Vorwort

Die Schönheit der endlichen Gruppentheorie besteht hauptsächlich darin, dass man mit sehr wenigen Definitionen äußerst komplizierte und reichhaltige Strukturen beschreiben kann. Ausgehend von den drei Gruppenaxiomen (Assoziativität, Existenz des neutralen Elements und Existenz inverser Elemente) gelangt man schnell zum Begriff der *einfachen* Gruppe. Die Bezeichnung verdeutlicht, dass dies die kleinsten Bausteine beliebiger endlicher Gruppen sind. Die Struktur einer einfachen Gruppe ist allerdings alles andere als einfach und deren vollständige *Klassifikation* war mit über 10.000 Journal-Seiten eines der größten mathematischen Projekte überhaupt. Insbesondere die Existenz von Ausnahmen wie der *Monstergruppe* mit über 10^{53} Elementen ist keineswegs plausibel. Die später entdeckten Verbindungen zu Modulformen und sogar zur Stringtheorie (*monstrous moonshine*) lassen die Faszination für endliche Gruppen weiter wachsen.

Bevor es den abstrakten Gruppenbegriff gab, haben Mathematiker wie Galois, Jordan und Sylow im 19. Jahrhundert mit Mengen von Permutationen gerechnet, die bezüglich Hintereinanderausführung abgeschlossen sind. Dies war besonders für die Auflösbarkeit von Gleichungen interessant. Da jede abstrakte Gruppe durch Permutationen realisiert werden kann, sind diese klassischen Sätze heute immer noch relevant und interessant. In diesem Buch nehmen wir den gleichen Standpunkt ein und betrachten Gruppen stets als *Permutationsgruppen*, d. h. als Untergruppen von symmetrischen Gruppen. Die Rolle der einfachen Gruppen übernehmen dann die *primitiven* Permutationsgruppen, deren Klassifikation durch den Satz von *Aschbacher-O'Nan-Scott* gegeben ist (oft auch nur Satz von O'Nan-Scott genannt). Unser erstes großes Ziel ist es, diesen Satz unter Verwendung von *Schreiers Vermutung* zu beweisen. Schreiers Vermutung wiederum ist eine Aussage über einfache Gruppen, die bisher nur mit Hilfe der oben erwähnten Klassifikation nachgewiesen werden konnte. Leider kennt man keinen Beweis des Aschbacher-O'Nan-Scott-Satzes, der ohne die Klassifikation auskommt. Die Klasse der primitiven Permutationsgruppen zerfällt nun in fünf unendliche Familien, von denen die Familie der fast einfachen Gruppen am wenigsten verstanden ist. Andererseits kann man die 2-transitiven Permutationsgruppen explizit angeben. Wichtige Beispiele sind durch Burnsides Satz über Permutationsgruppen mit Primzahlgrad gegeben (Kapitel 7). Dies verschiebt den Fokus auf die Untersuchung von primitiven Gruppen, die nicht 2-transitiv sind. Die in Kapitel 8 entwickelte Theorie der Subgrade ist hierfür ein wichtiges Werkzeug. Ein weiteres großes Ziel des Buches ist die Betrachtung von Gruppen ungerader Ordnung. Motiviert durch den Satz von *Feit-Thompson* werden wir in Kapitel 10 beweisen, dass solche Gruppen auflösbar sind, solange die Ordnung kleiner als eine Million ist. Der Beweis ist eine Anwendung der Theorie aus den vorherigen Kapiteln.

Dieses Buch entstand aus einer Vorlesung im Sommersemester 2015 an der Friedrich-Schiller-Universität in Jena und richtet sich an Leser, die bereits eine Vorlesung über Algebra gehört haben. Insbesondere setzen wir Kenntnisse der linearen Algebra, der elementaren Gruppentheorie (Untergruppen, Normalteiler, Faktorgruppen, Auflösbarkeit) sowie etwas Körpertheorie (endliche Körper und deren Automorphismen) voraus. Nichtsdestotrotz werden in einem vorangestellten Grundlagenkapitel die wichtigsten Fakten noch einmal wiederholt. An einigen Stellen benutzen wir grundlegende Begriffe der Graphentheorie. Dies dient aber lediglich dazu, die Anschaulichkeit der Argumente zu erhöhen. Gelegentlich sind Referenzen zum Algebra-Buch von Karpfinger-Meyberg [187] angegeben. Darüber hinaus gibt es eine Vielzahl von Übungsaufgaben, in denen benachbarte Themen besprochen werden. Da manche dieser Aufgaben später benutzt werden, habe ich mich entschieden vollständige Lösungen aller Aufgaben am Ende des Buches bereitzustellen. Unüblicherweise werden in diesem Buch auch allgemeine Bemerkungen nummeriert, um später darauf verweisen zu können. Leser, die der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen nicht trauen, können den Satz von Aschbacher-O'Nan-Scott problemlos überspringen, denn die meisten unserer Ergebnisse sind davon unabhängig. Beispielsweise kommt man in Kapitel 6 ohne die vorherigen zwei Kapitel gut aus. Im Anhang finden sich alternative Beweise zu einigen Sätzen, ergänzende Resultate sowie Quellcodes für die Computeralgebrasysteme GAP [107] und MAGMA [40] (GAP ist übrigens auch ein Bestandteil von SAGE [330]). Ein umfangreiches (aber unvollständiges) Literaturverzeichnis skizziert die historische Entwicklung. Ich habe generell versucht, die wichtigen Ergebnisse möglichst prägnant zu formulieren und den Anteil an technischen Hilfssätzen zu minimieren. Dadurch werden Qualitäten eines Nachschlagewerks angestrebt. An manchen Stellen führt diese Praxis allerdings zu etwas längeren Beweisen.

Es stellt sich die Frage, inwieweit sich dieses Buch von den zahlreichen anderen Gruppentheorie-Büchern unterscheidet. Unter den deutschsprachigen Büchern gibt es seit Wielandts Vorlesungsskript [379] von 1955 (siehe auch dessen Übersetzung [385]) meines Wissens keines, das sich speziell den Permutationsgruppen widmet. Im Englischen gibt es drei „moderne“ Standardwerke von Dixon-Mortimer [83], Cameron [60] und Passman [304]. Der Beweis des Aschbacher-O'Nan-Scott-Satzes findet sich nur im ersten dieser Bücher und Martin Liebeck schreibt in *Mathematical Reviews* darüber: „I must say that I did not find this chapter as clear and well-focused as it might have been [...]“. Unsere Darstellung dieses Beweises folgt daher dem bekannten Artikel von Liebeck-Praeger-Saxl [221]. Auch an anderen Stellen versuchen wir die vorhandene Literatur zu verbessern und zu ergänzen. Beispielsweise ist der übliche Beweis von Jordans Satz über die möglichen Grade einer scharf k-transitiven Permutationsgruppe mit $k \geq 4$ unnötig lang (siehe [304, Theorem 21.5]). Wir verwenden stattdessen einen kürzeren Beweis von Tits [372]. Die wenigsten Büchern behandeln in diesem Zusammenhang auch die Eindeutigkeit der Mathieugruppen M_{11} und M_{12}. Wir geben dafür einen neuen Beweis an, der wieder kürzer als die sonstigen mir bekannten Beweise ist. Ein weiteres Beispiel ist Hölders Satz über die Automorphismengruppe der alternierenden Gruppen. Es ist nicht schwer zu zeigen, dass $\mathrm{Aut}(A_6)$ eine Erweiterung der symmetrischen Gruppe S_6 mit der zyklischen Gruppe C_2 ist. Der Nachweis, dass diese Erweiterung zerfällt wird in den bekannten Büchern allerdings durch eine aufwändige Konstruktion eines äußeren Automorphismus der Ordnung 2 gezeigt. Wir verwenden stattdessen ein kurzes nicht-konstruktives Argument aus Lam-Leep [207]. Ebenso stammt unser Beweis von Burnsides oben erwähntem Satz über Permutationsgruppen mit Primzahlgrad aus einem Artikel von Müller [265]. Dieser Beweis erfordert lediglich elementare Rechnungen im Polynomring und ist vermutlich noch nie in Buchform erschienen. Letzteres gilt auch für einen Satz von Wielandt über die möglichen Primteiler der Ordnung einer primitiven Gruppe (Satz 6.28). Wir präsentieren außerdem einen neuen Beweis eines Satzes von Blichfeldt (Satz 6.30), der ohne Charaktertheorie auskommt. An einigen Stellen des Buches nutzen wir die Gelegenheit, um aktuelle Ergebnisse vorzustellen. Erwähnenswert ist hierbei ein Resultat von Halasi-Podoski [121] über koprime Operationen, aus dem wir in Kapitel 9 eine neue Folgerung ziehen werden. Die Idee von Kapitel 10 ist bereits über hundert Jahre alt, aber deren Umsetzung mittels Computeralgebra ist neu. Im letzten Kapitel illustrieren wir die Nützlichkeit der erarbeiteten Methoden anhand von Rubiks Zauberwürfel. Im Gegensatz zu den (teils populärwissenschaftlichen) bekannten Büchern [327, 99, 13, 177] über den Zauberwürfel ist dieses Kapitel eher an den Mathematiker als an den Puzzlefreund gerichtet. Insbesondere schrecken wir nicht davor zurück Kranzprodukte einzusetzen. Auf diese Weise gelingt es, Themen zu behandeln, die bisher nur auf der Mailingliste *Cube Lovers* veröffentlicht worden sind. Auf die zahlreichen Varianten des Zauberwürfels gehen wir allerdings nicht ein. Weitere Bemerkungen zur Literatur finden sich unmittelbar vor der eigentlichen Literaturliste. Auf der negativen Seite merken wir an, dass es von den üblichen Themen folgende nicht in dieses Buch geschafft haben:

- unendliche Permutationsgruppen
- Permutationscharaktere (nur im Anhang)
- Zentralisatoralgebren/S-Ringe
- Konstruktion der großen Mathieugruppen M_{22}, M_{23} und M_{24}
- Die Einfachheit von $\mathrm{PSL}(n,q)$
- Normalteiler in mehrfach transitiven Gruppen
- Hupperts Klassifikation der auflösbaren, 2-transitiven Permutationsgruppen
- Zassenhaus' Klassifikation der scharf k-transitiven Permutationsgruppen mit $k \in \{2,3\}$
- Higmans Theorie über Permutationsgruppen vom Rang 3
- der Schreier-Sims-Algorithmus
- der Thompson-Wielandt-Satz über Sims' Vermutung
- Steinersysteme

Ich bedanke mich bei Sebastian Uschmann für zahlreiche Fehlerhinweise im ursprünglichen Vorlesungsskript. Weiterer Dank geht an Julian Brough, Burkhard Külshammer und Gunter Malle für viele Verbesserungsvorschläge. Für zukünftige Hinweise jeglicher Art bin ich weiterhin dankbar. Nicht zuletzt habe ich auch der

Springer-Lektorin Ulrike Schmickler-Hirzebruch zu danken. Ohne ihre Aufforderungen wäre das Buch um viele erklärende Passagen ärmer. Die Arbeit an diesem Buch wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft und der Daimler und Benz Stiftung gefördert.

Kaiserslautern, 14. Februar 2017 Benjamin Sambale

http://www.springer.com/978-3-658-17596-2

Endliche Permutationsgruppen
Sambale, B.
2017, XI, 260 S. 9 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-658-17596-2