

## 2 Problemlösen

Der Forschungsgegenstand der vorliegenden Arbeit sind Problemlöseprozesse von Schülern. Es ist nicht das Ziel, eine vollkommen neue Theorie des Problemlösens zu entwerfen. Vielmehr interessiert die Frage, ob und wie bestehende Theorien des Problemlösens durch den Begriff der Abduktion sinnvoll ergänzt werden können, um so bestehende Ansätze mit dem Begriff der Abduktion in Verbindung zu bringen.

Hierfür soll zunächst der Problembegriff geklärt werden, bevor einige grundlegende Theorien zum Problemlösen vorgestellt werden. Dabei sollen nicht alle existierenden Theorien zum Problemlösen umfassend dargestellt werden, sondern es sollen Beispiele für Problemlösetheorien genannt werden, in denen das Problemlösen als Prozess erklärt wird. Verschiedene Charakteristika des Problemlösens scheinen sich mit Eigenschaften, die mit dem Abduktionsbegriff assoziiert werden können, verbinden zu lassen, wie etwa

- Das Problemlösen als ein Aufstellen und Testen von Hypothesen (siehe Kapitel 2.2 und 2.3),
- Das Problemlösen durch (plötzliche) Einsicht (siehe Kapitel 2.4)
- Und das Problemlösen als erkenntnisgenerierende Arbeitsweise (siehe Kapitel 2.5).

Daher sollen vor allem Problemlösetheorien vorgestellt werden, in denen diese Eigenschaften des Problemlösens besonders hervorgehoben werden. Die Verbindung der Problemlösetheorien zum Abduktionsbegriff soll an späterer Stelle (Kapitel 6) genauer untersucht werden, nachdem der Abduktionsbegriff eingeführt wurde.

In der Mathematikdidaktik wird häufig mit Phasenmodellen des Problemlösens gearbeitet und das Lehren und von Lernen von heuristische Strategien steht häufig im Mittelpunkt. Inwiefern und warum sich die vorliegende Arbeit davon unterscheidet, soll abschließend thematisiert werden.

### 2.1 Begriffliche Klärung

In der Literatur wird das Begriffswort „Problem“ nicht einheitlich verwendet. Im Folgenden sollen daher verschiedene Definitionen mit dem Ziel betrachtet wer-

den, eine Vielfalt an Bestimmungsstücken des Problembegriffs darzustellen, bevor dargelegt wird, in welcher Weise der Problembegriff in dieser Arbeit verwendet werden soll.

Unter einem Problem wird in vielen Definitionen in der Literatur eine Situation verstanden, in der ein Individuum ein Ziel erreichen möchte, ihm dies aber nicht möglich ist. So definiert Duncker (1935) den Problembegriff etwa folgendermaßen: „Ein ‚Problem‘ entsteht z.B. dann, wenn ein Lebewesen ein Ziel hat und nicht ‚weiß‘, wie es dieses erreichen soll“ (S. 1).

Klix (1971) beschreibt dies genauer und unterscheidet, wie viele andere Autoren auch, drei verschiedene Elemente, die zum Problembegriff gehören:

- Anfangssituation,
- Zielzustand,
- „Überführung des Anfangszustandes in den Lösungszustand [gelingt] nicht oder nicht unmittelbar“ (S. 639).

Das dritte Element, also die nicht mögliche Überführung des Anfangszustandes in den Zielzustand, wird von Aebli näher differenziert. Aebli (1981) definiert ein Problem folgendermaßen:

„Ein Problem ist ein Handlungs- oder Operationsplan oder eine vorläufige Wahrnehmung oder Deutung einer Gegebenheit, die bezüglich der Handlungs-, Operations- oder Verstehensabsicht des Problemlösers eine unbefriedigende Struktur hat, wobei dieser auf der einen Seite seinen Plan bzw. seine vorläufige Deutung und auf der anderen Seite das Ziel bewußt realisiert. Das Ungenügen der Struktur kann in ihrer Lückenhaftigkeit, ihrer Widersprüchlichkeit oder in ihrer Kompliziertheit begründet sein.“ (S. 17)

Funke (2003) spricht auch kurz von „Lücken im Handlungsplan [...], der nicht routinemäßig ausgeführt werden kann“ (S. 25).

Um die Situation, in der ein Individuum ein Ziel nicht erreichen kann, zu beschreiben, werden auch bildliche Begriffe wie Hürde, Barriere, Hindernis etc. verwendet. So unterscheidet Dörner (1976) in seiner Definition eines Problems ebenfalls drei verschiedene Komponenten und nennt die Komponente, die zu Klix' dritter Komponente äquivalent ist, „Barriere, die die Transformation von  $s_\alpha$  in  $s_o$  im Moment verhindert“ (S. 10)<sup>8</sup>.

Eine Barriere kann auf unterschiedliche Weise beschrieben werden:

---

<sup>8</sup> Mit  $s_\alpha$  ist der unerwünschte Anfangszustand und mit  $s_o$  der erwünschte Endzustand gemeint (vgl. Dörner 1976, S. 10).

- Subjektiv: Der Problemlöser empfindet eine Aufgabe als schwierig und weiß an einer bestimmten Stelle nicht weiter und fühlt sich ratlos.
- Intersubjektiv: Ein Außenstehender beobachtet einen Problemlöseprozess und stellt fest, dass der die Aufgabe Bearbeitende innehält, an einer anderen Stelle ansetzt als zuvor und eventuell äußert, dass er die Aufgabe als schwer empfindet. Lange (2013) etwa definiert eine Barriere folgendermaßen:

„Eine Stelle im Bearbeitungsprozess, in der rekonstruierbar ist, dass eine Person nichts oder etwas nicht selbstverständlich (im Sinne von nicht sicher, zweifelnd) ausführt und dabei auf nichts in der Aufgabensituation Anwendbares zugreifen möchte bzw. zugreifen kann [...], soll als Barriere [...] definiert werden“ (S. 32).
- „objektiv“: Unabhängig von einer konkreten Bearbeitung einer Aufgabe können Barrieren im Hinblick auf den Inhalt der Aufgabenstellung antizipiert oder anhand einer Vielzahl an Beobachtungen von Problemlöseprozessen rekonstruiert werden, um die folgenden Fragen zu beantworten: Welche Stellen können zu Barrieren werden? Welche Stellen im Problemlöseprozess erweisen sich häufig als schwierig? Dörner (1976) unterscheidet verschiedene Arten von Barrieren, je nachdem, wie klar der Zielzustand definiert ist und ob die Mittel zur Zielerreichung bekannt sind. Ist der Zielzustand klar umrissen und müssen bekannte Operatoren in eine passende Reihenfolge gebracht werden, spricht Dörner von einer Interpolationsbarriere. Sind hingegen bei einem klaren Ziel die Mittel noch zu finden, bzw. zu synthetisieren, handelt es sich um eine Synthesebarriere<sup>9</sup> (vgl. S. 12ff).

Aufgaben im Unterricht können für Schüler Probleme darstellen. Hierbei werden Problemaufgaben oft von Routineaufgaben abgegrenzt. Dörner (1976) definiert beispielsweise als Routineaufgabe „geistige Anforderungen, für deren Bewältigung Methoden bekannt sind“ (S. 10), während es bei einem Problem eine Barriere zu überwinden gelte (vgl. S. 10). Für Schoenfeld (1985) haben Problemlöser bei Routineaufgaben Zugriff auf ein Lösungsschema, während eine mathemati-

---

<sup>9</sup> Für die Erkundungen, die im Rahmen der vorliegenden Arbeit erfolgten, wurden ausschließlich Aufgaben mit klaren Zielvorgaben eingesetzt. Sind die Zielvorgaben in der Aufgabenstellung nicht klar beschrieben, spricht Dörner (1976) von einer dialektischen Barriere, wenn die Mittel zur Zielerreichung bekannt sind, und von einer dialektischen und gleichzeitig synthetischen Barriere, wenn die Mittel zur Zielerreichung nicht bekannt sind (vgl. S. 14).

sche Problemaufgabe für den Problemlöser schwierig sei und zwar, weil er intellektuell und nicht nur rechnerisch vor einer Barriere stehe (vgl. S. 74).

Schoenfeld (1985) betont auch, dass es vom Individuum und nicht von der Aufgabenstellung an sich abhängt, ob eine Aufgabe ein Problem sei oder eine Routineaufgabe:

„Being a ‚problem‘ is not a property inherent in a mathematical task. Rather, it is a particular relationship between the individual and the task that makes the task a problem for that person” (S. 74).

Unter der Berücksichtigung der genannten Aspekte soll in der vorliegenden Arbeit unter einem Problem Folgendes verstanden werden:

- Eine Aufgabe wird als Problem bezeichnet, wenn bei der Analyse des Bearbeitungsprozesses deutlich wird, dass der Schüler die Aufgabe als schwierig empfindet und er selber einen Lösungsweg für die Aufgabe finden muss.
- Eine Aufgabe kann für den einen Schüler ein Problem darstellen und für den anderen nicht. Für jeden individuellen Bearbeitungsprozess soll anhand von Schüleräußerungen überprüft werden, ob es sich um eine Problem- oder Routineaufgabe handelt. Dabei kann es Fälle geben, in denen diese Frage nicht eindeutig beantwortet werden kann.
- Schüleräußerungen, die indizieren, dass ein Problem vorliegt, können
  - explizit ausdrücken, dass die Aufgabe als schwierig empfunden wird.
  - Ausdrücke oder Ausrufe sein, die auf eine Schwierigkeit hindeuten.
  - retrospektiv die empfundene Schwierigkeit bei der Bearbeitung reflektieren.
- Darüber hinaus können auch längere Pausen darauf hindeuten, dass die Aufgabe einem Schüler Schwierigkeiten bereitet.

Nachdem nun der Problembegriff kurz erläutert wurde, sollen im Folgenden Theorien und Ansätze sowohl aus der Psychologie, als auch aus der Mathematikdidaktik vorgestellt werden, die erklären, wie Probleme gelöst werden, wie also die Schwierigkeit oder Barriere überwunden wird.

## 2.2 Psychologische Theorien zum Problemlösen

Seit den Anfängen der psychologischen Forschung spielt das Problemlösen eine wichtige Rolle. Zu jeder Zeit der relativ jungen Geschichte der Psychologie wurde das Problemlösen im Lichte des jeweils vorherrschenden Paradigmas betrachtet. Da in dieser Arbeit Problemlöseprozesse im Fokus stehen, sollen im Folgenden Theorien aus verschiedenen psychologischen Paradigmen daraufhin untersucht werden, wie sie die folgenden Fragen beantworten:

- Was ist Problemlösen?
- Was charakterisiert Problemlöseprozesse?

### 2.2.1 Assoziationismus/Behaviorismus

Der Assoziationismus bildet die Grundlage behavioristischer Theorien. Seine Grundannahme ist, dass „sich durch wiederholte Assoziationsbildungen sog. Reaktionshierarchien ergeben, in denen die Verknüpfungen von bestimmten Reizen mit möglichen Reaktionen so geordnet wurden, dass an der Spitze einer Reaktionshierarchie die jeweils wahrscheinlichste Reaktion auf einen Reiz stand, die nächstwahrscheinliche Reaktion auf dem zweiten Platz folgte usw.“ (Funke 2003, S. 44). Auf bestimmte Situationen wird demnach am wahrscheinlichsten mit derjenigen Reaktion geantwortet, die in der Reaktionshierarchie ganz oben steht.

Ein Problem entsteht dann, wenn die „an der Spitze der Reaktionshierarchie stehende Antwort nicht zum Ziel führt“ (Funke 2003, S. 44). In diesem Fall wird die „Reaktionshierarchie von oben bis unten [abgesucht] („trial-and-error“), bis der gewünschte Erfolg eintritt“ (S. 44). Hierbei wird die Reaktionshierarchie möglicherweise umgeschichtet.

Löst beispielsweise ein Schüler eine mathematische Aufgabe, kann es sein, dass er zunächst einen bestimmten Rechenweg mit der Aufgabenstellung assoziiert und versucht, diesen anzuwenden. Kommt er dabei nicht zum Erfolg, würde er nach der Annahme des Assoziationismus versuchen, einen anderen Rechenweg anzuwenden, der in der Reaktionshierarchie an nächster Stelle steht. Auf diese Weise würde er alle Rechenwege ausprobieren, bis er einen passenden findet, dessen Position in der Reaktionshierarchie daraufhin steigen würde.

Wie in der Definition des Problemlösens des Assoziationismus bereits angedeutet wird, umfassen die Theorien des Assoziationismus auch Theorien zum

Probieren, bzw. zum Trial-and-Error-Verfahren, was in Kapitel 3 anhand der Arbeiten von Thorndike und Campbell näher erläutert werden soll.

### 2.2.2 Gestaltpsychologie

Die Ursprünge der Problemlöseforschung in der Denkpsychologie liegen zu einem großen Teil in den Arbeiten der Gestaltpsychologie des frühen 20. Jahrhunderts. Motiviert waren die Gestaltpsychologen zum einen durch die Ablehnung des damals weit verbreiteten Assoziationismus und zum anderen durch die Schilderungen von eigenen Problemlöseprozessen durch Wissenschaftler.

Gestaltpsychologische Ideen basieren auf einer Analogie zu bestimmten „physikalischen Systemen, die ein dynamisches Gleichgewicht aufwiesen, d.h. stabile Zustände, die aus der Interaktion von Prozessen resultieren. Beispiele dafür sind bestimmte elektrische und magnetische Phänomene, aber auch Flammen oder Seifenblasen“ (Ohlsson 1984, S. 74).

Entsprechend dieser grundlegenden Ideen lassen sich bestimmte Grundannahmen der Gestaltpsychologie formulieren (vgl. Ohlsson 1984, S. 67f):

- Jede Situation hat eine Struktur, die durch verschiedene Beziehungen in der Situation definiert ist und die gesamte Situation und nicht etwa nur Teile davon erfasst. Beispiele für solche Strukturen sind Teil-Ganzes-Beziehungen, Vordergrund-Hintergrund-Beziehungen, Zentrum-Peripherie-Beziehungen etc.
- Eine Struktur kann unterschiedlich starken Kräften unterliegen. Eine Situation ist „angespannt“, wenn die in ihr wirkenden Kräfte unausgeglichene sind. Die Orte, an denen unausgeglichene Kräfte angreifen, nennen sich Lücken oder Konfliktregionen.
- Umstrukturierung ist eine Veränderung, die die strukturellen Beziehungen in einer Situation mit der Folge beeinflusst, dass entweder die Interaktion der Kräfte sich verändert oder Lücken geschlossen werden.

Auf das Problemlösen bezogen bedeutet dies, dass Probleme Situationen sind, die Lücken zwischen dem Gegebenen und dem Gewünschten aufweisen. Um ein Problem zu lösen, muss die Situation schrittweise umstrukturiert werden, bis die Lücke geschlossen ist. Eine derartige Veränderung der Problemrepräsentation deuten Gestaltpsychologen als Herstellung einer „guten Gestalt“. Auf das Problemlösen übertragen kann man ein Problem als „defekte Gestalt“ deuten, „die

durch eine geeignete Transformation in eine gute Gestalt zu überführen ist“ (Funke 2003, S. 46).

Ein Gestaltpsychologe, der sich besonders intensiv mit dem Problemlösen beschäftigte, war Duncker (1935). Er versuchte, Begriffe der Gestaltpsychologie für die Denkpsychologie nutzbar zu machen. Dabei betrachtete er im Gegensatz zu anderen Gestaltpsychologen nicht nur plötzliche Einsichten, sondern auch schrittweise Lösungsannäherungen.

Um die Wirksamkeit eines Lösungsvorschlags zu beschreiben, nutzt Duncker (1935) den Begriff „Funktionalwert“. Er beschreibt den Funktionalwert als eine Eigenschaft eines Lösungsvorschlags und zwar als das „Prinzip, [...] worauf es ankommt“ (S. 6). Ein Lösungsvorschlag kann ein bestimmtes Prinzip verkörpern, welches zum Lösen des Problems verhilft<sup>10</sup>.

Knoblich und Öllinger (2006) beschreiben Duncckers Konzept des Funktionalwerts in den Worten der heutigen Kognitionspsychologie: „Was [Duncker] als ‚allgemeinen, nicht konkreten, Funktionalwert einer Lösung‘ charakterisiert, wird inzwischen als Repräsentation des Ziels oder eines Teilziels bezeichnet.“ (S. 25). Dies verdeutlicht die Rolle des Ziels bei der Lösungsfindung: Ein Lösungsvorschlag wird auf seine Wirksamkeit bezüglich des zu erreichenden Ziels überprüft und nicht einfach im blinden Versuch-Irrtum-Verfahren gewählt. Ähnliches zeigt sich etwa beim zielgerichteten Probieren (siehe Kapitel 3) oder bei der Mittel-Ziel-Analyse (siehe Kapitel 2.2.3).

Problemlöseprozesse zeichnen sich nach Duncker (1935) weiterhin durch Prozesse der „Umstrukturierung“ aus, mit denen eine Veränderung der psychologischen Gesamtstruktur oder von Teilen dieser gemeint ist:

„Jede Lösung besteht in irgendeiner Veränderung der gegebenen Situation. Dabei verändert sich nicht nur dieses oder jenes an der Situation, d.h. es geschehen

---

<sup>10</sup> Ein Beispiel sei im Folgenden vorgestellt: Duncker untersuchte unter anderem verschiedene Lösungsversuche des sogenannten Bestrahlungsproblems, bei dem ein Verfahren gefunden werden sollte, ein nicht operierbares Geschwülst durch Bestrahlung zu entfernen, wobei jedoch das angrenzende gesunde Gewebe möglichst wenig zerstört werden sollte. Ein Lösungsvorschlag ist nun, die Speiseröhre zu nutzen, um dort Strahlen hindurchzuleiten:

„Die Vp sagt zwar nichts von Kontaktvermeidung oder freiem Weg. Und doch verdankt die Speiseröhre in diesem Zusammenhang ihren Lösungscharakter keiner anderen Eigenschaft als der, ein gewebebefreier Zugang zum Magen zu sein. Sie fungiert als ‚Verkörperung‘ lediglich dieser einen Eigenschaft (nicht etwa der Eigenschaft, ein Muskelschlauch zu sein [...]). Kurz: ‚freier Weg in den Magen‘ ist – im vorliegenden Problemzusammenhang – das ‚Wodurch‘, der ‚Funktionalwert‘ der Speiseröhre.“ (Dunker 1935, S. 5f)

nicht nur solche Veränderungen, wie man sie bei jeder ganz aufs Praktische gerichteten Beschreibung zu erwähnen hätte, sondern es verändert sich außerdem die psychologische Gesamtstruktur der Situation (bzw. gewisser ausgezeichnete Teilbereiche). Solche Veränderungen nennt man ‚Umstrukturierungen‘.“ (Dunker 1935, S. 34f)

Dabei geht er nicht wie andere Gestaltpsychologen davon aus, dass eine Problemsituation immer schlagartig uminterpretiert werden muss, sondern bei ihm umfasst der Begriff der Umstrukturierung auch eine Neuakzentuierung bestimmter Situationselemente für den Lösungsprozess.

Kommt es zu einer schlagartigen Uminterpretation einer Problemsituation spricht Duncker (1935) auch von einer „totalen Einsicht“, die er von einer „partiellen Einsicht“ angrenzt, bei der die Lösung des Problems durch eine Umstrukturierung nicht direkt wie bei der totalen Einsicht erreicht oder ersichtlich wird. Duncker definiert die „totale Einsicht“ wie folgt:

„Eine Verknüpfung zweier Gegebenheiten a und b heiße ‚total einsichtlich‘, wenn unmittelbar aus a entnommen werden kann, daß, wenn a auch b und genau b gilt.“ (S. 56)

Hierbei meint Duncker mit Gegebenheit a die Problemstellung und mit Gegebenheit b die Lösung des Problems. Die Lösung des Problems b ist, so Duncker, nicht direkt aus der Problemstellung a ersichtlich, weil der Problemlöser zunächst einen unpassenden Blickwinkel auf a eingenommen hat, welcher durch eine Umstrukturierung so geändert werden kann, dass die Lösung des Problems direkt aus der Problemstellung folgt.

Im Gegensatz dazu definiert Duncker (1935) die partielle Einsicht wie folgt:

„‚Partiell einsichtlich‘ heiße eine Verknüpfung, wenn wenigstens gewisse Züge von b aus a entnommen werden können – oder wenigstens durch a vor anderen Denkbarmkeiten ausgezeichnet sind.“ (S. 56)

Eine Umstrukturierung hat in diesem Fall nicht eine Einsicht zur Folge, die die direkte Lösung des Problems ermöglicht. Knoblich und Öllinger (2006) beschreiben diese Form der Einsicht auch als „erfassen, worauf es ankommt“ (S. 31). Duncker (1935) prägte hierfür den Begriff der „abstraktiven Induktion“<sup>11</sup>, womit er die Fähigkeit des Menschen meint, aus Einzelbeobachtungen abstrakte

<sup>11</sup> In der vorliegenden Arbeit soll der Begriff der abstraktiven Induktion nicht genutzt werden, sondern an dieser Stelle lediglich darauf verwiesen werden, dass in der vorliegenden Arbeit der Induktionsbegriff im Peirce’schen Sinne verwendet wird. Dies ist der Tatsache geschuldet, dass das Lernen von Mathematik bei Schülern untersucht wird und hier der Begriff der Abduktion besser geeignet ist, um das Entdecken von Gesetzmäßigkeiten zu beschreiben (s. Kapitel 6)



Gesetzmäßigkeiten über die „konstante Struktur von Variablen“ abzuleiten<sup>12</sup> (S. 75). Wenn ein Problemlöser feststellt, dass er eine solche abstrakte Gesetzmäßigkeit auf eine konkrete, neue Situation anwenden kann, kommt es zu einer „partiellen Einsicht“.

In der Gestaltpsychologie wird Problemlösen als das Herstellen einer guten Gestalt durch Umstrukturierung aufgefasst. Wichtig für eine Umstrukturierung ist der Funktionalwert, bzw. die Repräsentation des Zielzustands. Durch eine Umstrukturierung kann es zu einer totalen oder partiellen Einsicht kommen und das Problem kann entweder sofort gelöst werden oder es kann sich der Lösung angenähert werden.

In Kapitel 6.3.2 soll der Zusammenhang zwischen den Begrifflichkeiten der Gestaltpsychologie und dem Abduktionsbegriff näher untersucht werden.

### 2.2.3 Funktionalismus

Aus Kritik am Behaviorismus und Assoziationismus entstand in den USA in den 1970er und 1980er Jahren der sogenannte Funktionalismus. Während der Behaviorismus es ablehnte, über nicht beobachtbare Prozesse im Individuum zu mutmaßen und aus diesem Grund nur beobachtbares Verhalten untersuchte, kam es beim Paradigmenwechsel hin zum Funktionalismus wieder zu einer Hinwendung zu nicht direkt beobachtbaren Prozessen. Die grundlegende Frage war dabei die nach der Funktionsweise eines Systems.

In der Tradition des Funktionalismus bewegen sich Theorien, die Problemlösen als Informationsverarbeitung beschreiben. Hierbei wird der Mensch bzw. das menschliche Denken als ein System verstanden, das Informationen verarbeitet (vgl. Bourne et al. 1979, S. 8). Dieses System besteht aus verschiedenen Komponenten, deren wichtigsten die folgenden sind:

- Sensorisches Gedächtnis<sup>13</sup>
- Kurzzeit-Gedächtnis<sup>14</sup>

---

<sup>12</sup> Auch Koffka (1935) verwendet den Begriff der abstraktiven Induktion. Allerdings meint er damit eine Einsicht, die nur zu einer teilweisen Lösung eines Problems führt.

<sup>13</sup> Im sensorischen Gedächtnis werden Umweltreize durch verschiedene Sinneskanäle wahrgenommen. Es zeichnet sich durch eine hohe Speicherkapazität und einen sehr schnellen Informationsverlust aus (vgl. Bourne et al. 1979, S. 8). Prozesse der Aufmerksamkeit und Mustererkennung spielen hier eine Rolle.

<sup>14</sup> Im Kurzzeit-Gedächtnis bzw. Arbeitsgedächtnis wird das sensorische Bild in eine besser abspeicherbare Form umgewandelt (Enkodierung). Die Kapazität des Kurzzeit-Gedächtnisses ist vergleichsweise gering. Um Information aus dem Kurzzeit-Gedächtnis langfristig zu speichern, muss diese wiederholt aktiviert werden (rehearsal) (vgl. Bourne et al. 1979, S. 9).

- Langzeit-Gedächtnis<sup>15</sup>

Die verschiedenen Komponenten des informationsverarbeitenden Systems des menschlichen Denkens werden heutzutage sehr intensiv erforscht. Für den Zweck dieser Arbeit reicht allerdings ein grober Überblick.

Im Folgenden sollen ausgewählte funktionalistische Theorien zum Problemlösen vorgestellt werden. Hierbei stehen stets wieder die Fragen im Vordergrund, was Problemlösen ist und wie sich Problemlöseprozesse charakterisieren lassen.

Die Theorie des Problemlösens nach Newell und Simon (1972) stellt wohl eine der grundlegendsten Theorien in der Tradition des Funktionalismus dar. Newell und Simon unterscheiden zwei verschiedene Teilprozesse beim Problemlösen: den Verstehens- und den Suchprozess. Beim Verstehensprozess wird eine interne Repräsentation des Problems erstellt und aus der Problemstellung werden Informationen zu den folgenden Elementen abgeleitet:

- Anfangszustand
- Operatoren zur Änderung eines Zustands
- Zielzustand.

Aus diesen drei Komponenten besteht nach Newell und Simon der Problemraum, der kein gegenständlich existierender Raum ist, sondern eine mentale Repräsentation des Problemlösers.

Das Problemlösen zeichnet sich weiter durch einen Suchprozess aus, bei dem die Lösung eines Problems erzeugt werden soll. Dieser Suchprozess wird vom Verstehensprozess angetrieben. Gesucht wird zum einen nach den Unterschieden zwischen gegebenen Zuständen und dem Zielzustand und zum anderen nach Operatoren, die eine Zustandsänderung herbeiführen können.

Newell und Simon beschreiben mehrere Suchmethoden, von denen eine der wichtigsten die Mittel-Ziel-Analyse ist. Die Mittel-Ziel-Analyse fragt „ganz allgemein nach den Eigenschaften des jeweils angestrebten Ziels und sucht nach Mitteln, die zur Reduktion einer vorliegenden Ist-Soll-Diskrepanz beitragen“ (Funke 2003, S. 63).

---

<sup>15</sup> Das Langzeit-Gedächtnis speichert Informationen dauerhaft ab, sodass sie abrufbar bleiben, auch wenn sie nicht im Bewusstsein aktiv sind. Im Langzeit-Gedächtnis werden verschiedene Arten von Informationen gespeichert, weswegen verschiedene Arten von Gedächtnis unterschieden werden (vgl. Bourne et al. 1979, S. 9f).

Nach Newell und Simon (1972) kann der Problemlöseprozess auch als mehrstufiger Prozess beschrieben werden:

- Schritt 1: Die von außen gegebene Problemformulierung wird übersetzt und es wird eine interne Repräsentation erzeugt.
- Schritt 2: Aus einem Speicher für Lösungsmethoden wird eine der Methoden ausgewählt, die zu Aspekten der Repräsentation eine Passung besitzt.
- Schritt 3: Die Methode wird angewendet.
- Schritt 4: Je nach Endergebnis der Methodenanwendung kann entweder eine andere Methode zur Anwendung gelangen, die interne Repräsentation verändert oder der Lösungsversuch abgebrochen werden.
- Schritt 5: Während der Anwendung kann es zu neuen Problemen kommen, die dann als Unterziele genauso wie das ursprüngliche Problem bearbeitet werden.

Bei der Bearbeitung eines mathematischen Problems durch einen Schüler erfolgt in Schritt 1 eine Mathematisierung der Aufgabenstellung. In Schritt 2 werden Vorerfahrungen aktiviert, die der Schüler mit anderen Aufgaben schon gemacht hat und die ihm vielleicht helfen, das vorliegende Problem zu lösen. Entweder kommt der Schüler in Schritten 3 und 4 zu einer Lösung des Problems oder er stellt fest, dass er einen neuen Lösungsversuch starten muss.

Während die Problemlösetheorie von Newell und Simon das Problemlösen eher als eine Suche in einem Labyrinth beschreibt, bei dem der Weg vom Anfangs- zum Zielzustand durch ein Versuch-Irrtum-Verfahren bestritten wird, spielt bei der Erweiterung der Theorie durch Simon und Lea (1974) auch das Erkennen von Zusammenhängen und das Aufstellen und Testen von Hypothesen eine Rolle. Ähnlich wie schon Newell und Simon (1972) beschreiben Simon und Lea (1974) Problemlösen als Suche in einem Problemraum. Der Problemraum besteht aus verschiedenen Wissenszuständen (knowledge states), zwischen denen sich der Problemlöser durch logisches Schließen (inferences) bewegt. Die Suchrichtung kann dabei durch die Wahl eines Wissenszustands oder durch die Wahl eines bestimmten Operators bestimmt werden.

Nach Simon und Lea (1974) besteht der Problemlöseprozess aus den folgenden Elementen (vgl. S. 109f):

1. Ein Problemraum, dessen Elemente Wissenszustände sind,

2. Generative Prozesse (Operatoren), bei denen ein Wissenszustand in einen neuen Wissenszustand überführt wird,
3. Prozessen des Testens, um einen Wissenszustand mit der Problemstellung oder Wissenszustände untereinander zu vergleichen, und
4. Auswahlprozesse, die auf der Basis der Wissenszustände bestimmen, welche Generatoren und Testverfahren angewandt werden sollen.

Die Suche im Problemraum ist nicht zufällig, weil die Informationen eines Wissenszustands genutzt werden können, um neues Wissen zu generieren. Die Prozesse der Wissensanwendung, um die Suche zu steuern, sind nach Simon und Lea induktive Schlüsse<sup>16</sup>. Sie garantieren somit keine Sicherheit, sondern haben eher dadurch einen heuristischen Wert, dass sie die Suche lenken.

Für Aufgaben, bei denen Regeln gefunden werden sollen, untergliedern Simon und Lea den Problemraum allerdings in zwei Problemräume: einen Regelraum und einen Instanzenraum. Im Regelraum werden Regeln generiert, welche im Instanzenraum an konkreten Fällen überprüft werden (vgl. S. 115f).

Simon und Lea unterscheiden also zwischen dem Problemlösen und dem Regellernen. Eine Problemlöseaufgabe und eine Aufgabe zum Regellernen (rule induction task) unterscheiden sich durch den Prozess des Testens: Beim Problemlösen wird getestet, ob ein erreichter Zwischenzustand dem Zielzustand entspricht. Dabei werden ihrer Annahme nach zunächst keine Regeln gesucht oder angewendet wie bei „rule induction tasks“. Vielmehr besteht ein Problemlöseprozess ihrer Auffassung nach aus der Suche nach passenden Operationen und Zwischenzuständen, um vom Anfangszustand zum Ziel zu gelangen. Bei Aufgaben zum Regellernen hingegen werden Hypothesen aufgestellt und es wird getestet, ob sich eine vermutete Regel auf bestimmte Instanzen anwenden lässt und ob diese Anwendung zum erwarteten Ergebnis führt (vgl. S. 115).

Simon und Lea betonen allerdings auch, dass es Aufgaben gibt, die sich sowohl als Problemlöseaufgabe, als auch als „rule induction task“ interpretieren lassen (vgl. S. 123). Dabei hängt es wohl auch vom Vorgehen des Problemlösers

---

<sup>16</sup> Hier wird der Induktionsbegriff wohl nicht im Peirce'schen Sinne verwendet (s. Kapitel 6), denn die Anwendung von Wissen legt im Peirce'schen Verständnis eher deduktive Schlüsse nahe. Gemeint ist vielleicht, dass die Anwendung von Wissen tentativ geschieht, ohne zu wissen, ob die Suche in Richtung der Lösung geht. Es kann auch sein, dass unsicheres Wissen verwendet wird und somit daraus auch unsichere Schlüsse gezogen werden. Hier bleiben Simon und Lea in ihren Ausführungen leider vage.

ab, ob er eine bestimmte Aufgabe in einem Problemraum oder in zwei Problemräumen, also in einem Regel- und einem Instanzenraum, löst. Sucht der Problemlöser nach Regeln und Gesetzmäßigkeiten, lassen sich ein Regel- und ein Instanzenraum beschreiben. Besteht das Vorgehen des Problemlöser allerdings eher aus der Transformation von Zuständen in andere Zustände, würden Simon und Lea wahrscheinlich eher von nur einem Problemraum ausgehen.

Für diese Arbeit sind vor allem die Übergänge interessant zwischen einem Problemlösen, das sich eher suchend zur passenden Lösung vortastet (zum Beispiel durch unsystematisches Probieren) und einem Problemlösen, bei dem Hypothesen aufgestellt und überprüft, also Regeln entdeckt, überprüft und angewendet werden (zum Beispiel beim Übergang zum eingegrenzten und zielgerichteten Probieren).

Simon und Lea bieten mit ihrem Modell eine Möglichkeit, das Problemlösen vom Entdeckenden Lernen zu unterscheiden und gleichzeitig ihre Gemeinsamkeiten zu beschreiben (siehe dazu auch Kapitel 6). Das Problemlösen kann dabei sowohl als Suche in nur einem Problemraum, als auch als Suche nach Regeln und Gesetzmäßigkeiten in zwei Problemräumen beschrieben werden. Dies mag auch dabei helfen, das wilde Probieren von systematischeren oder mehr zielgerichteten Ansätzen zu unterscheiden (siehe Kapitel 3.1).

### **2.3 Problemlösen als Prozess des Aufstellens und Testens von Hypothesen**

Bisher wurde das Problemlösen als Versuch-Irrtum-Verfahren, als Suche nach einer „guten Gestalt“ bzw. der Suche nach einer passenden Umstrukturierung durch eine partielle oder totale Einsicht und als Suche in einem oder zwei Problemräumen beschrieben. Es gibt sowohl Ansätze, die das Problemlösen eher als ein unsystematisches „Herumprobieren“ charakterisieren, als auch Ansätze, die die Rolle der Einsicht beim Problemlösen betonen. In dieser Arbeit sollen vor allem die Übergänge von unsystematischen Ansätzen zu Ansätzen, die von Einsichten geleitet werden, untersucht werden. Hierbei ist die Frage interessant, wie genau es zu Einsichten kommt. Daher soll im Folgenden das SDDS-Modell von Klahr und Dunbar (1988) genauer betrachtet werden, welches auf der Grundlage der vorgestellten funktionalistischen Theorien zum Problemlösen entwickelt wurde und welches den Erkenntnisgewinn durch das Aufstellen und Prüfen von Hypothesen beim wissenschaftlichen Arbeiten und auch beim Problemlösen beschreibt.

Eine Auseinandersetzung mit diesem Modell erscheint auch deshalb interessant, weil der Erkenntnisgewinn durch das Aufstellen und Testen von Hypothesen ebenfalls durch das Zusammenspiel der logischen Schlussformen beschrieben wird, welches die wesentliche theoretische Grundlage der vorliegenden Arbeit ist (siehe Kapitel 6.2.5).

### 2.3.1 Rahmung beim Problemlösen

Klahr und Dunbar (1988) nutzen das Konzept der Rahmung<sup>17</sup>, um eine Theorie des Aufstellens und Testens von Hypothesen beim wissenschaftlichen Arbeiten und beim Problemlösen zu formulieren. Aber auch Bauersfeld nutzt den Begriff der Rahmung für die Theorie der subjektiven Erfahrungsbereiche (siehe Kapitel 5), die in dieser Arbeit mit dem Problemlösen in Verbindung gebracht werden soll. Daher soll dieser Ansatz im Folgenden kurz erläutert und die Rolle von Rahmungen beim Problemlösen kurz skizziert werden.

Ein Rahmen wird von Minsky (1981) folgendermaßen definiert:

„When one encounters a new situation (or makes a substantial change in one's view of the present problem), one selects from memory a structure called a *frame*. This is a remembered framework to be adapted to fit reality by changing details as necessary. A *frame* is a data-structure for representing a stereotyped situation, like being in a certain kind of living room, or going to a child's birthday party.” (S. 95f)

Ein Rahmen enthält auch Informationen darüber, wie der Rahmen zu nutzen ist, welche Erwartungen in der neuen Situation wahrscheinlich erfüllt werden und wie vorzugehen ist, wenn diese Erwartungen nicht erfüllt werden (vgl. S. 96).

Minsky erläutert weiter, dass man sich einen Rahmen als ein Netzwerk aus Knotenpunkten und Beziehungen denken könne. Die oberen Ebenen seien festgelegt und repräsentieren Informationen, die stets zur angenommenen Rahmung passen. Auf den unteren Ebenen gebe es dagegen Platzhalter, die je nach konkreter Situation gefüllt werden. Dabei könne es je nach Platzhalter bestimmte Vorgaben geben, wie dieser zu füllen sei. Normalerweise seien die Platzhalter zu-

---

<sup>17</sup> Das Konzept der Rahmung ist in der Mathematikdidaktik vor allem durch die Arbeiten von Krummheuer (1981 und 1992) bekannt. Krummheuer befasst sich vor allem mit Rahmungen in interaktiven Prozessen im Mathematikunterricht. Er versteht unter einer Rahmung „standardisierte und routinisierte Situationsdefinitionen, die (a) [...] in einer Situation von einem Individuum in stabilisierter Weise hergestellt werden können [...] und (b) aufgrund ihrer Konventionalität eine hohe funktionale Passung zu den Deutungen anderer Interaktionsteilnehmer erwarten lassen“ (1992, S. 24f).

nächst mit “voreingestellten” Standardwerten gefüllt, die nicht unbedingt zur gegebenen Situation passen müssen, aber leicht durch passendere Informationen ersetzt werden können (vgl. S. 96f).

Wenn ein Schüler eine mathematische Aufgabe bekommt, wird er nach Minsky zunächst nach einem passenden Rahmen suchen, zu dem vielleicht schon passende Lösungswege gehören und den er auf die speziellen Begebenheiten der Aufgabenstellung anpassen kann. Ein solcher Rahmen könnte vielleicht der einer „einschrittigen Rechenaufgabe“ (Simplex) sein, wie er dem Schüler durch eingeleitete Sachaufgaben vielleicht bereits bekannt ist. Dieser Rahmen könnte einen Platz (slot) für die Rechenart enthalten, die ausgeführt werden soll. Je nach der Größe der beiden gegebenen Zahlen und gewissen Signalwörtern im Aufgabentext, die beide andere Plätze belegen, wählt der Schüler eine ihm passend erscheinende Rechenart aus.

Erst wenn dieser Lösungsweg nicht erfolgreich ist, wird der Schüler entweder versuchen den Rahmen anzupassen, indem er seine Platzhalter mit anderen Inhalten füllt, oder er wird versuchen, einen anderen passenderen Rahmen zu finden, der beim Lösen der Aufgabe helfen kann.

### 2.3.2 Das SDDS-Modell

Klahr und Dunbar (1988) bauen das Modell der Dualen Suche (SDDS-Modell) auf der Zwei-Räume-Theorie von Simon und Lea (1974) auf. Zwar beschreiben sie in erster Linie, wie Wissenschaftler zu ihren Erkenntnissen gelangen. Allerdings betonen sie, dass ihr Modell in jedem Kontext angewendet werden kann, in dem Hypothesen aufgestellt und Daten gesammelt werden (vgl. S. 32), weswegen dieser Ansatz auch in der allgemeineren Problemlöseforschung rezipiert wird (siehe etwa Funke 2003). Auch in der Mathematikdidaktik wurde das SDDS-Modell genutzt und erweitert, um das mathematische Experimentieren theoretisch zu beschreiben (Philipp 2013).

Ähnlich wie Simon und Lea (1974) gehen Klahr und Dunbar (1988) von zwei Problemräumen aus und sagen, dass wissenschaftliches Denken die Suche in zwei verwandten Problemräumen erfordere. Diese Problemräume seien ein Experimentierraum und ein Hypothesenraum. Der Experimentierraum bestehe aus allen möglichen Experimenten, die durchgeführt werden könnten, und die Suche im Experimentierraum werde durch die aktuelle Hypothese geleitet. Im Hypothesenraum hingegen seien alle Hypothesen verortet, die während des Entdeckungsprozesses generiert werden (vgl. S. 33). Während Simon und Lea

(1974) zwei Problemräume nach Regeln und Fällen, auf die die Regeln angewendet werden, unterscheiden, werden hier Problemräume danach unterschieden, ob Hypothesen oder die eigentlichen Experimente vorliegen, durch die Hypothesen generiert und getestet werden. Darüberhinausgehend beschreibt Philipp (2013) einen „Strategieraum“ in Erweiterung des SDDS-Modells, der zwischen den anderen beiden Räumen vermittelt, „in dem (sic!) er die Intentionalität des Wechsels präzisiert“ (S. 75). So können etwa Beispiele mit der Intention strukturiert werden, eine Vermutung aufzustellen, oder eine gegebene Vermutung an weiteren Beispielen gesichert oder verworfen werden (vgl. S. 75).

Das Modell der Dualen Suche beschreibt verschiedene Prozesse, die die Suche innerhalb eines Problemraums und zwischen den beiden Problemräumen lenken. Dabei wird das Konzept der Rahmung nach Minsky (1981) herangezogen. Im Modell wird die Rolle näher beleuchtet, die die ursprünglich gewählte Rahmung beim Lösen eines Problems spielt. Außerdem wird erläutert, wie diese Rahmung bei Misserfolgen entweder angepasst oder durch eine alternative Rahmung ersetzt wird.

Am Anfang des Forschungs- oder Problemlöseprozesses werden nach Klahr und Dunbar Hypothesen durch eine Reihe von Operationen aufgestellt, die zu einer Instantiierung einer Rahmung mit bestimmten Standardwerten führen. Nach Klahr und Dunbar können Hypothesen dabei auf mehrere Arten generiert werden. Entweder werden Hypothesen auf der Grundlage des Vorwissens aufgestellt oder durch die Generalisierung vorheriger Experimentiererergebnisse. Zu Beginn der Aufgabenbearbeitung wird der Rahmen aktiviert, der am ehesten mit den Merkmalen der Aufgabenstellung assoziiert wird („evoke frame“). Erst wenn die Lücken des Rahmens durch alle möglichen, zum Rahmen passenden Annahmen gefüllt wurden und immer noch kein Erfolg verzeichnet werden konnte, wird ein neuer Rahmen herangezogen, entweder durch das Aufrufen eines anderen passend erscheinenden Rahmens („evoke frame“) oder das Generieren eines neuen Rahmens („induce frame“). Die auf die ursprüngliche Hypothese folgenden Hypothesen innerhalb der gleichen Rahmung werden durch die Veränderung von Werten an den Platzhalterstellen generiert und neue Rahmungen werden entweder durch eine Suche im Vorwissen oder durch die Verallgemeinerung von experimentellen Ergebnissen generiert (vgl. S. 33ff).

Die oben erwähnte Rahmung „einschrittige Rechnung“ könnte zum Beispiel bei der Hühner-Kaninchen-Aufgabe aktiviert werden, da hier zwei Zahlenanga-



ben im Aufgabentext gegeben sind. Ein Schüler könnte Vermutungen dazu aufstellen, welche Rechenart zu wählen sei. Aufgrund der gegebenen Zahlen könnte der Schüler die Division direkt verwerfen, weil sich 60 nicht ohne Rest durch 22 teilen lässt, und eine andere Rechenart ausprobieren. Allerdings würde er bei dieser Aufgabe unter dieser Rahmung bei keiner Grundrechenart zu einer sinnvoll interpretierbaren Lösung des Problems kommen und müsste nach einer alternativen Rahmung suchen.

Die SDDS-Theorie kann erklären, warum manchmal sehr große Unterschiede zwischen zwei untersuchten Hypothesen beobachtet werden können und manchmal nur sehr kleine: Der Problemlöser arbeitet zunächst mit dem ersten Rahmen, den er mit der Situation assoziiert, und verändert hier zunächst nur die Werte an den Platzhalterstellen („slot values“). Erst wenn sich der Rahmen nicht auf die Situation anwenden lässt und ein neuer Rahmen gefunden werden muss, unterscheiden sich die Hypothesen in einem größeren Ausmaß voneinander. Hierbei kann es auch zum sogenannten Aha-Erlebnis kommen, was im folgenden Teilkapitel näher erläutert werden soll.

Im Einzelfall kann es jedoch schwierig sein, zu entscheiden, welcher Rahmen von einem Problemlöser aktiviert wird und wie ein Rahmen angepasst oder neu generiert wird. Dies mag daran liegen, dass der Begriff der Rahmung ein nicht direkt beobachtbares psychisches Konstrukt darstellt. In den Analysen soll daher nicht versucht werden, das SDDS-Modell auf den Einzelfall anzuwenden.

Dennoch erscheint eine Auseinandersetzung mit dem SDDS-Modell interessant, weil damit das Aufstellen und Testen von Hypothesen beim Problemlösen genauer untersucht wird. Das Zusammenspiel der logischen Schlussformen beschreibt ebenfalls den Erkenntnisgewinn durch das Aufstellen und Testen von Hypothesen. Der genaue Zusammenhang zwischen dem SDDS-Modell und den logischen Schlussformen soll in Kapitel 6.3.2 näher betrachtet werden.

## **2.4 Zum Phänomen der Einsicht beim Problemlösen**

Viele Berichte von Wissenschaftlern auf dem Weg zu wichtigen Erkenntnissen in ihren Theorien beinhalten das plötzliche Auftreten einer Lösungsidee zu einem Problem, mit dem sie sich bereits länger befasst hatten. Bemerkenswert ist dabei, dass die meisten Wissenschaftler zum Zeitpunkt der Entdeckung gar nicht über das Problem nachgedacht hatten. So erzählt der Chemiker Kekulé, dass er zu seiner Entdeckung der Ringstruktur des Benzolrings kam, als er von einer Schlange träumte, die sich in den Schwanz biss. Auch Poincaré berichtet, wie er

zur Lösungsidee zu einem seiner Forschungsprobleme kam, als er gerade auf einer geologischen Exkursion und eigentlich mit den Gedanken nicht beim Problem war. Ein weiteres prominentes Beispiel ist auch Archimedes, dem die Lösung des Problems der Entlarvung eines möglichen Betrugs bei der Herstellung einer Krone aus reinem Gold bei einem Bad kam, bei welchem ihm das Prinzip der Verdrängung von Wasser bewusstgeworden und ihm eine darauf aufbauende Lösungsidee gekommen sein soll. (vgl. Knoblich und Öllinger 2006, S. 1)

Auf Grundlage solcher Erzählungen und auch auf Grundlage seiner eigenen Erfahrungen entwickelte Wallas (1926) das erste Phasenmodell des Problemlösens, das fünf Phasen für einen kreativen Prozess (zu dem auch das Problemlösen zählt) vorsieht:

- |                |  |
|----------------|--|
| - Vorbereitung | intensive Auseinandersetzung mit einem Fachgebiet etwa in Form eines mehrjährigen Studiums |
| - Inkubation   | Pause nach Beschäftigung mit dem Problem   |
| - Einsicht     | plötzliches Finden einer Lösung, auch durch Aha-Effekt beschrieben                         |
| - Bewertung    | Prüfung der gefundenen Lösungsidee   |
| - Ausarbeitung | Anwendung der Lösungsidee zur Lösung des Problems  |

Auch wenn Wallas selber kein Psychologe war, finden sich in diesen Phasen wichtige Elemente wieder, mit denen sich in der Psychologie bis zum heutigen Tag beschäftigt wird, wie etwa der Aha-Effekt. Um Phänomene wie den „Aha-Effekt“ erklären zu können, wurde der Begriff der Einsicht eingeführt und näher untersucht. Mittlerweile ist die Vielfalt an Arbeiten zum Begriff der Einsicht sehr groß und Knoblich und Öllinger (2006) bemerken, dass der Begriff auf sehr verschiedene Weisen genutzt wird (vgl. S. 3). Zur besseren Einordnung der verschiedenen Ansätze arbeiten sie drei Dimensionen heraus, die ihrer Auffassung nach „zur Definition von Einsicht beim Problemlösen beitragen können: die phänomenale Dimension, die Aufgabendimension und die Prozessdimension“ (S. 3).

Das Phänomen der Einsicht lässt sich wie in den Beispielen oben „als das plötzliche, unerwartete und überraschende Erscheinen einer Lösungsidee im bewussten Erleben des Problemlösers“ (S. 3) definieren (phänomenale Dimension). Liegt hingegen der Fokus der Betrachtung mehr auf den zu lösenden Prob-

lemen, können zwei Klassen von Problemen unterschieden werden: „Eine Klasse von Problemen erfordert plötzliche Lösungsideen, während andere Probleme eher schrittweise gelöst werden“ (Aufgabendimension)<sup>18</sup> (S. 3).

Für die Gestaltpsychologie und auch für die neuere Forschung, sowie für die vorliegende Arbeit ist die Betrachtung des Problemlöseprozesses interessant (Prozessdimension). Hierbei wird angenommen, dass „an der Lösung von Einsichtsproblemen andere kognitive Prozesse beteiligt sind als an der Lösung von konventionellen Problemen“. Präziser wird vermutet, dass „Einsichten durch kognitive Prozesse zu Stande kommen, die zu Veränderungen in der Problemrepräsentation führen“ (S. 4). Hierbei ist anzumerken, dass sich Knoblich und Öllinger auf Einsichtsprobleme beziehen, wobei auch vorstellbar ist, dass auch andere Probleme auf diese Weise lösbar sind. Eine andere, aber durchaus ähnliche Erklärung, die sich auch auf Probleme bezieht, die schrittweise gelöst werden können, finden Klahr und Dunbar (1988), die das Phänomen der plötzlichen Einsicht mit dem Finden und der Konstruktion eines neuen Rahmens erklären, etwa durch die Umstrukturierung einer Repräsentation. Werden lediglich innerhalb eines bereits existierenden Rahmens Plätze („slots“) unterschiedlich besetzt, käme es nicht zu solch drastischen Aha-Erlebnissen. Erst wenn ein neuer Rahmen gefunden wird, könnte dies ein Aha-Erlebnis auslösen. Wahrscheinlich wird ein Wechsel zwischen verschiedenen Platz-Besetzungen als nicht so gravierend empfunden wie das Finden einer ganz neuen Rahmung (vgl. S. 43).

Aha-Erlebnisse können also in den Theorien der Gestaltpsychologie durch eine Veränderung der Problemrepräsentation oder in den Theorien des Funktionalismus durch das Finden eines neuen Rahmens auftreten. Auch der Abduktionsbegriff kann mit dem Aha-Effekt in Verbindung gebracht werden, wenn das Finden einer Erklärung, also das Vollziehen eines abduktiven Schlusses, wie ein Aha-Erlebnis empfunden wird.

## 2.5 Inhaltliches Lernen beim Problemlösen

Ein wichtiger Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit ist das Lernen von Mathematik beim Problemlösen. Im Folgenden sollen daher einige psychologische Befunde dargestellt werden, die das inhaltliche Lernen beim Problemlösen be-

---

<sup>18</sup> Die im Rahmen der vorliegenden Arbeit eingesetzten Aufgaben wurden bewusst so gewählt, dass sie schrittweise und über mehr als einen eine plötzliche Einsicht erfordernden Lösungsweg lösbar sind, um Frustrationen bei den Schülern bei ihrer Arbeit an den Aufgaben zu vermeiden.

treffen und sich insbesondere den Einschränkungen und Schwierigkeiten dabei widmen.

Beispielsweise beschäftigt sich Sweller (1988) mit dem Zusammenhang zwischen Problemlösen und Lernen. Er vermutet, dass bestimmte Formen des Problemlösens mit Lernprozessen interferieren (S. 257). Bei Problemaufgaben, bei denen das Ziel vorgegeben ist (von Sweller auch konventionelle Probleme genannt), werde von Problemlösern oft die Mittel-Ziel-Analyse angewendet, um zur Lösung zu gelangen. Dabei würden aber keine neuen Schemata aufgebaut, so Sweller (vgl. S. 283), wobei er Lernen mit dem Aufbau von Schemata gleichsetzt. Anders sei dies bei offeneren Aufgaben ohne Zielvorgabe, bei denen Problemlöser Zusammenhänge zwischen verschiedenen Elementen der Aufgabenstellung durch Exploration entdecken können. Ähnliches vermuteten auch schon Simon und Lea (1974) (siehe Kapitel 2.2.3).

Eine Erklärung hierfür sieht Sweller darin, dass die kognitive Belastung beim Problemlösen so hoch ist, dass der Erwerb von Schemata, also Lernen, behindert werde (vgl. S. 284). Besonders wenn beim Problemlösen komplexe Strategien wie die Mittel-Ziel-Analyse angewendet werden, sei die kognitive Belastung sehr hoch, weil der Problemlöser gleichzeitig den Ausgangszustand, den Zielzustand und die Beziehungen zwischen verschiedenen Problemlöseoperatoren und verschiedene Zwischenziele im Blick behalten müsse (vgl. S. 261). Aus diesem Grund warnt Sweller vor der gängigen Praxis, das wiederholte Lösen verschiedener Probleme als ein Mittel zum Erlernen von Inhalten anzusehen (S. 284). Das Erlernen von Schemata bzw. Inhalten sei besser durch die Bearbeitung offener Problemstellungen, die zum Explorieren und Entdecken anregen, möglich (S. 283f).

In der Problemlöseforschung wird darüber gestritten, ob ein Problemlöser bei Überlastung beim Lösen eines bestimmten Problems entlastende Strategien einsetzt oder ob es zu einer Vereinfachung der subjektiven Repräsentation des Problems käme. Klauer (1993) geht von einer Vereinfachung der subjektiven Repräsentation aus, was im Folgenden näher erläutert wird.

Klauer unterscheidet zwischen deklarativen und prozeduralen Aspekten des Problemlösens. Als deklarativ bezeichnet er alle Prozesse, „die der Konstruktion und dem Aufrechterhalten einer subjektiven Repräsentation des Problems dienen“ (S. 9). Genauer sind damit Prozesse des Enkodierens, Organisierens, Behaltens und Abrufens von Information gemeint, die sich auf Objekte, Eigenschaften,

Operatoren und Problemregeln bezieht (vgl. S. 9). Dagegen bezeichnet er als prozedural „strategische und taktische Prozesse, die das Planen und Suchen im Problemraum ausmachen“ (S. 9).

Die Kernannahme seiner Theorie ist, dass bei Überlastung dadurch Entlastung gesucht werde, dass „Kapazität von den deklarativen Aspekten des Problemlösens [abgezogen]“ (S. 11) werde (Entlastungsannahme). Die deklarative Vereinfachung sei weiterhin „nicht das Ergebnis einer *Strategie* der Informationsreduktion, sondern [trete] ein, weil die Aufmerksamkeit selektiv auf das Verfolgen einer angemessenen und belastenden Problemlösestrategie gerichtet ist. Ausgeblendet werden bei dieser Ausrichtung der Aufmerksamkeit deklarative Aspekte der Aufgabenstellung“ (S. 11; Hervorhebung im Original) (Aufmerksamkeitsannahme).

Klauer geht davon aus, dass „Problemlöser auch unter belastenden Bedingungen von Anfang an bemüht und in der Lage [seien], anspruchsvolle, zielgerichtete, ja belastende Strategien einzusetzen. Dadurch [werde] aber die Aufmerksamkeit so in Anspruch genommen, daß – mehr oder minder unbemerkt – einige Aspekte der Problemrepräsentation ausgeblendet und außerachtgelassen werden“ (S. 44)<sup>19</sup>.

Insgesamt betont Klauer, dass es aufgrund der hohen kognitiven Belastung ein Schema-Erwerb beim Problemlösen nicht selbstverständlich ist und dass es typisch für das Problemlösen ist, bei der Bearbeitung von Problemen nicht sofort alle Aspekte der Problemstellung zu berücksichtigen.

Ähnliches legt Funke (2003) nahe, wenn er davon spricht, dass beim Problemlösen implizites Wissen erworben wird, wenn Personen versuchen, das Ziel durch Mittel-Ziel-Analyse anzusteuern, ohne Hypothesen zu formulieren.

---

<sup>19</sup> Hier sieht Klauer eine Ähnlichkeit zur Planungsheuristik von Newell und Simon (1972), nach der „einige Aspekte der Problemrepräsentation ausgeblendet [werden], was den Problemraum vereinfacht. In dem vereinfachten Problemraum werden dann – mit angemessenen Strategien – Lösungen des Planungsproblems erzielt. Diese Lösungen sind allerdings nur Pläne, die noch in den ursprünglichen Problemraum übertragen werden müssen, was neue, sogenannte Implementationsprobleme aufwerfen [könne]“ (Klauer S. 44).

Beim erfolgreichen Einsatz der Planungsheuristik im Sinne von Newell und Simon handelt es sich nach Klauer allerdings um eine bewusste Abwägung dessen, was für die Problemsituation wesentlich ist und von welchen Aspekten daher abgesehen werden kann. Da er davon ausgeht, dass es sich beim deklarativen Vereinfachen „nicht um eine bewußt eingesetzte Strategie der Informationsreduktion handelt, sondern um eine Folge unbeabsichtigten Informationsverlusts“ (S. 45), sind der Einsatz der Planungsheuristik nach Newell und Simon und das deklarative Vereinfachen nicht dasselbe.

Dadurch würden sie kein Wissen über das System lernen, sondern nur, wie das Ziel zu erreichen ist. Explizites Wissen hingegen werde erworben, wenn Hypothesen generiert und getestet werden. Dies mag erklären, warum manchmal beim Problemlösen etwas Allgemeineres gelernt wird, das über die Aufgabenstellung hinaus nutzbar gemacht werden kann, und sich Erkenntnisse manchmal nur im unmittelbaren Kontext der Aufgabenstellung bewegen (vgl. S. 69).

Wird beim Lösen mathematischer Probleme im Unterricht nur in einem Problemraum gearbeitet, wird ein Schüler wahrscheinlich verschiedene Operatoren auf verschiedene Zustände anwenden und so nach und nach dem Ziel näherkommen und im Fall des Erfolgs schließlich einen Lösungsweg, also etwa eine passende Rechnung oder Abfolge von Rechnungen, finden. Er könnte sich vielleicht später daran erinnern, wie er vorgegangen ist und den Lösungsweg vom Anfangs- zum Zielzustand nochmals beschreiten.

Ein Schüler, der in zwei Problemräumen nach Simon und Lea (1974) arbeitet, wird durch das Aufstellen und Testen von Hypothesen nicht nur zu einer Lösung des Problems kommen, sondern auch explizites Wissen über das Lösungsverfahren und damit vielleicht ein vertieftes Verständnis der Problemsituation und des Lösungsweges erlangen.

Insgesamt scheint das inhaltliche Lernen beim Problemlösen aufgrund der hohen kognitiven Anforderungen schwierig und keinesfalls selbstverständlich zu sein.

## **2.6 Mathematikdidaktische Forschung zum Problemlösen**

In der Mathematikdidaktik werden Problemlöseprozesse oft mit Phasenmodellen beschrieben, die zum großen Teil auf Pólya (1949) zurückgehen. Ein weiterer Forschungsschwerpunkt in der Mathematikdidaktik ist das Lernen und Lehren von heuristischen Strategien. Im Folgenden sollen beide Themen kurz angerissen werden und der Bezug zur vorliegenden Arbeit soll geklärt werden.

### *2.6.1 Das Phasen-Modell des Problemlösens nach Pólya (1949)*

Während es auch in der Psychologie Phasenmodelle des Problemlösens gibt (siehe etwa Wallas (1926) oder Dewey (1933)), spielen diese in der heutigen psychologischen Forschung eine eher untergeordnete Rolle. Anders ist dies in der Mathematikdidaktik, in der vor allem das Phasenmodell des Problemlösens nach Pólya immer noch die Grundlage vieler Arbeiten ist (siehe zum Beispiel

Rott (2013), Gawlick und Lucyga (2015)). Pólya (1949; 2010)<sup>20</sup> nennt vier Phasen zum Suchen und Finden einer Problemlösung:

1. Verstehen der Aufgabe
2. Ausdenken eines Plans
3. Ausführen des Plans
4. Rückschau

Zu jeder Phase formuliert Pólya eine Anzahl an Fragen, die sich der Problemlöser stellen kann, um im Problemlöseprozess weiterzukommen. In der ersten Phase kann sich der Problemlöser beispielsweise fragen, was gesucht und was gegeben ist, um zu einem besseren Verständnis der Aufgabenstellung zu kommen. In der zweiten Phase, in der es darum geht, einen Plan zum Lösen der Aufgabe zu finden, fragt Pólya etwa nach Ähnlichkeiten zu anderen Aufgaben oder nach verwandten Aufgaben. Beim Ausführen des Plans legt Pólya Wert darauf, dass jeder Schritt kontrolliert wird, während ihm bei der Rückschau wichtig ist, die Kontrolle des Ergebnisses und die Übertragung des gefundenen Lösungsweges auf andere Aufgaben durch Fragen anzuregen (vgl. Pólya 2010, Klappentext).

In der Mathematikdidaktik finden sich bei anderen Autoren ähnliche Verlaufsmodelle des Problemlösens, die versuchen, „Prozesse des Entdeckens oder Problemlösens in natürliche Stadien zu gliedern“ (Schreiber 2011, S. 94). Beispiele hierfür sind etwa Schoenfeld (1985) oder Mason et al. (2012).

Während neuere Modelle an Pólyas Stufenmodell dessen Linearität kritisieren und entsprechend nicht-lineare Alternativen bieten, stellt Rott (2013) die grundsätzliche Frage danach, ob sich die in der Theorie beschriebenen Problembearbeitungsprozesse in empirischen Fällen wiederfinden lassen, und stellt ein deskriptives empirisches Modell von Problembearbeitungsprozessen von Schülern auf (vgl. Rott 2013, S. 298), welches sich an den Phasen Pólyas orientiert.

### *2.6.2 Die Rolle von Heuristik beim Problemlösen*

Ein weiterer großer Teil der Forschung zum Problemlösen in der Mathematikdidaktik beschäftigt sich mit heuristischen Strategien. Um diesem Umstand Rechnung zu tragen und die vorliegende Arbeit jedoch gleichzeitig davon abzugrenzen, soll im Folgenden kurz erläutert werden, was unter dem Begriff Heuristik verstanden wird, was heuristische Strategien sind, welche Hoffnungen mit dem

---

<sup>20</sup> In der vorliegenden Arbeit wird eine 2010 erschienene Auflage von Pólyas Arbeit „Schule des Denkens“, welche 1949 erschien, zitiert.

Vermitteln heuristischer Strategien verbunden sind und welche Schwierigkeiten sich bei der Beschäftigung mit heuristischen Strategien ergeben.

Das Ziel der Heuristik ist nach Pólya (2010), „die Methoden und Regeln von Entdeckung und Erfindung zu studieren“ (S. 118f). In der modernen Heuristik<sup>21</sup> soll es nach Pólya darum gehen „den Vorgang des Lösens von Aufgaben zu verstehen, insbesondere *die Denkopoperationen, die bei diesem Prozeß in typischer Weise von Nutzen sind*“ (S. 155; Hervorhebung im Original).

Weiter beschreibt Pólya das heuristische Denken als ein „vorläufiges und plausibles Denken, dessen Zweck es ist, die Lösung der vorliegenden Aufgabe zu entdecken“ (S. 119). Heuristisches Denken beruhe oft auf Induktion<sup>22</sup> oder Analogie.

Schreiber (2011) definiert den Begriff „heuristische Strategien“ als „meist intuitive Techniken und Faustregeln zur Unterstützung der Gedankenarbeit“ (S. 96). Er unterscheidet vier Gruppen von heuristischen Strategien und nennt jeweils drei Beispiele:

- Induktion: „Induktion umfasst alle Arten von Prozeduren, die es gestatten, von den besonderen Eigenschaften des Gegebenen ausgehend zu allgemeineren Einsichten zu gelangen“ (S. 96)  
Beispiele: „Probiere systematisch“, „Arbeite vorwärts“ und „Versuche zu verallgemeinern“ (S. 96)
- Variation: Durch Variation wird „die Problemsituation aufgelockert und auf neue Weise betrachtet“ (S. 97)  
Beispiele: „Variiere das Gegebene“, „Variiere den Allgemeingrad“ und „Variiere die Exaktheitsstufe“ (S. 97)
- Interpretation: „Übertragung von einem System [...] in ein anderes“ (S. 98)  
Beispiele: „Übersetze in einen anderen Kontext“, „Verfertiige ein Modell“ und „Suche ein Analogon“ (S. 98)
- Reduktion: Suche „nach Voraussetzungen oder nach falschen Konsequenzen“ (S. 100)  
Beispiele: „Unterscheide Fälle“, „Arbeite Rückwärts“ und „Argumentiere durch Widerspruch“

<sup>21</sup> Pólya (2010) unterscheidet eine ältere Heuristik, die auf Pappus, Descartes, Leibniz und Bolzano zurückgeht, von einer modernen Heuristik, die diese Gedanken wieder aufgreift und weiter vertieft, wobei sein eigenes Werk einen Anfang darstellen soll (vgl. S. 119).

<sup>22</sup> Zum Induktionsbegriff bei Pólya siehe Kapitel 6.1.2.



Diese Zusammenstellung und Kategorisierung von heuristischen Strategien sei stellvertretend für die große Anzahl an Sammlungen von heuristischen Strategien in der Literatur genannt.

Systeme von heuristische Strategien scheinen einerseits die Folge der Beschreibung und Verallgemeinerung von beobachteten Problemlösestrategien zu sein und andererseits resultieren sie aus Hinweisen, die Wissenschaftlern Problemlösenovizen geben, wie man Probleme am besten zu lösen habe. Die Grenze zwischen normativen Vorgaben und deskriptiver Dokumentation scheint gerade im Bereich der Heuristik eher unklar zu sein.

Wenn man sich über das Lehren des Problemlösens Gedanken macht, scheint es angemessen zu sein, allgemeine Strategien zu vermitteln, die Problemlösern bei vielen Problemstellungen weiterhelfen. Eine Vermittlung eines solchen Handwerkszeugs scheint heute oftmals das Ziel der Schulung im Problemlösen zu sein.

Schoenfeld (1985) formuliert eine ausführliche Begründung, die für die Erforschung von Heuristik und für das Lehren von Problemlösen durch Heuristik spricht. Allerdings schränkt er die Hoffnung, die mit dem Vermitteln heuristischer Strategien verbunden ist, im Anschluss ein. Im Folgenden soll zunächst die Argumentationslogik nach Schoenfeld, die für das Erforschen und Lehren von heuristischen Strategien sprechen, dargestellt werden, bevor danach die Einschränkungen näher beschrieben werden.

Das Erforschen und Lehren heuristischer Strategien macht nach Schoenfeld aufgrund der folgenden Argumentation Sinn:

1. Während seiner schulischen und universitären Laufbahn löst ein Mathematiklernender Tausende Probleme und sammelt über die Jahre hinweg einen gewissen idiosynkratischen Fundus an Strategien. (vgl. S. 70f)
2. Obwohl die Entwicklung von Problemlösestrategien idiosynkratisch ist, ist sie so Schoenfeld auch in gewisser Weise einheitlich. Es bestehe ein erhebliches Maß an Homogenität in den Arten und Weisen, in denen erfahrene Problemlöser neue Probleme angehen. (vgl. S. 71)
3. Mithilfe von Introspektion (Pólyas Methode) oder mithilfe von systematischen Beobachtungen der Problemlöseprozesse von Experten kann es möglich sein, die heuristischen Strategien zu identifizieren und charakterisieren, die erfahrene Problemlöser anwenden. (vgl. S. 71)

4. Wenn erstmal die wichtigsten heuristischen Strategien entdeckt und beschrieben wurden, kann man diese Strategien direkt unterrichten und dabei den Schülern die Mühe ersparen, diese Strategien selber zu entdecken. Wenn dies getan wird, wäre es nicht länger notwendig, dass jeder einzelne Schüler allein durch einen langen und anstrengenden Prozess zu diesen generellen Prinzipien gelangt, wie in Punkt 1 beschrieben. (vgl. S. 71)

Es ist also verständlich, dass mit dem Entdecken, der Beschreibung und dem Lehren von heuristischen Strategien eine große Hoffnung verbunden ist. Allerdings konnte die Praxis nicht die erhofften Erfolge verzeichnen. Die Ergebnisse von 75 empirischen Studien zu Problemlösestrategien zusammenfassend, schreibt Begle (1979), dass die Hoffnung, eine oder wenige Strategien zu finden, die gelehrt werden können, viel zu vereinfachend sei, weil Problemlösestrategien oft sowohl aufgaben- als auch schülerspezifisch seien (vgl. S. 145f).

Die Versuche, heuristische Strategien zu lehren, haben also uneinheitlichen Erfolg gezeigt. Schoenfeld argumentiert, dass solch fragwürdige Ergebnisse durch die Komplexität von heuristischen Strategien entstanden sind und dass die Menge an Wissen, die für die erfolgreiche Implementierung notwendig ist, auf drei Arten unterschätzt wurde (vgl. S.73):

1. Typische Beschreibungen von heuristischen Strategien, zum Beispiel „Untersuchen von Spezialfällen“, sind eigentlich Namen für eine Kategorie nah miteinander verwandter Strategien. (vgl. S. 73)
2. Die Implementierung von heuristischen Strategien ist sehr viel komplexer, als sie zunächst erscheint. Wenn man eine Strategie anwendet, wie zum Beispiel „Erkunden eines einfacheren verwandten Problems“, müssen dafür sechs oder sieben voneinander verschiedene Phasen durchlaufen werden, von denen jede für sich schwierig sein kann und separat gelehrt werden muss. (vgl. S. 73)
3. Obwohl heuristische Strategien als Orientierung für relativ unbekannte Bereiche genutzt werden können, ersetzen sie nicht Fachwissen oder kompensieren nicht das Fehlen von Fachwissen. Sehr oft hängt die erfolgreiche Implementierung von einer heuristischen Strategie sehr stark von einer stabilen Grundlage an bereichsspezifischen Ressourcen ab. Es ist also unrealistisch, zu viel von diesen Strategien zu erwarten. (vgl. S. 73f)

Insgesamt gestaltet sich das Lehren heuristischer Strategien also als ein sehr komplexer Prozess, was ihrer Bereichsspezifität geschuldet zu sein scheint (siehe auch Kapitel 5). Schoenfeld stellt verschiedene heuristische Strategien vor und präzisiert, was sie in unterschiedlichen mathematischen Kontexten jeweils bedeuten, wobei sie an Generalität verlieren und jeweils dem konkreten mathematischen Stoffgebiet angepasst werden und dadurch eine mehr inhaltliche Dimension erhalten. Es ist allerdings fraglich, ob diese Konkretisierung heuristischer Strategien, die nach Schoenfeld eigentlich vorgenommen werden müsste, immer so in Materialien, die für den Einsatz in der Schule vorgesehen sind, realisiert wird und realisierbar ist.

Insgesamt sind der Einsatz und die Vermittlung heuristischer Strategien bereits breit erforscht und werden weiterhin erforscht. Der Fokus der vorliegenden Arbeit liegt allerdings nicht auf der Heuristik beim Problemlösen, sondern auf den Inhalten, die beim Problemlösen gelernt werden können. Es soll nicht der Versuch unternommen werden, die heuristischen Strategien mithilfe der logischen Schlussformen zu fassen. Manche heuristischen Strategien mögen das Vollziehen abduktiver Schlüsse und damit den Erkenntnisgewinn vereinfachen und näherbringen. Dies soll jedoch im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht näher untersucht werden.

## **2.7 Bezug zur eigenen Arbeit**

Bis hierhin wurden verschiedene Theorien und Ansätze zum Problemlösen vorgestellt. Dabei wurde das Problemlösen als Versuch-Irrtum-Verfahren, als Umstrukturierung einer Sichtweise auf ein Problem, als Suche in einem oder mehreren Problemräumen und als Aufstellen und Testen von Hypothesen beschrieben.

Die vorliegende Arbeit soll keinen Versuch darstellen, diese Theorien und Ansätze weiterzuentwickeln oder zu widerlegen. Vielmehr soll hier ein anderer, nämlich philosophischer Zugang zu Problemlöseprozessen gewählt werden, der eine Ergänzung zur vorliegenden Forschung zum Problemlösen sein kann. Viele der diskutierten Phänomene, wie der Aha-Effekt, die Umstrukturierung oder das Lernen beim Problemlösen lassen sich mithilfe des Abduktionsbegriffs beschreiben, wie in dieser Arbeit gezeigt werden soll. In Kapitel 6 wird dafür nach der Erläuterung des Abduktionsbegriffs der Versuch unternommen werden, Bezüge zwischen dem Abduktionsbegriff und den bisher vorgestellten Theorien, Ansät-

zen und Phänomenen herzustellen. Dabei soll deutlich werden, wie der Abduktionsbegriff die vorgestellten Theorien und Ansätze bereichernd ergänzen kann.

An dieser Stelle sei bereits gesagt, dass eine Stärke der Verwendung des logischen Begriffsnetzes darin liegen kann, dass Problemlöseprozesse und ihre Logik bis ins Detail beschrieben und erklärt werden können. Das Prozesshafte des Problemlösens wird bei der logischen Analyse besonders deutlich hervorgekehrt. Während in Phasenmodellen einzelne Phasen des Problemlöseprozesses benannt und kategorisiert werden, sowie typische Verläufe von verschiedenen Phasen herausgearbeitet werden, dient die Abduktionsanalyse weniger der funktionellen Beschreibung und Segmentierung von Problemlöseprozessen, sondern dem Nachvollziehen der Denkllogik des Problemlösers. Wie ist der Problemlöser genau vorgegangen, welche Schlüsse hat er an welchen Stellen gezogen, was für Regeln und Gesetzmäßigkeiten hat er angewendet oder entdeckt und welche Rolle spielen frühere Erkenntnisse aus dem Problemlöseprozess beim Entdecken neuer Zusammenhänge oder beim Überwinden von Barrieren? Charakteristisch ist hier eine starke Orientierung am mathematischen Inhalt des Problems, im Gegensatz zu Ansätzen, die nach allgemeinen Strategien beim Problemlösen suchen.

Problemlösen und Mathematiklernen

Zum Nutzen des Probierens und des Irrtums

Söhling, A.-C.

2017, XV, 382 S. 29 Abb., 6 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-658-17589-4