ungerade sind. Dazu formen wir etwas um:

$$A = \binom{k}{\ell} = \binom{k}{k - \ell} = \frac{1}{(k - \ell)!} \prod_{m=\ell+1}^k m$$

und

$$B = \binom{2^n - 1 - \ell}{k - \ell} = \frac{1}{(k - \ell)!} \prod_{m=\ell+1}^k (2^n - m).$$

Die Behauptung folgt jetzt daraus, dass die Produkte

$$\prod_{m=\ell+1}^k m \quad \text{und} \quad \prod_{m=\ell+1}^k (2^n - m)$$

dieselbe Zweierpotenz enthalten. Dies sieht man so: Wir schreiben $m = 2^v u$ mit einer ungeraden Zahl u . Da $m \leq k < 2^n$, folgt $v < n$. Damit ist

$$2^n - m = 2^v (2^{n-v} - u) = 2^v u'$$

mit der ungeraden Zahl $u' := 2^{n-v} - u$, q.e.d.

Aufgabe 1 J. Die Zahl $\binom{n+k-1}{k}$ ist gleich der Anzahl aller k -elementigen Teilmengen einer Menge von $N := n + k - 1$ Elementen. Die Beweisidee besteht darin, die Behauptung auf diese bekannte Aussage zurückzuführen.

Die Anzahl aller k -elementigen Teilmengen einer N -elementigen Menge ist gleich der Anzahl aller k -Tupel $(b_1, \dots, b_k) \in \mathbb{N}^k$ mit

$$(1) \quad 1 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_k \leq N = n + k - 1.$$

Jedem solchen k -Tupel ordnen wir ein k -Tupel $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{N}^k$ durch die Vorschrift $a_j := b_j - j + 1$ für alle $j \in \{1, \dots, k\}$ zu. Dies erfüllt dann die Bedingung

$$(2) \quad 1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq n.$$

Umgekehrt entsteht jedes k -Tupel $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{N}^k$, das der Bedingung (2) genügt, auf diese Weise aus genau einem k -Tupel $(b_1, \dots, b_k) \in \mathbb{N}^k$, das der Bedingung (1) genügt. Deshalb ist auch die Anzahl aller k -Tupel $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{N}^k$ mit (2) gleich

$$\binom{N}{k} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Aufgabe 1 L. Wir bezeichnen die linke bzw. rechte Seite der zu beweisenden Gleichung mit

$$LS(N) = \sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

$$RS(N) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{N+n} = \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{n}.$$

Wir beweisen die Gleichheit durch vollständige Induktion nach N .

Der *Induktionsanfang* $N = 0$ ist klar, da $LS(0) = 0$ und $RS(0) = 0$.

Induktionsschritt $N \rightarrow N + 1$. Wir berechnen jeweils die Differenzen

$$LS(N+1) - LS(N) = \frac{1}{2N+1} - \frac{1}{2N+2}$$

und

$$RS(N+1) - RS(N) = \frac{1}{2N+2} + \frac{1}{2N+1} - \frac{1}{N+1}$$

$$= \frac{1}{2N+1} - \frac{1}{2N+2}.$$

Da diese Differenzen gleich sind, und nach Induktions-Voraussetzung $LS(N) = RS(N)$, folgt $LS(N+1) = RS(N+1)$, q.e.d.

Aufgabe 1 P. Wir setzen zur Abkürzung $S(n) := \sum_{k=1}^n (2k-1)^2$. Es gilt

$$S(0) = 0, \quad S(1) = 1, \quad S(2) = 1^2 + 3^2 = 10, \quad S(3) = 1^2 + 3^2 + 5^2 = 35.$$

Da über Quadrate summiert wird, ist es naheliegend zu vermuten, dass $S(n)$ durch ein Polynom 3-ten Grades in n dargestellt wird. Wir machen daher den Ansatz

$$S(n) = c_3 n^3 + c_2 n^2 + c_1 n + c_0$$

und versuchen die Koeffizienten c_i so zu bestimmen, dass die Formel für $n = 0, 1, 2, 3$ richtig ist. Für $n = 0$ erhält man die Bedingung $c_0 = 0$. Für $n = 1, 2, 3$ ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 &= c_3 + c_2 + c_1, \\ 10 &= 8c_3 + 4c_2 + 2c_1, \\ 35 &= 27c_3 + 9c_2 + 3c_1. \end{aligned}$$

Dies Gleichungs-System ist leicht durch Elimination zu lösen, man erhält

$$c_1 = -\frac{1}{3}, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{4}{3}.$$

Die vermutete Formel ist also

$$S(n) = \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{4}{3}n^3 - \frac{1}{3}n = \frac{(4n^2-1)n}{3},$$

sie gilt für $n = 0, 1, 2, 3$.

Für allgemeines n beweisen wir sie jetzt durch vollständige Induktion.

Induktions-Schritt: $n \rightarrow n+1$.

$$\begin{aligned} S(n+1) &= S(n) + (2n+1)^2 = \frac{1}{3}(4n^2-1)n + 4n^2 + 4n + 1 \\ &= \frac{1}{3}(4n^3 - n + 12n^2 + 12n + 3) \\ &= \frac{1}{3}(4(n+1)^3 - (n+1)), \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Bemerkung. Das Polynom für $S(n)$ lässt sich wie folgt umformen:

$$\frac{(4n^2 - 1)n}{3} = \frac{(2n + 1) \cdot 2n \cdot (2n - 1)}{6} = \binom{2n + 1}{3}.$$

Daher kann man die bewiesene Formel auch eleganter schreiben als

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1)^2 = \binom{2n + 1}{3}.$$

Aufgabe 1 Q. Die Summenformeln für die 0-ten bis 3-ten Potenzen lauten:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^0 &= n, & \sum_{k=1}^n k^1 &= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n, \\ \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n, & \sum_{k=1}^n k^3 &= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2, \end{aligned}$$

vgl. An. 1, §1, Satz 1 und Aufgabe 1 O.

Es ist deshalb nicht verwunderlich, dass auch für die r -ten Potenzen eine Summenformel dieser Art existiert. (Der Koeffizient $\frac{1}{r+1}$ bei n^{r+1} hängt zusammen mit der Integralformel

$$\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1},$$

vgl. Aufgabe 18 B.)

Wir beweisen die allgemeine Formel durch vollständige Induktion nach r .

Induktionsanfang: $r = 0$.

Klar, siehe obige Vorbetrachtungen.

Induktionsschritt:

Es sei die Formel bereits bis zur $(r-1)$ -ten Potenz bewiesen. Wir gehen aus von der aus dem Binomischen Lehrsatz folgenden Formel

$$\begin{aligned} (k-1)^{r+1} &= \sum_{s=0}^{r+1} \binom{r+1}{s} (-1)^s k^{r+1-s} \\ &= k^{r+1} - (r+1)k^r + \sum_{s=2}^{r+1} \binom{r+1}{s} (-1)^s k^{r+1-s}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$(1) \quad k^{r+1} - (k-1)^{r+1} = (r+1)k^r + \sum_{s=0}^{r-1} b_{rs}k^s,$$

mit

$$b_{rs} := (-1)^{r-s} \binom{r+1}{s},$$

wobei uns aber für den Beweis nicht die genaue Gestalt der b_{rs} interessiert, sondern allein die Tatsache, dass sie nur von r und s abhängige rationale Zahlen sind. Wegen

$$\sum_{k=1}^n (k^{r+1} - (k-1)^{r+1}) = \sum_{k=1}^n k^{r+1} - \sum_{k=0}^{n-1} k^{r+1} = n^{r+1}$$

folgt aus (1) durch Aufsummieren

$$n^{r+1} = (r+1) \sum_{k=1}^n k^r + \sum_{s=0}^{r-1} b_{rs} \sum_{k=1}^n k^s.$$

Auf die Summen $\sum_{k=1}^n k^s$ für $s \in \{0, \dots, r-1\}$ können wir nun die Induktionsvoraussetzung anwenden und erhalten

$$\sum_{s=0}^{r-1} b_{rs} \sum_{k=1}^n k^s = \sum_{l=1}^r c_{rl} n^l$$

mit rationalen Zahlen c_{rl} . Damit ergibt sich

$$\sum_{k=1}^n k^r = \frac{1}{r+1} n^{r+1} - \sum_{l=1}^r \frac{c_{rl}}{r+1} n^l,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Bemerkung 1: Eine andere Beweismöglichkeit besteht darin, von der in Aufgabe 1 A bewiesenen Formel

$$\binom{n+1}{r+1} = \sum_{k=1}^n \binom{k}{r}$$

auszugehen. Benutzt man die in der Lösung von Aufgabe 1 C eingeführten verallgemeinerten Potenzen

$$k^{[r]} = k(k-1) \cdot \dots \cdot (k-r+1),$$

so erhält man

$$\frac{1}{(r+1)!} (n+1)^{[r+1]} = \frac{1}{r!} \sum_{k=1}^n k^{[r]}$$

oder

$$\sum_{k=1}^n k^{[r]} = \frac{1}{r+1} (n+1)^{[r+1]}.$$

Durch Umrechnung der verallgemeinerten Potenzen in gewöhnliche Potenzen und Anwendung der Induktionsvoraussetzung für niedrigere Potenzen erhält man die Behauptung.

Bemerkung 2: Wir haben hier das Beweisprinzip der vollständigen Induktion in einer etwas anderen Form als in An. 1, §1, Seite 1, verwendet: Es sei n_0 eine ganze Zahl und $B(n)$ für jede ganze Zahl $n \geq n_0$ eine Aussage. Um $B(n)$ für alle $n \geq n_0$ zu beweisen, genügt es zu zeigen:

(I') $B(n_0)$ ist richtig (Induktionsanfang).

(II') Für beliebiges $n \geq n_0$ gilt: Falls $B(m)$ für alle m mit $n_0 \leq m < n$ richtig ist, ist auch $B(n)$ richtig (Induktionsschritt).

Dieses Induktionsprinzip kann man wie folgt auf das in An. 1, §1, formulierte Induktionsprinzip zurückführen. Für $n \geq n_0$ sei $A(n)$ die folgende Aussage:

$B(m)$ ist richtig für alle m mit $n_0 \leq m \leq n$.

Dann gilt $A(n_0) = B(n_0)$ und (II') ist äquivalent zur Implikation

$$A(n-1) \implies A(n).$$

Aufgabe 1 S. Es mag auf den ersten Blick verblüffen, dass die Behauptung der Aufgabe wahr ist, da man als nicht abergläubischer Mensch annimmt, dass jeder Wochentag gleich häufig ist. Dass jedoch die sieben Wochentage auf den 13. nicht gleichverteilt sein können, kann man sich auf folgende Weise klarmachen:

Der Gregorianische Kalender ist periodisch und wiederholt sich alle 400 Jahre. Nach einer solchen Periode wiederholt sich auch die Verteilung der Wochentage, denn es gilt:

(1) Die Anzahl der Tage in 400 Jahren ist durch 7 teilbar.

Übungsbuch zur Analysis 1

Aufgaben und Lösungen

Forster, O.; Wessoly, R.

2017, VIII, 199 S. 11 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-17212-1