KAPITEL 2

Theodoros: Wurzeln und Selbstähnlichkeit (-399)

Zusammenfassung. In Platons Dialog „Theaitetos“ findet sich die Bemerkung, ein gewisser Theodoros habe die Irrationalität der Qudratwurzeln bis $\sqrt{17}$ „durch Zeichnungen“ bewiesen, aber nicht weiter. Benno Artmann fand 1994 heraus, welche Zeichnungen Theodoros vermutlich angefertigt hat und warum die nachfolgende Wurzel $\sqrt{19}$ für ihn unerreichbar war. Diese verblüffend einfachen Figuren enthalten viel mehr als nur den Beweis der Irrationalität; aus ihnen lässt sich der Wert der Quadratwurzel mit beliebiger Genauigkeit ermitteln, denn sie kodieren den unendlichen Prozess der Wechselwegnahme für die Quadratwurzel im Verhältnis zu Eins. Der Prozess ist periodisch, was sich in der Selbstähnlichkeit der Figuren ausdrückt. Diese Eigenschaft wurde von Theodoros bis $\sqrt{17}$ beobachtet; erst über zwei Jahrtausende später hat Lagrange sie allgemein bewiesen. Wir geben ein sehr einfaches Argument dafür.

Im vorigen Kapitel, besonders in der Figur auf Seite 6 haben wir gesehen, dass die quadratische Gleichung des Goldenen Schnittes, $x^2 = x + 1$ etwas mit *Selbstähnlichkeit* zu tun hat. Eine Figur heißt *selbstähnlich*, wenn sie eine Teilfigur enthält, die zur ganzen Figur *ähnlich* ist (kongruent nach Verkleinerung). Der antike griechische Mathematiker *Theodoros* von Kyrene (ca. 460 - 390 v.Chr.) erkannte, dass viele Quadratwurzeln durch selbstähnliche Figuren ausgedrückt werden, mit denen man nicht nur die Irrationalität zeigen, sondern die Quadratwurzeln auch beliebig genau berechnen kann.

Theodoros war der Lehrer eines sehr viel bekannteren Mathematikers, *Theaitetos* (417 - 369 v.Chr.), dem wir die Entdeckung des Dodekaeders und Ikosaeders sowie den Beweis der Irrationaliät aller Quadratwurzeln von Primzahlen verdanken, so wie er später in den „Elementen“ des Euklid überliefert wurde und heute noch geführt wird.[1] In dem gleichnamigen Dialog von Platon (ca. 428 - 348 v.Chr.), der ein fiktives Gespräch aus dem Jahr 399 v.Chr. (dem Todesjahr von Sokrates) schildert, erwähnt der junge Theaitetos diese Leistung und vergleicht sie mit der seines Lehrers:

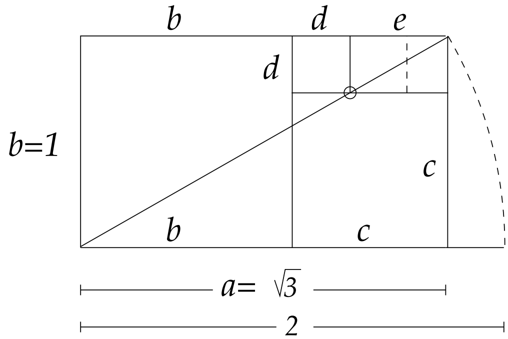
> „Über Quadratwurzeln (‘dynamis’) zeichnete uns Theodoros hier etwas, womit er von den Quadraten von drei

[1] $\sqrt{p} = \frac{k}{n} \Rightarrow p = \frac{k^2}{n^2} \Rightarrow (*)\ n^2 p = k^2$. In einer Quadratzahl wie k^2 und n^2 kommt jeder Primfaktor in gerader Potenz vor. In der Gleichung $(*)$ kommt also der Primfaktor p rechts in gerader Potenz vor, links aber in ungerader, Widerspruch!

J.-H. Eschenburg, *Sternstunden der Mathematik*, DOI 10.1007/978-3-658-17295-4_2

und fünf Quadratfuß Flächeninhalt bewies, dass ihre Seitenlänge nicht messbar wäre durch die einfüßige. Und so ging er jede Quadratwurzel einzeln durch bis zum Quadrat mit siebzehn Quadratfuß; bei dieser hielt er inne. Uns nun fiel so etwas ein, da der Quadratwurzeln unendlich viele zu sein schienen, wollten wir versuchen, sie zusammenzufassen in eins, wodurch wir diese Quadratwurzeln alle behandeln könnten.“

Benno Artmann[2] hat in einem Artikel von 1994 gezeigt, was Theodoros vermutlich gezeichnet hat und warum er nicht weiter als bis 17 gekommen ist.[3] Hier ist die Figur für $\sqrt{3}$, die Theodoros vermutlich gefunden hat:



Zur geometrischen Konstruktion von $\sqrt{3}$ benötigt man ein Rechteck mit Höhe $b = 1$ und Diagonale 2, dann ist die Breite $a = \sqrt{3}$ (denn $1^2 + \sqrt{3}^2 = 2^2$). Dieses ist leicht konstruierbar. Nun führen wir die Wechselwegnahme von $a = \sqrt{3}$ und $b = 1$ durch wie in der Rechteckfigur auf Seite 4: Wir versuchen, das Rechteck durch jeweils möglichst große Quadrate auszufüllen. Zuerst spalten wir ein Quadrat der Seitenlänge b ab, danach eins der Seitenlänge $c = a - b$, danach eins mit Seitenlänge $d = b - c$. Von dieser Sorte würde noch ein zweites Quadrat in den freien Raum passen. Aber schon beim ersten Quadrat mit Seitenlänge d macht Theodoros eine entscheidende Beobachtung: Der rechte untere Eckpunkt (in der Figur eingekreist) liegt auf der Diagonalen des ursprünglichen Rechtecks! Ob Theodoros das wirklich bewiesen hat oder nur an der Zeichnung abgelesen, wissen wir nicht. Ein algebraischer Beweis dafür ist schnell gegeben: Zu zeigen ist

$$a/b = e/d \iff x := a/b = \sqrt{3},$$

wobei $e = c - d$, $d = b - c$, $c = a - b$. Also ist

$$\begin{array}{lllllllll} e &=& c-d &=& c-(b-c) &=& 2c-b &=& 2(a-b)-b = 2a-3b, \\ d &=& b-c &=& b-(a-b) &=& 2b-a && \end{array}$$

[2]Benno Artmann, 1933 (Heiligenstadt) - 2010 (Göttingen).

[3]B. Artmann: A proof for Theodoros’ theorem by drawing diagrams, Journal of Geometry 49 (1994). Siehe auch Janina Deininger: Ein Beweis des Theorems von Theodoros durch graphische Darstellung, Zulassungsarbeit, Augsburg 2012.

und damit (Erweitern mit $1/b$)

$$x \stackrel{!}{=} \frac{e}{d} = \frac{2a-3b}{2b-a} = \frac{2x-3}{2-x} \iff (2-x)x = 2x-3 \iff x^2 = 3.$$

Theodoros hat mit diesen Zeichnungen weit mehr geleistet, als ihm sein berühmter Schüler in Platons Dialog zugesteht: Er hat nicht nur die Irrationalität der Quadratwurzeln der Primzahlen von 2 bis 17 bewiesen („dass ihre Seitenlänge nicht messbar wäre durch die einfüßige“), sondern seine Zeichnungen enthalten die volle Kettenbruchentwicklung der Quadratwurzeln, aus der sie mit beliebiger Genauigkeit berechnet, d.h. durch Brüche approximiert werden können (vgl. Übung 2.6). Im vorliegenden Fall $a/b = \sqrt{3}$ haben wir

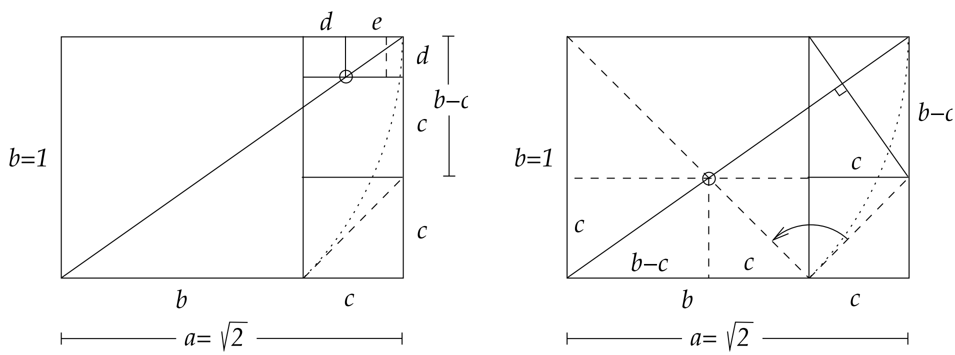
$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{c}{b}, \quad \frac{b}{c} = 1 + \frac{d}{c}, \quad \frac{c}{d} = 1 + \frac{e}{d} = 1 + \frac{a}{b} \tag{2.1}$$

und daraus

$$\sqrt{3} = \frac{a}{b} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{a}{b}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\sqrt{3}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\sqrt{3}}}}} = [1; \overline{1,2}]\,,$$

wobei der Querstrich die Periode bezeichnet: $[1;\overline{1,2}] = [1;1,2,1,2,1,2,\dots]$.

Sehen wir uns die entsprechende Figur für $\sqrt{2}$ an:



Auch hier wird zunächst $\sqrt{2}$ konstruiert, indem die Diagonale des Einheitsquadrates in die Horizontale gedreht wird. Auf den ersten Blick sieht das linke Bild sehr ähnlich aus wie das von $\sqrt{3}$, nur dass $c = a - b$ kleiner ist und daher zwei Quadrate mit Kantenlänge c in das Rechteck passen. Aber es gibt einen qualitativen Unterschied: Nicht nur das Rechteck oben rechts mit Kantenlängen e und d ist ähnlich zum Ausgangsrechteck, sondern bereits das (um 90 Grad gedrehte) Rechteck mit Kantenlängen $b - c$ und c. Das sieht man am besten nach einer Drehung um 90 Grad (rechtes Bild); dann haben die Diagonalen beider Rechtecke die gleiche Richtung; das Seitenverhältnis muss also das gleiche sein wie beim Ausgangsrechteck. In der Tat ist für $x = a/b$

$$b - c \;=\; b - (a-b) = 2b - a$$

$$\frac{b-c}{c} \quad = \quad \frac{2b-a}{a-b} = \frac{2-x}{x-1}\,,$$

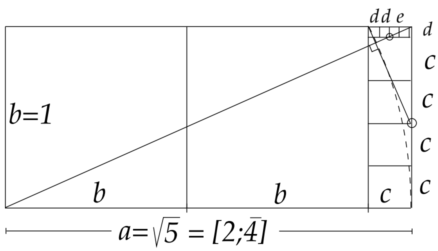
also $x = \frac{b-c}{c} = \frac{2-x}{x-1} \iff (x-1)x = 2-x \iff x^2 = 2$. Mit

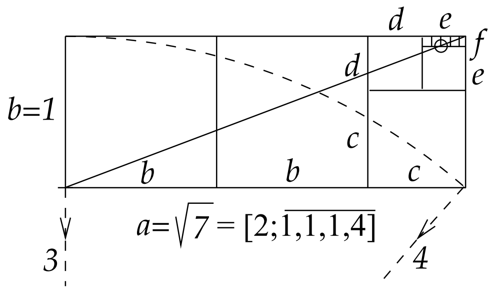
$$\frac{a}{b} = \frac{b+c}{b} = 1 + \frac{c}{b} \quad \text{sowie} \quad \frac{b}{c} = 1 + \frac{b-c}{c} = 1 + \frac{a}{b}$$

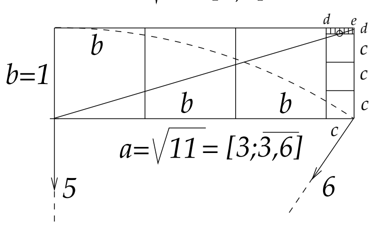
folgt die Kettenbruchentwicklung

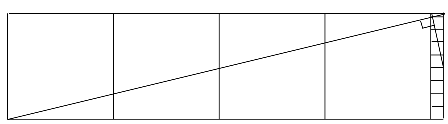
$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} = 1 + \frac{c}{b} = 1 + \frac{1}{1+\frac{a}{b}} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{1+1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}} = [1;\overline{2}]\,.$$

Hier noch die Figuren für $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$ und $\sqrt{17}$:





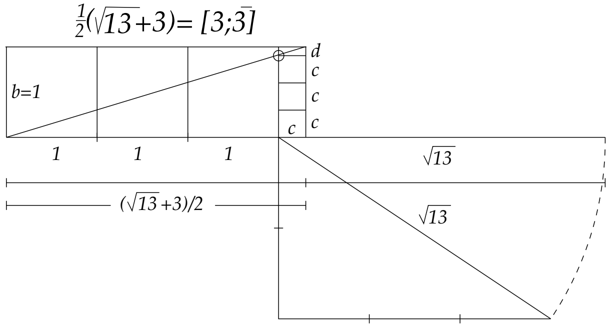




$\sqrt{17} = [4;\bar{8}]$

Der Fall $\sqrt{13}$ mit der Kettenbruchentwicklung[4] $[3;\overline{1,1,1,1,6}]$ liegt etwas anders. Wegen der langen Periode und der großen Zahl 6 am Periodenende wäre er noch viel schwieriger zu zeichnen als $\sqrt{7}$. Aber es gibt eine einfachere Möglichkeit, wenn man etwas allgemeinere quadratische Gleichungen zulässt. Die einfachsten periodischen Kettenbrüche haben Periode 1 und sind daher von der Gestalt $x = k + \frac{1}{k+\frac{1}{k\ldots}} = k + \frac{1}{x}$; ihre Gleichung $x = k + \frac{1}{x}$ führt auf die quadratische Gleichung $x^2 = kx + 1$, also $x = \frac{1}{2}(k + \sqrt{4+k^2})$. Für $k = 1$ erhalten wir den Goldenen Schnitt $x = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$, für $k = 3$ ist $x = \frac{1}{2}(3+\sqrt{13})$.

[4]Vgl. http://mathworld.wolfram.com/PeriodicContinuedFraction.html .



Warum hörte Theodoros bei $\sqrt{17}$ auf? Weil $\sqrt{19}$ die Kettenbruchentwicklung $[4;\overline{2,1,3,1,2,8}]$ hat, die mit ihren 8 winzigen Quadraten am Ende einer langen Periode nicht sauber zu zeichnen ist.

Aber gibt es zu jeder Quadratwurzel eine periodische Kettenbruchentwicklung? Das hat erst *Lagrange*[5] über 2000 Jahre später gezeigt. Ein Beweis ist heute, da wir gelernt haben, in Variablen und ihren Substitutionen[6] zu denken, nicht schwer.

Rechnen wir dazu noch einmal den Fall $\sqrt{3}$ (Seite 14) „in Zeitlupe". Wir setzen $x_1 = \frac{a}{b}$, $x_2 = \frac{c}{b}$, $x_3 = \frac{b}{c}$, $x_4 = \frac{d}{c}$, $x_5 = \frac{c}{d}$, $x_6 = \frac{e}{d}$. Mit (2.1) folgt

$$x_1 = x_2+1, \quad x_2 = 1/x_3, \quad x_3 = x_4+1, \quad x_4 = 1/x_5, \quad x_5 = x_6+1. \tag{2.2}$$

Aus der Ausgangsgleichung $x_1^2 = 3$ erhalten wir durch die Substitutionen (2.2) der Reihe nach quadratische Gleichungen für $x_2, \ldots, x_6$. Für die Kehrwerte muss man beachten, dass a und c beim Übergang von x zu $\tilde{x} = 1/x$ ihre Rollen tauschen,

$$ax^2 - bx = c \iff a/\tilde{x}^2 - b/\tilde{x} = c \iff a - b\tilde{x} = c\tilde{x}^2. \tag{2.3}$$

Somit ergibt sich:

$$\begin{array}{ccc}
 & x_1^2 & = & 3 \\
\overset{(2.2)}{\Rightarrow} & (x_2+1)^2 & = & 3 \\
\Rightarrow & x_2^2 + 2x_2 & = & 2 \\
\overset{(2.3)}{\Rightarrow} & 1 + 2x_3 & = & 2x_3^2 \\
\overset{(2.2)}{\Rightarrow} & 1 + 2(x_4+1) & = & 2(x_4+1)^2 \\
\Rightarrow & 1 - 2x_4 & = & 2x_4^2 \\
\overset{(2.3)}{\Rightarrow} & x_5^2 - 2x_5 & = & 2 \\
\overset{(2.2)}{\Rightarrow} & (x_6+1)^2 - 2(x_6+1) & = & 2 \\
\Rightarrow & x_6^2 & = & 3.
\end{array}$$

[5]Joseph-Louis Lagrange, 1736 (Turin) - 1813 (Paris): Addition au mémoire sur la résolution des équations numériques (1770).

[6]Bei einer *Substitution* wird die Variable x in einer Gleichung durch eine neue Variable $\tilde{x}$ ausgedrückt, $x = f(\tilde{x})$, und in der Gleichung wird x überall durch $f(\tilde{x})$ ersetzt; damit erhalten wir eine neue Gleichung in der Variablen $\tilde{x}$.

Das letzte Verhältnis $x_6 = e/d$ ist also die positive Lösung derselben quadratischen Gleichung wie das erste $x_1 = a/b$, also gilt $x_6 = x_1 = \sqrt{3}$, was wir ja schon auf Seite 15 gesehen haben. Ab jetzt wiederholt sich alles.

Um dieses Verfahren allgemein zu verstehen, betrachten wir nicht nur Quadratwurzeln, d.h. Lösungen von Gleichungen der Form $x^2 = c$, sondern Lösungen allgemeinerer quadratischer Gleichungen

$$ax^2 - bx = c \tag{2.4}$$

mit ganzzahligen Koeffizienten a, b, c. Die beiden Lösungen[7]

$$x_\pm = \frac{1}{2a}(b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}) \tag{2.5}$$

haben unterschiedliche Vorzeichen genau dann, wenn $ac > 0$, was wir von nun an voraussetzen wollen. Auf die Variable x wenden wir abwechselnd die beiden folgenden Substitutionen an:[8]

(A) die Verschiebung $x = \tilde{x} + k$ mit $k = [x_+]$,[9]
(B) die Inversion $x = 1/\tilde{x}$.

Bei diesen Substitutionen ändern sich die Koeffizienten; die neue Variable $\tilde{x}$ erfüllt eine neue Gleichung

$$\tilde{a}\tilde{x}^2 - \tilde{b}\tilde{x} = \tilde{c}.$$

Die neuen Koeffizienten $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ sind wieder ganze Zahlen, und die beiden Lösungen $\tilde{x}_\pm$ haben immer noch unterschiedliche Vorzeichen. Besonders wichtig ist, dass die *Diskriminante*

$$d = b^2 + 4ac \tag{2.6}$$

erhalten bleibt, $\tilde{d} = d$. Für die Verschiebung (A) ist das klar, weil $\tilde{a} = a$ und die Differenz der Lösungen bei Verschiebungen erhalten bleibt, also auch die Diskriminante $d \overset{(2.5)}{=} a(x_+ - x_-)$ (siehe auch Übung 2.9). Für die Inversion (B) gilt $\tilde{a} = c$, $\tilde{c} = a$ und $\tilde{b} = -b$, also wiederum $\tilde{d} = d$ nach (2.6). Nun gibt es aber für gegebenes d nur eine begrenzte Anzahl von Tripeln ganzer Zahlen (a, b, c) mit $ac > 0$ und $d = b^2 + 4ac$, da sowohl b^2 als auch $4ac$ zwischen 0 und d liegen müssen. Die obige Kette von Transformationen A-B-A-B-A-B ... muss deshalb nach endlich vielen Schritten auf eine Gleichung führen, die in der Kette schon einmal vorher aufgetreten ist; von da an wiederholt sich alles. Die Lösungen x der Gleichungen (2.4) mit ganzzahligen Koeffizienten a, b, c und $ac > 0$ haben also eine periodische Wechselwegnahme oder Kettenbruchentwicklung. Stellt man diese graphisch dar durch Ausfüllen eines Rechtecks mit Quadraten, so erhält man eine selbstähnliche Figur.

[7] $ax^2 - bx = c \iff x^2 - \frac{b}{a}x = \frac{c}{a} \iff x^2 - \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 = \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \iff (x - \frac{b}{2a})^2 = \frac{1}{4a^2}(b^2 + 4ac)$.

[8] Es handelt sich um gebrochen-lineare Transformationen (Möbius-Transformationen), benannt nach August Ferdinand Möbius, 1790 - 1868 (Leipzig). Sie bilden (mit der Komposition als Verknüpfung) eine *Gruppe*.

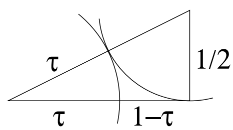
[9] Für jede reelle Zahl x bezeichnet $[x]$ die größte ganze Zahl $\leq x$.

Die Methode von Theodoros beruht also in der Tat auf einem allgemeinen Verfahren, das für alle Quadratwurzeln und weit darüber hinaus Gültigkeit hat.

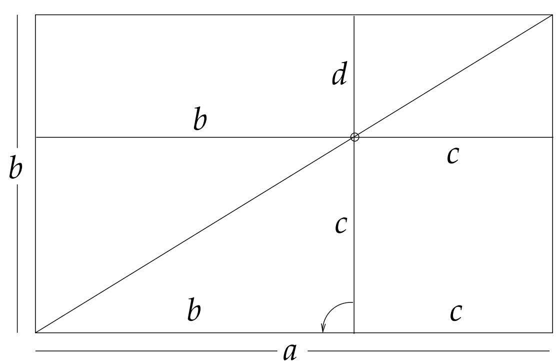
Übungen

2.1. Konstruierbarkeit von Quadratwurzeln: Man zeige, dass jede ungerade Zahl Differenz von zwei benachbarten Quadratzahlen ist. Berechnen Sie dazu $(k+1)^2 - k^2$ nach der Formel $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. Wieso ist damit $\sqrt{n}$ für jede natürliche Zahl n konstruierbar? (Hinweis: Satz von Pythagoras)

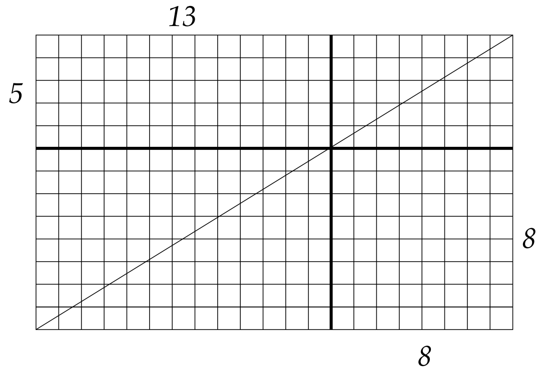
2.2. Goldenes Rechteck (1): Man konstruiere das Rechteck für den Goldenen Schnitt $a/b = \tau := \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$. Der Goldene Schnitt kann zum Beispiel wie folgt konstruiert werden:



2.3. Goldenes Rechteck (2): Zeigen Sie, dass der Goldene Schnitt, das Verhältnis a/b mit $(a+b)/a = a/b$, durch die Beziehung $a/b = b/c = c/d$ in der folgenden Figur (aufgezeigt durch die gemeinsame Diagonale der drei Rechtecke) gekennzeichnet wird:



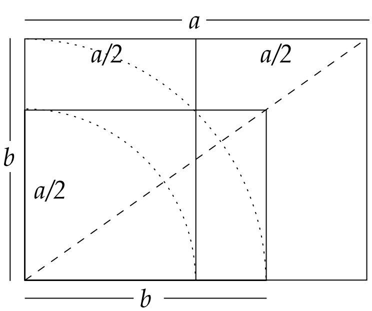
2.4. Ein Kästchen verschwindet! Warum beunruhigt, ja verstört uns die nachfolgende Zeichnung? Wie ist sie zu erklären?

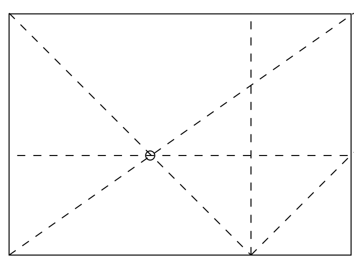


2.5. Papierformate: Das A-Format (A3, A4, A5, ...) ist folgendermaßen definiert:

- Das Format Ak für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist ein Rechteck mit Kantenlängen $a > b$.
- A$(k+1)$ entsteht durch Halbieren der längeren Kante a von Ak.
- A$(k+1)$ ist zu Ak *ähnlich*, d.h. die Kantenverhältnisse für Ak und A$(k+1)$ sind gleich, $a/b = b/(a/2)$.
- Das Rechteck A0 hat einen Quadratmeter Flächeninhalt.

a) Zeigen Sie rechnerisch $a/b = \sqrt{2}$. Können Sie das an der linken Zeichnung einfach ablesen?

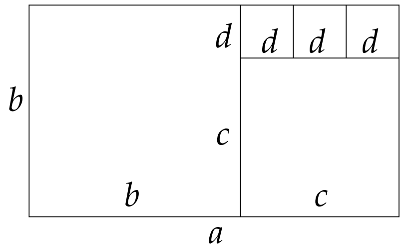


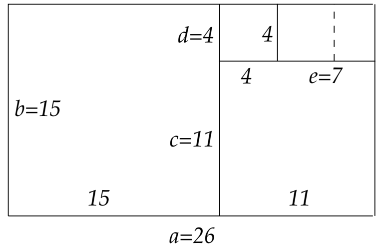


b) Verifizieren Sie die Kettenbruchentwicklung für $\sqrt{2}$ durch Knicken eines A4-Blattes (rechte Zeichnung, vgl. die rechte Figur für $\sqrt{2}$ auf Seite 15)!

2.6. Beweis der Selbstähnlichkeit: Man mache sich den Beweis der Selbstähnlichkeit des Rechtecks für $\sqrt{3}$ klar und übertrage ihn auf die Rechtecke für $\sqrt{5}$ und $\sqrt{11}$.

2.7. $\sqrt{3}$, leicht gemogelt: Wenn man in der Figur für $\sqrt{3}$ auf Seite 14 ein bisschen mogelt und $e = 2d$ setzt, entsteht folgendes Bild links:





a) Erklären Sie mit dem linken Bild, warum 7/4 eine gute Approximation von $\sqrt{3}$ ist (in der Tat ist $(7/4)^2 = 49/16 = 3 + 1/16$).

b) So kann man iterativ immer bessere Approximationen bekommen. Im rechten Bild ist $e/d = 7/4$ eingesetzt (Bezeichnung wie in der Figur auf Seite 14), man erhält $a/b = 26/15$ (in der Tat ist $(26/15)^2 = 676/225 = 3+1/225$).

c) Ersetzen Sie nun die Längen 7 und 4 in der rechten Figur durch p und q mit $p^2 - 3q^2 = 1$ (also $(p/q)^2 = 3 + 1/q^2$) und zeigen Sie $a/b = \tilde{p}/\tilde{q}$ mit $\tilde{p} = 2p+3q$, $\tilde{q} = p+2q$. Folgern Sie $\tilde{p}^2-3\tilde{q}^2 = 1$ und damit $(\tilde{p}/\tilde{q})^2 = 3+1/\tilde{q}^2$.

2.8. Einfache Perioden: Was ist die nächste halbe Wurzel (vgl. die Konstruktion von $\sqrt{13}$ auf Seite 16), die man mit einem Kettenbruch der Periodenlänge Eins darstellen kann?

2.9. Variablenverschiebung: Berechnen Sie die Koeffizienten der Gleichung (2.4) nach der Variablensubstitution $x = \tilde{x} + k$ für eine beliebige ganze Zahl k und zeigen Sie, dass die Diskriminante d erhalten bleibt: Sind $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ die Koeffizienten der Gleichung für $\tilde{x}$, so gilt $b^2 + 4ac = \tilde{b}^2 + 4\tilde{a}\tilde{c}$.

2.10. Anzahl der Tripel (a, b, c)**:** In der Gleichung $x^2 = 3$ ist $a_o = 1$, $b_o = 0$ und $c_o = 3$, also $d = b_o^2 + 4a_oc_o = 12$. Finden Sie alle ganzzahligen Tripel (a, b, c) mit $a, c > 0$ und $b^2 + 4ac = 12$. Welche von ihnen kommen in dem beschriebenen Verfahren vor?

2.11. Verschiedene Perioden bei gleicher Diskriminante: Quadratische Gleichungen mit der gleichen Diskriminante d müssen nicht immer Lösungen mit der gleichen Kettenbruchperiode haben. Betrachten Sie dazu das folgende Beispiel: Die Gleichungen $x^2 = 15$ sowie $3x^2 = 5$ haben beide die Diskriminante $d = 60$, aber ihre Lösungen haben unterschiedliche Kettenbruch-Perioden, nämlich $[\overline{1, 6}]$ und $[\overline{2, 3}]$.[10] Weisen Sie dies nach, indem Sie für beide Gleichungen die Kettenbruchentwicklungen von x bestimmen.
Anleitung: Wenn $x > 1$, bestimmen Sie zunächst (mit der Lösungsformel) den ganzzahligen Anteil $k = [x]$ von x, setzen $x_1 = x - k$ und substituieren $x = x_1 + k$, um eine Gleichung für x_1 zu erhalten. Nun ist $x_1 < 1$, also

[10] Das Beispiel stammt aus der Zulassungsarbeit von Andreas Stadler: Kettenbruchentwicklungen reell-quadratischer Irrationalzahlen, Augsburg 2013, Seite 61. Die Anzahl unterschiedlicher Kettenbruch-Perioden zum gleichen d ist die *Klassenzahl* von d. Siehe auch https://de.wikipedia.org/wiki/Binäre_quadratische_Form .

$x_2 = 1/x_1 > 1$; die Gleichung von x_2 ergibt sich aus (2.3). Verfahren Sie nun mit x_2 genauso wie vorher mit x. Die so entstehende Folge $x, x_1, x_2, \ldots$ muss irgendwann periodisch werden: Es gibt ein kleinstes k derart, dass die Gleichung von x_k schon einmal bei einem früheren x_{k-p} aufgetreten ist. Danach wiederholt sich alles mit Periodenlänge p.

Springer

http://www.springer.com/978-3-658-17294-7

Sternstunden der Mathematik
Eschenburg, J.-H.
2017, IX, 214 S. 100 Abb., 2 Abb. in Farbe., Softcover
ISBN: 978-3-658-17294-7