

2 Zählendes Rechnen im Kontext mathematischer Lernschwierigkeiten

Mathematische Lernschwierigkeiten treten an unterschiedlichen Stellen beim Erwerb mathematischer Kompetenzen auf. Es wird davon ausgegangen, dass vier bis sieben Prozent der Kinder eines Jahrgangs Schwierigkeiten beim Mathematiklernen (Geary 1994; Geary, Hoard & Hamson 1999, 214; Jacobs & Petermann 2007) aufweisen. Diese Prävalenzwerte und die entsprechenden Diagnosen variieren je nach verwendeter Definition (Mazzocco 2005).

In den letzten 20 Jahren werden Schwierigkeiten im Mathematiklernen zunehmend in das Blickfeld sowohl fachdidaktischer, psychologischer als auch pädagogischer Forschungsfelder gerückt. Dementsprechend haben sich unterschiedliche Begrifflichkeiten etabliert, wie beispielsweise Dyskalkulie, Rechenschwäche, Rechenstörung oder mathematische Lernschwierigkeiten oder mathematische Lernschwächen u.a. (Lorenz & Radatz 1993; Schipper 2003; Moser Opitz & Freeseemann 2012; Moser Opitz & Ramseier 2012; Moser Opitz 2013a). Auch die Beschreibung der Symptomatik fällt je nach Definition und deren Kriterien unterschiedlich aus. An dieser Stelle werden zunächst allgemeine Erscheinungsformen im Überblick benannt, um später im Einzelnen auf das Merkmal des zählenden Rechnens (Kap. 2.1) einzugehen. Lorenz (2004 und 2015) führt wesentliche Symptome bzw. Schwierigkeiten an, die bei rechenschwachen Schülerinnen und Schülern auftreten:

- Ziffern und Zahlzeichen werden lediglich als Symbole gesehen, die in einer bestimmten Weise zu verbinden sind.
- Regeln für das Verknüpfen von Zeichen werden erlernt, sodass Fehllösungen darauf hinweisen, dass eine falsche Regel angewendet wurde.
- Zahlen und Rechenoperationen bleiben ohne Sinn.
- Es besteht das Problem, nicht zwischen verschiedenen Darstellungsformen wechseln zu können (z.B. von Handlungen zu Bildern, von Texten zu Symbolen, von Symbolen zur Sprache).
- Es findet keine Vernetzungen zwischen verschiedenen Erfahrungsbereichen statt.
- Zahlbeziehungen entstehen in der Vorstellung durch Handlungen mit Anschauungsmaterial.
- Zählendes Rechnen kann als häufig angewandte Rechenstrategie beobachtet werden.

- Strukturen werden in Zahlen und Rechenoperationen nicht erkannt, jede Aufgabe stellt ein neues Zählproblem dar.
- Der Aufbau des Zahlensystems gelingt nicht; insbesondere die Bedeutung der Dezimalstruktur unseres Zahlensystems (in dem z.B. die Ziffer sieben in den Zahlen 27, 76, 745 verschiedene Bedeutungen hat) bleibt rechenschwachen Schülerinnen und Schülern verschlossen.

Neben diesen Symptomen werden häufig weitere Probleme angeführt, die sich bereits in der Grundschule andeuten: Kinder mit mathematischen Schwierigkeiten liegen zwei bis vier Schuljahre unter dem erwarteten mathematischen Leistungsniveau und bewältigen die Lerninhalte eines Schuljahres erst in zwei oder mehreren Jahren (Parmar & Cawley 1997). Besonders bei Kindern mit umfassenden Lernproblemen wurde festgestellt, dass sie über Jahre hinweg nur geringe Fortschritte machen (Silver, Pennett, Black, Fair & Balise 1999; Jordan & Hanich 2000). Mathematische Verfahren werden meist rezepthaft auswendig gelernt (Montague & Appelgate 2000) und die Schülerinnen und Schüler haben wiederum Schwierigkeiten, Operationen zu automatisieren, um einfache Aufgaben abzurufen (Geary 2004; Barouillet & Lépine 2005; Gersten, Jordan & Flojo 2005).

Typische Merkmale wie Fingerzähl-Strategien sind daher oftmals bei rechenschwachen Schülerinnen und Schülern zu beobachten (Jordan & Oettinger Montani 1997, 632; Ostad 1997; Hanich, Jordan, Kaplan & Dick 2001). Zählstrategien und zählendes Rechnen werden im Zusammenhang mit mathematischen Schwierigkeiten im Anfangsunterricht beschrieben, wobei auch Studien darauf hinweisen, dass das zählende Rechnen über mehrere Schuljahre hinweg bis in die Sekundarstufe I bei rechenschwachen Kindern zu finden ist (Schäfer 2005; Moser Opitz 2013a). Diese betroffenen Kinder wenden im Vergleich zu Kindern ohne mathematische Lernschwierigkeiten keine völlig anderen Rechenstrategien an, lösen sich aber wesentlich langsamer vom zählenden Rechnen (Verschaffel, Torbeyns, De Smedt, Luwel & Van Dooren 2007) bzw. verläuft der Wechsel zu alternativen oder effizienteren Strategien verzögert (Torbeyns, Verschaffel & Ghesquière 2004).

2.1 Zählendes Rechnen als Merkmal mathematischer Lernschwierigkeiten

Bereits im Vorschulalter können Kinder Zahlwörter aufsagen und Gegenstände abzählen. Das Zählen und Abzählen gehören somit zu den ersten mathematischen Aktivitäten (Kap. 2.2) (Benz 2005; Hasemann 2007; Padberg & Benz 2011). Als zählende Rechnerinnen und Rechner können Kinder bezeichnet wer-

den, die das Lösen von Rechenaufgaben als Zählhandlung verstehen und sich daher häufig auf das Weiterzählen bei Additionsaufgaben oder Rückwärtszählen bei Subtraktionsaufgaben konzentrieren (Gerster & Schultz 2004). Darauf bezugnehmend zeigen verschiedene Studien auf, dass zählendes Rechnen beim Lösen von (Kopf-) Rechenaufgaben ein zentrales Merkmal für Rechenschwäche ist (Jordan & Hanich 2000; Jordan, Hanich & Kaplan 2003; Geary 2004; Moser Opitz 2013a). Kinder mit mathematischen Lernschwierigkeiten verfügen über geringere Zählkompetenzen und machen häufiger Fehler beim Zählen (Geary, Bow-Thomas & Yao 1992; Geary 1993; Jordan et al. 2003; Geary 2004; Gersten et al. 2005, 294f.).

Ostad (1997) fand in einer Untersuchung heraus, dass Schülerinnen und Schüler ohne Lernschwierigkeiten beim Addieren auch Abzählstrategien im ersten Schuljahr verwenden, allerdings greifen sie im Verlauf der weiteren Schuljahre zunehmend auf Abrufstrategien zurück. Kinder mit mathematischen Lernschwierigkeiten nutzten mehrheitlich Abzählstrategien über die gesamte Schulzeit hinweg und erlernten kaum alternative Strategien.

Vor Schuleintritt weisen die Kinder unterschiedliches Vorwissen bzw. Vorläuferfähigkeiten (Kap. 2.2.3, 2.2.5) für die Entwicklung arithmetischer Kompetenzen auf. Ebenso vielfältig sind die Schwierigkeiten, die mit diesen Entwicklungsschritten verbunden sind. Studien belegen, dass zählendes Rechnen bis in die Sekundarstufe I von rechenschwachen Schülerinnen und Schüler angewendet wird (Ostad 1997 und 1998; Schäfer 2005; Moser Opitz 2013a). In einer Studie von Ostad (1997) wurde deutlich, dass Kinder mit mathematischen Lernschwierigkeiten, die über einen Zeitraum von zwei Jahren beobachtet wurden, häufiger zählend rechneten. In einer weiteren Studie (1998) erfasste er zudem, dass Kinder mit Lernschwierigkeiten die Aufgaben überwiegend materialgestützt lösten und ihre Strategieentwicklung insgesamt länger dauerte. Schäfer (2005, 441) untersuchte Schülerinnen und Schüler im 5. Schuljahr an Hauptschulen und fand bei der Gruppe der rechenschwachen Schülerinnen und Schüler heraus, dass diejenigen, die nach wie vor Mathematikaufgaben zählend lösten, signifikant mehr Schwierigkeiten im Zahlenverständnis, in den verbalen Zählfertigkeiten und im Operationsverständnis aufwiesen als die nicht-zählend rechnende Schülergruppe. Ähnlich konnte Moser Opitz (2013a) zeigen, dass rechenschwache Schülerinnen und Schüler im 5. Schuljahr nicht sicher in Schritten zählten (ebd., 190) und weniger über flexiblere Rechenstrategien verfügten, die über das bloße Abzählen hinausgingen, was auf ein eingeschränkteres Operationsverständnis schließen ließ. Additionsaufgaben lösten diese Kinder vorrangig, indem sie in Einerschritten weiterzählten, den zweiten Summanden nicht gesamtheitlich addierten. Bessere Ergebnisse zeigten hingegen die Schülerinnen und Schüler im 8. Schuljahr (ebd., 192).

Trotzdem bleibt es aus empirischer Sicht schwierig, zum einen den Übergang zwischen entwicklungsbedingtem zählenden Rechnen (Gerster 1996) und verfestigt zählendem Rechnen zu bestimmen und zum anderen kontrolliert im Längsschnitt zu belegen, welchen Unterschied es zwischen Kindern, die entwicklungsbedingt zählend rechnen, und Kindern, die sich vom verfestigten zählenden Rechnen nicht dauerhaft lösen, gibt (Gaidoschik 2010a). In den folgenden Abschnitten wird zu Beginn die Entwicklung mathematischer Kompetenzen (Kap. 2.2.3, 2.2.4) anhand zweier Modelle der pädagogischen Psychologie (Krajewski 2003 und 2005a; Fritz & Ricken 2008) und diverser Forschungsergebnisse (Kap. 2.2.5) dargestellt und der Weg vom Zählen zum Rechnen beschrieben (Kap. 2.2.6). Um auf die Probleme (verfestigten) zählenden Rechnens einzugehen, ist es wichtig, zunächst die Entwicklung des Zahlbegriffs und die Entwicklung des Zählens bis hin zu ersten Rechenstrategien nachzuvollziehen.

2.2 Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen

Im Folgenden werden die entwicklungspsychologisch orientierten Modelle von Krajewski (2003, 2005a und 2007) und Fritz und Ricken (2008) als aktuelle und einschlägige Modelle zur Entwicklung früher mathematischer Kompetenzen vorgestellt. Diese beschreiben insbesondere die Bedeutsamkeit der Zählkompetenz und des Zahlbegriffsverständnisses für die weitere Entwicklung mathematischer Kompetenzen.

Krajewski (2003, 2005a und 2007) legt in einem Kompetenzebenenmodell dar, wie Kinder ausgehend von basalen Fähigkeiten zunehmend Zahl- und Mengenwissen miteinander verknüpfen und erste Rechenoperationen vollziehen können. Fritz und Ricken (2008) gehen von differenzierteren Niveaustufen aus, die erreicht werden. Im Fokus der Entwicklungsmodelle stehen der Erwerb des Zählens und die Verknüpfung der Zahlen mit dem Mengenverständnis. Beide stützen sich auf frühere Ansätze, wie z.B. Gelman und Gallistel (1978), Fuson (1988 und 1992) und Resnick (1983 und 1992), und gehen damit über die Annahmen Piagets hinaus, dass das Zählen eine wichtige Rolle für die Entwicklung des Zahlenverständnisses darstellt. Zunächst werden diese grundlegenden Ansätze kurz erläutert, die sich vorrangig in den aktuellen Entwicklungsmodellen wiederfinden lassen.

2.2.1 Die Entwicklung der Zahlwortreihe und der Zahlaspekte

Diese Entwicklungsstufen der Zahlwortreihe werden als grundlegende Kompetenz verstanden, um ein Zahlenverständnis zu erwerben und anhand der Zahlenreihe erste Rechenoperationen vollziehen zu können (Krajewski & Ennemoser

2013). Ausgehend von fünf Phasen beschreibt Fuson (1988) die Entwicklung der Zahlwortreihe bzw. der verbalen Zählkompetenz, wodurch die Komplexität der Zählentwicklung deutlich wird. Im Folgenden werden die Phasen kurz im Überblick dargestellt:

Zahlwortreihe als Gesamtheit (string level)

Die Zahlwortreihe wird als Ganzes aufgefasst und von Kindern als Vers, Lied oder Gedicht aufgesagt. Die Zahlwörter sind zum Teil noch eng miteinander verbunden und werden als immer wiederkehrende Einheit wiedergegeben („Eins-zwei-drei...“). Dabei werden die einzelnen Elemente nicht gezählt und die Zahlwörter haben keine kardinale Bedeutung.

Unflexible Zahlwortreihe (unbreakable chain level)

Die Kinder erfassen die Zahlwörter als Einheiten und beginnen beim Aufsagen der Zahlwortreihe immer wieder bei eins, da sie noch nicht von einer beliebigen Ausgangszahl zählen können. Sie bestimmen Vorgänger und Nachfolger einer bestimmten Zahl nur innerhalb der Zahlwortreihe. Die Eins-zu-Eins-Zuordnung kann zwischen Zahlen und Objekten hergestellt werden. Durch das Zählen bestimmen die Kinder die Anzahlen von Objekten, nach denen sie gefragt werden („Gib mir vier.“).

Teilweise flexible Zahlwortreihe (breakable chain level)

Die Zahlwortreihe kann von einer beliebigen Ausgangszahl begonnen werden. Vorgänger- und Nachfolgerzahlen können schnell benannt werden. Das Rückwärtszählen gelingt teilweise. Fuson (ebd.) weist darauf hin, dass sich das Rückwärtszählen zum Teil erst zwei Jahre nach dem Vorwärtszählen entwickelt.

Flexible Zahlwortreihe (numerable chain level)

Das Kind kann von einer bestimmten Anzahl bestimmte Schritte weiterzählen, da jedes Zahlwort als Einheit betrachtet wird (z.B. „Zähle von sieben aus drei Schritte vorwärts.“).

Vollständig reversible Zahlwortreihe (bidirectional chain level)

Die Kinder sind beim Zählen völlig flexibel und in der Lage, die Richtung beim Vor- und Rückwärtszählen beliebig zu wechseln. Es kann von jeder Zahl aus vor- und rückwärts gezählt werden. Sie bestimmen Vorgänger und Nachfolger einer Zahl schnell und benennen diese ohne Schwierigkeiten.

Abbildung 1: Entwicklung der Zahlwortreihe nach Fuson

Beim Erlernen der Zahlwörter in der ersten Phase der Zahlentwicklung treten in der deutschen Sprache einige Besonderheiten auf, die für manche Kinder Schwierigkeiten und Fehler beim Zählen verursachen können (Moser Opitz 2013a, 83f.). Es wird beschrieben, dass zunächst die Zahlwörter von 1 bis 12

auswendig gelernt werden müssen, die Zahlen 13 bis 19 können abgeleitet werden (dreizehn, vierzehn usw.). Das Zahlwort für „Zwanzig“ muss ebenfalls in der besonderen Zusammensetzung gelernt werden. Die Zehnerzahlen werden mit der neuen Endung „zig“ zusammengesetzt, allerdings mit weiteren Besonderheiten (wie z.B. dreißig anstelle von dreizig oder siebzig anstelle von siebenzig). Bei dieser Konstruktion der Zahlwortreihe kommt es häufig zum Verzählen oder zu Wortneuschöpfungen: Beispielsweise kreieren die Kinder Zahlwörter wie „zehnungzwanzig“ oder „zehnzig“. Oder sie zählen beim Zehnerübergang folgendermaßen: „Elfzig, einundelfzig, zweiundelfzig,...“. Oder sie wiederholen die Zehnerzahl erneut: „40, 41, 42, 43.....48, 49, 40.“ Außerdem lässt sich häufig beobachten, dass Kinder Zahlen auslassen, insbesondere die sogenannten Paschzahlen (33, 44, 66, 77). Es wird vermutet, dass die Kinder davon ausgehen, beim Aussprechen des Zahlwortes vor der Paschzahl (z.B. 43 vor 44) bereits zwei Zahlwörter in der bekannten Reihenfolge („drei und vierzig“) genannt zu haben. Kinder nehmen daher an, dass in dem nächsten Zahlwort eine fünf dazukommt. Da im Wort „dreiundvierzig“ die Zahl vier vorkommt, gehen sie davon aus, die Zahl „vierundvierzig“ wäre eine Wiederholung und muss deshalb nicht mehr gesagt werden (ebd.).

Eine weitere Besonderheit der deutschen Sprache markiert die Reihenfolge, in der Einer und Zehner angegeben werden: Bei Zahlwörtern ab 13 werden zuerst die Einer und dann die Zehner genannt. Bei den Zahlwörtern ab 21 wird zwischen Einer und Zehner ein „und“ eingefügt. Ab 100 vollzieht sich ein Richtungswechsel, d.h. von 101 bis 109 werden zuerst die Hunderter, dann die Einer, jedoch kein Zehner genannt. Ab 113 wird zuerst der Hunderter, dann der Einer und zuletzt der Zehner gesprochen, der allerdings in die Mitte der Zahl geschrieben wird (Moser Opitz 2013a). Diese wechselnde Reihenfolge der Stellenwerte führt häufig zu Schwierigkeiten beim Erlernen der Zahlwortreihe. Das kann ein Grund sein, weshalb Kinder mit anderer Erstsprache als Deutsch mehr Schwierigkeiten beim Zählen haben als Kinder mit Erstsprache Deutsch (Moser Opitz, Ruggiero & Wüest 2010).

Entwicklung der Zahlaspekte

Es wird deutlich, dass bei der Entwicklung der Zählkompetenz verschiedene Entwicklungsprozesse parallel ablaufen, aber auch ineinander übergreifen, wie die Zählprinzipien beim Erlernen der Zahlwortreihe (Kap. 2.2.1, 2.2.2). Neben diesen Prozessen lernen die Kinder Zahlen in verschiedenen Kontexten kennen und verstehen. Zahlen werden bereits im vorschulischen Alltag als Codes, Nummern oder als Anzahlbeschreibung entdeckt. Diese unterschiedlichen Kontexte, in denen Zahlen auftreten und verwendet werden, sind in der folgenden Tabelle 1 als Zahlaspekte dargestellt (Krauthausen & Scherer 2007, 9):

Tabelle 1: Übersicht der Zahlaspekte

Zahlaspekt	Beschreibung	Beispiel
Kodierungsaspekt	Bezeichnung von Objekten	Hausnummer 3, Telefonnummer, Postleitzahl
Maßzahlaspekt	Maßzahlen für Größen	2 Meter, 3 Euro, 8 Minuten
Operatoraspekt	Vielfachheit einer Handlung oder eines Vorgangs	noch zweimal schlafen bis zu den Ferien
Ordinalzahlaspekt	Rangplatz in einer geordneten Reihe	„vier, fünf, sechs...“
Kardinalzahlaspekt	Anzahl einer Menge	3 Äpfel, 8 Birnen, 4 Bleistifte
Rechenzahlaspekt	algebraische Struktur, Rechnen als „Ziffernmanipulation“	$36 + (17 + 4) = (36 + 4) + 17$

Insbesondere der ordinale und kardiale Zahlaspekt spielen bei der Entwicklung des Zahlbegriffs bzw. Zahlenverständnisses eine entscheidende Rolle. In der Phase der unflexiblen Zahlwortreihe (Kap. 2.2.1) lernen die Kinder zum einen, dass Zahlwörter nach einer festen und wiederholbaren Reihenfolge angeordnet werden (Prinzip der stabilen Ordnung) und zum anderen, dass genau jedem Element einer zu zählenden Menge genau ein Zahlwort zugeordnet wird (Eindeutigkeitsprinzip; Kap. 2.2.2). Hinter der Zahlenreihe steht der ordinale Zahlaspekt (Kap. 2.2.2) – das ordinale Zahlenverständnis. Um Mengen bzw. Anzahlen zu bestimmen, müssen die Schülerinnen und Schüler Elemente, Objekte fehlerfrei abzählen können. Scherer und Moser Opitz (2010) betonen, dass durch sicheres Zählen ein präzises Anzahlkonzept entwickelt werden kann. Beim Abzählen einer Menge ist die zuletzt genannte Zahl gleichzeitig auch die Anzahl der Elemente.

Die verschiedenen Aspekte von Zahlen, denen Kinder im Umgang mit Zahlen oder beim Zählen begegnen, werden zunehmend zusammengefügt, sodass die Kinder allmählich ein umfassendes Zahlbegriffsverständnis erwerben. Es gibt nicht „den“ einen Zahlbegriff, der aufgebaut werden kann, sondern verschiedene Zahlaspekte bzw. Zahlbegriffe, die zu einem umfassenden Zahlenverständnis integriert werden (Moser Opitz 2007). Hier trägt das kompetente Zählen ent-

scheidend zum Aufbau des Zahlbegriffes bei (Scherer & Moser Opitz 2010, 102 und 107). Jordan, Glutting und Ramineni (2010) stellen das Zahlenverständnis (number sense) als wesentliche Komponente im Erwerb mathematischer Kompetenzen heraus. Sie definieren das Zahlenverständnis (number sense) als

„moving from the initial development of basic counting techniques to more sophisticated understandings of the size of numbers, number relationships, patterns, operations, and place value.“ (Bryant, Bryant, Gersten, Scammacca & Charcez 2008, 21)

Als inhaltliche Elemente werden das Zählen (cardinal, ordinal), Zahlwissen (quantity discrimination, counting sequences), Rechnen (addition, subtraction, verbal and nonverbal calculations) und Mengenschätzen (estimation) aufgeführt (Jordan, Kaplan, Oláh & Locuniak 2006). Vorschulkinder bringen diese Erfahrung, wie Zahlen in verschiedenen Situationen verwendet werden können, in den Unterricht ein. Für die Entwicklung dieses Zahlbegriffsverständnisses ist es wichtig, dass die Lehrerinnen und Lehrer diese im Unterricht aufgreifen und die Verschiedenheit der Zahlaspekte berücksichtigen (Wember 2003; Krauthausen & Scherer 2007, 10) und mit den Kindern systematisieren.

2.2.2 Die Entwicklung der Zählprinzipien nach Gelman und Gallistel

Wie und was die Kinder zählen, entwickelt sich nach bestimmten Regeln während die Kinder die Zahlwortreihe weiter festigen. Durch die verschiedenen Zählerfahrungen erlangen die Kinder zunehmend eine Einsicht in folgende Zählprinzipien (Gelman & Gallistel 1978):

- Eindeutigkeitsprinzip: Jedem der zu zählenden Objekte wird genau ein Zahlwort zugeordnet.
- Prinzip der stabilen Ordnung: Die Reihe der Zahlwörter hat eine feste Ordnung.
- Kardinalprinzip oder Kardinalwort-Prinzip: Das zuletzt genannte Zahlwort gibt die Anzahl der Objekte in einer Menge an.
- Abstraktionsprinzip: Es kann jede beliebige Menge ausgezählt werden, d.h. unabhängig welche Art von Objekten gezählt wird.
- Prinzip der Irrelevanz der Anordnung: Die jeweilige Anordnung der zu zählenden Objekte ist für das Zählergebnis nicht von Bedeutung.

Die ersten drei Prinzipien beschreiben, wie gezählt wird und die beiden letzten und übergeordneten Prinzipien, was gezählt wird. Um zählen zu können, muss ein Kind die Eins-zu-Eins-Zuordnung und die Zahlwörter in korrekter Reihen-

folge beherrschen, z.B. das Zählen ohne die Objekte doppelt anzutippen, zu überspringen oder Objekte zu zeigen, ohne ein Zahlwort zuzuordnen. Dies gelingt den Kindern bereits in der Phase der unflexiblen Zahlwortreihe. Allerdings entwickelt sich diese Zählkompetenz individuell und unterschiedlich schnell. Dazu gehören nicht nur das Aufsagen der Zahlwortreihe in korrekter Reihenfolge nach dem ordinalen Verständnis (Prinzip der stabilen Ordnung), das Zählen von verschiedenartigen Objekten in beliebigen Mengen (Abstraktionsprinzip) und Anordnungen (Prinzip der Irrelevanz der Anordnung), sondern auch das Ab- und Auszählen mit kardinalen Verständnis. Mit dreieinhalb Jahren erlangen die Kinder erste Einsichten in das Kardinalprinzip, dass das zuletzt genannte Zahlwort auch die Anzahl der Menge angibt (Moser Opitz 2013a, 82). Für viele Kinder ist dieser Schritt eine große Herausforderung. Nämlich das Zählen mehr bedeutet, als die gelernten Zahlwörter in der korrekten Reihenfolge aufzusagen und auf Gegenstände zu zeigen (Gaidoschik 2007, 16).

2.2.3 Entwicklungsmodell der Zahl-Größen-Verknüpfung

Das Modell der „Zahlen-Größen-Verknüpfung“ (ZGV) von Krajewski (2003, 2005a, 2007) besteht aus drei Kompetenzebenen, in denen es darum geht, wie Kinder das Zählen erlernen und Zahlen zunehmend mit Mengen bzw. Größen verknüpfen. Es besteht die Annahme, dass bereits im Kleinkindalter numerische Kompetenzen erworben werden. Das Modell wurde bereits empirisch überprüft und diente dazu, diagnostische Instrumente und Förderkonzepte, z.B. „Mengen-Zahlen-Zählen“ (MZZ; Krajewski, Niding & Schneider 2007), zu konzipieren. Es wird darauf hingewiesen, dass sich im Laufe der Jahre auch die Begrifflichkeiten präzisiert haben. Die mathematischen Basiskompetenzen, die früher als Mengen- und Zahlenwissen bezeichnet wurden, werden aktuell unter dem Begriff „Zahl-Größen-Kompetenz“ gefasst. Der Mengenbegriff wurde somit erweitert, da sowohl diskrete (abzählbare und voneinander unterscheidbare Elemente) als auch kontinuierliche Mengen (Größen, wie Flächen und Volumen) dazu gezählt werden (Krajewski & Ennemoser 2013, 42). Im Folgenden werden die drei Kompetenzebenen ausführlicher erläutert (vgl. Abb. 2).

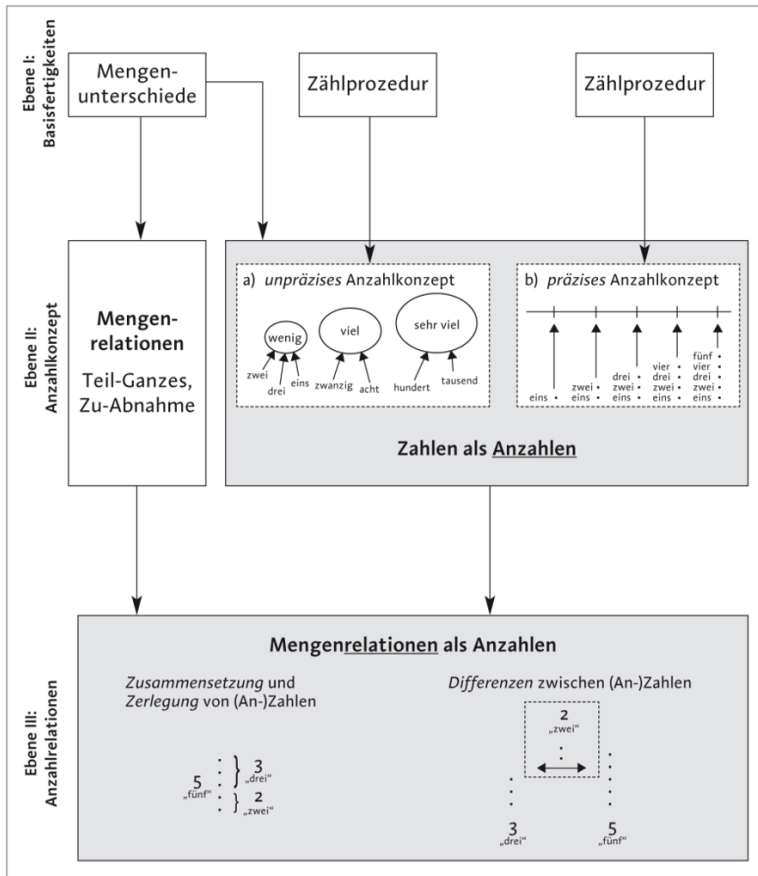


Abbildung 2: Entwicklungsmodell früher mathematischer Kompetenzen (Krajewski & Ennemoser 2013, 42)

Kompetenzebene 1: Zahlwörter und Ziffern ohne Mengenbezug/Größenbezug

Die erste Ebene unterscheidet zwei Basisfertigkeiten: die Größenunterscheidung und das Aufsagen von Zahlwörtern. Allerdings müssen diese beiden Basisfertigkeiten zu diesem Zeitpunkt im Sinne isolierter Teilkompetenzen noch nicht miteinander in Beziehung stehen (Schneider, Küspert, Krajewski 2013, 26). Forschungen zeigen, dass bereits im Säuglingsalter Mengen wahrgenommen und grob unterschieden werden können. Dies vollzieht sich auf pränumerischer Ebene.

ne, d.h. ohne konkreten Zahlenbezug, aber auf der Grundlage von Ausdehnung, Fläche und Volumen (Wynn 1996; Xu & Spelke 2000; Schneider et al. 2013, 26). Es wird zum einen diskutiert, inwiefern diese Fähigkeiten angeborene mathematische Basiskompetenzen sind oder erworben wurden. Zum anderen besteht die Frage, ob die Unterscheidung der Mengen auf die unterschiedlichen Anzahlen oder eher auf die räumliche Ausdehnung und Oberfläche der Objekte zurückzuführen ist (Krajewski 2003; Schneider et. al. 2013, 15). Neben der basalen Fähigkeit dieser unpräzisen Mengen- bzw. Größenunterscheidung beginnen die Kinder im Alter von zwei Jahren Zahlwörter zu verwenden. Parallel zur Mengenunterscheidung werden auf der Ebene der Basisfertigkeiten im sozialen Kontakt mit Eltern, älteren Kindern oder anderen Erwachsenen Zahlwörter und kurze Reihungen nachgesprochen (eins – zwei – drei) bis hin zum selbständigen Aufsagen der auswendig gelernten Zahlenreihe, was sich bis zum Grundschulalter fortsetzt. Die Verknüpfung der Zahlwörter bzw. Zahlenfolgen mit den entsprechenden Mengen und Größen gelingt den Kindern auf dieser ersten Ebene jedoch noch nicht. Die verwendeten Zahlwörter werden nicht für die Beschreibung von Mengen benutzt. Voraussetzung hierfür ist, Zahlen als einzelne Wörter wahrzunehmen und die Zahlenreihe korrekt aufzusagen, wie auch bei Fuson (1988) beschrieben. Hinzu kommt die Voraussetzung, beim Zählen jede Zahl genau einmal zu benennen und derselben Position zuzuordnen, was dem Prinzip der stabilen Zahlenfolge entspricht (Gelman & Gallistel 1978; Krajewski 2008).

Kompetenzebene 2: Verknüpfung von Zahlwörtern und Ziffern mit Mengen/Größen

Die zweite Ebene ist die wichtigste Ebene in der Entwicklung des Zahlenverständnisses bzw. des Zahlbegriffs. In etwa ab dem Alter von drei Jahren verläuft diese Entwicklung in zwei Phasen, in denen sich die Kinder der Mengen und Größen von Zahlen bewusst werden (Krajewski & Schneider 2008; Schneider et al. 2013). Die erste Phase wird als „unpräzises Anzahlkonzept“ (Ebene 2a) bezeichnet. Die Zahlwörter sind zunächst eher unpräzise mit den Mengen verknüpft, sodass Zahlen wie beispielsweise „zwei“ oder „vier“ mit dem Begriff „wenig“ oder Zahlen wie „zwanzig“ oder „hundert“ als „viel“ beschrieben werden. Es wird angenommen, dass diese Assoziationen während des Zählens entstehen, da die Kinder feststellen, dass bis zu bestimmten Zahlen unterschiedlich lang gezählt werden muss (Schneider et al. 2013, 27). In der zweiten Phase (Ebene 2b), benannt als „präzises Anzahlkonzept bzw. Größenrepräsentation“, wird jeder Zahl der Zahlenreihe exakt eine auszählbare Menge zugeordnet. So wird Kindern in dieser Phase bewusst, dass beispielsweise hinter dem Zahlwort „fünfzehn“ genau fünfzehn Elemente bzw. Objekte stehen. Diese Fähigkeit wird als kardinales Verständnis (Kap. 2.2.2) benannt. Mengen werden nicht mehr nur durch das Auszählen mit dem Zahlwort verbunden (Anzahlkonzept), sondern

Zahlwörter miteinander in Beziehung gesetzt. Darüber hinaus wird erkannt, dass benachbarte Zahlen sich in ihrer Größe bzw. Menge unterscheiden, z.B. 18 ist weniger als 19. Voraussetzung hierfür sind, dass die Kinder über eine sichere Zählkompetenz verfügen (Ebene 1) und keine Fehler beim Aufsagen der Zahlwortreihe machen. Es entwickelt sich das Verständnis von Mengenrelationen weiter, allerdings teilweise noch ohne diese in konkreten Zahlen ausdrücken zu können.

Kinder verstehen, dass Mengen durch Hinzufügen oder Wegnehmen (Zu- und Abnahme-Schema) von Elementen oder Objekten verändert werden können oder eben gleichermaßen unverändert bleiben können (Mengenvarianz). Außerdem wird auf dieser Ebene bereits eine Basis für das Teile-Ganzes-Schema gelegt (Resnick 1992), jedoch in dieser Phase meist noch ohne Zahlbezug. Die Veränderungen werden zwar erfasst und beschrieben („mehr als“, „weniger als“), aber nicht mit Zahlen ausgedrückt.

Kompetenzebene 3: Verknüpfung von Zahlwörtern und Ziffern mit Mengenrelationen/Größenrelationen

Nach der Entwicklung der Größenrepräsentationen werden auf der dritten Ebene die erkannten Relationen zwischen Mengen und Größen nun auch mit Zahlen beschrieben und ein Verständnis für die Beziehungen zwischen den Zahlen entwickelt (Krajewski & Schneider 2008). Dieser Schritt vollzieht sich bereits im Alter von vier Jahren im kleineren Zahlenraum, häufiger wird diese Einsicht allerdings im Alter von sechs Jahren erlangt (Schneider et al. 2013). Mit dem Wissen, dass sich Mengen in zwei oder mehrere kleinere Mengen zerlegen lassen, und der Verknüpfung dieser Anzahlen mit Zahlen (präzises Anzahlkonzept) lassen sich die Beziehungen zwischen den Mengen durch Zahlen darstellen. Bisher zeichnete sich das Zahlenverständnis durch Zuordnung einer Menge zu einer Zahl (Ebene 2) und der Seriation dieser Anzahlen (Ebene 2) aus, was sich nun auf das Teile-Ganzes-Schema erweitert. Eine Zahl bzw. Menge kann in kleinere Mengen oder Zahlen zerlegt und wieder zusammengefügt werden. Ebenso verstehen die Kinder, dass sich die Differenz zwischen zwei Zahlen durch eine dritte Zahl beschreiben und darstellen lässt. Somit werden zum einen Relationen zwischen Zahlen bzw. Mengen als auch Differenzen zwischen diesen bestimmt. Empirische Ergebnisse zeigen, dass insbesondere die Verknüpfung von Mengen und Zahlen auf Ebene 2 einen wesentlichen Anteil bei der Vorhersage von mathematischen Schwierigkeiten erklärt (Krajewski 2003, Krajewski & Schneider 2009). Die ersten beiden Kompetenzebenen werden dabei als mathematische Vorläuferfähigkeiten bezeichnet (Krajewski 2008). Aufgrund dieser Bedeutsamkeit der Ebene 2 wird bei der Beschreibung der Schwierigkeiten später (Kap. 2.3) erneut darauf eingegangen.

Das Modell lässt sich in die oben beschriebenen drei Ebenen untergliedern, die allerdings nicht als starre lineare Entwicklungsverläufe gedacht sind. Krajewski (2003, 68) weist darauf hin, dass in diesem Zusammenhang die Repräsentationsformen der Aufgaben (konkretes Anschauungsmaterial, bildliche Darstellung bzw. abstrakte Ebene) eine wesentliche Rolle spielen. So kann es vorkommen, dass Schülerinnen und Schüler bereits Kompetenzen auf einer höheren Ebene erworben haben, aber nicht auf Ebene der abstrakten Repräsentationsform (Garrote, Moser Opitz & Ratz 2015). Neben der Repräsentationsform hängen mathematische Kompetenzen auch von der Vorgabeform der Zahlen (Zahlwörter vs. arabische Ziffern) und von deren Größe (Zahlenraum bis 10, 20, 100) ab, die berücksichtigt werden müssen, wenn die Kompetenzen in Hinblick auf die drei Ebenen überprüft werden (Schneider et al. 2013).

2.2.4 Das Niveaustufenmodell der mathematischen Kompetenzentwicklung

Dieses Entwicklungsmodell diene ähnlich wie das ZGV-Modell zur Entwicklung eines Diagnostikinstrumentes (MARKO-D; Ricken, Fritz & Balzer 2013) und eines Förderprogramms (MARKO-T; Gerlach, Fritz & Leutner 2013) für mathematische Kompetenzen. Es enthält fünf Niveaustufen, die ein Kind bei der Entwicklung mathematischer Kompetenzen durchläuft (vgl. Abb. 3; Gerlach, Fritz, Ricken & Schmidt 2007, 19):

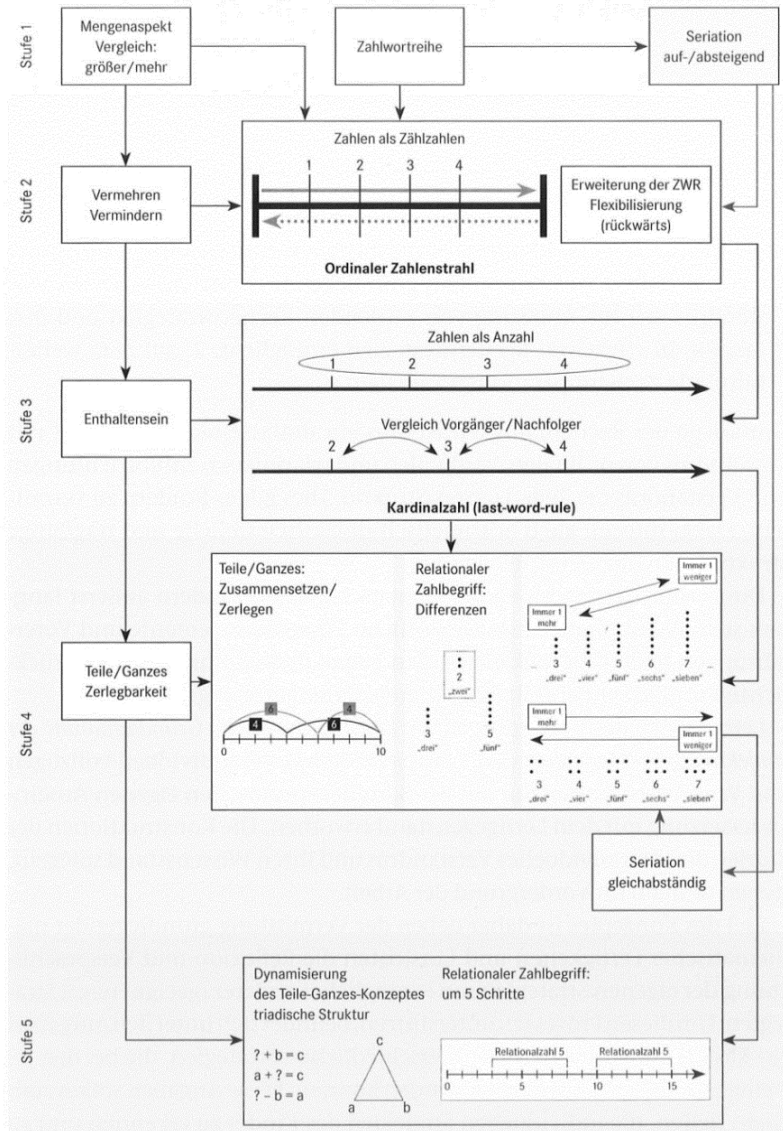


Abbildung 3: Niveaustufenmodell der Entwicklung mathematischer Kompetenzen (Gerlach, Fritz, Ricken & Schmidt 2007, 19)

Stufe 1: Reihenbildung und Mengenvergleich

In der ersten Stufe erlernen die Kinder Zahlwörter, die teilweise als zusammenhängende Wortgebilde gelernt und noch ohne konkrete Zählhandlungen eingesetzt werden. Ähnlich wie im ZGV-Modell von Krajewski (2003, 2005a und 2005b) steht neben dem Erwerb der Zahlwortreihe das Vergleichen von Mengen im Vordergrund. Dabei werden kleinere Anzahlen in eine Reihenfolge gebracht und der Größe nach bewertet. Die Kinder verwenden zunehmend bei der Beschreibung von Mengen Begrifflichkeiten wie z.B. viel, wenig, mehr, weniger. Diese ersten Fähigkeiten – das Aufsagen der Zahlwörter, die Reihenbildung und das „globale“ Vergleichen von Mengen – sind auf Niveaustufe 1 wichtige Entwicklungsschritte beim Erwerb mathematischer Rechenkompetenzen (Fritz & Ricken 2008, 33).

Stufe 2: Ordinaler Zahlenstrahl und zählendes Rechnen

Ab der zweiten Stufe werden die Zahlwörter voneinander unterschieden und bewusst für das Zählen verwendet. Dies geschieht, wie auch bei Gelman und Gallistel (1978) nach dem Prinzip der Eins-zu-Eins-Zuordnung. Für Zählhandlungen muss allerdings die Zahlwortreihe noch vollständig aufgesagt und kann noch nicht flexibel gehandhabt werden. Wenn die Zahlenreihe als eine feste Abfolge verstanden wird, können Zahlen hinsichtlich ihrer Größe miteinander verglichen werden, allerdings nur anhand der Position in der Zahlenreihe und nicht auf der Basis des kardinalen Verständnisses (Fritz & Ricken 2008, 34). Bereits in dieser Stufe gelingt es den Kindern aus dem ordinalen Verständnis heraus, nach dem Prinzip des Hinzufügens und Wegnehmens zählend zu rechnen. Dabei wird diese Vorstellung der Mengenveränderung auf einen mentalen Zahlenstrahl übertragen, auf dem vor- und rückwärts gezählt wird (Resnick 1983, ebd.). Dieser Entwicklungsschritt wird im ZGV-Modell auf Ebene 2 eingeordnet. Fritz und Ricken (2008) heben die lineare Repräsentation der Zahlenreihe hervor. Die Kinder entwickeln die Vorstellung eines mentalen Zahlenstrahls.

Stufe 3: Kardinale Mengenvorstellung

In Stufe 3 wird das Mengenwissen ausgeprägt und quantifiziert. Die Kinder verknüpfen Zahlen mit Anzahlen und dementsprechend den Mengen. Dass hinter jeder Zahl in der Zahlenreihe gleichzeitig eine Menge abzulesen ist, stellt für Kinder eine wichtige Einsicht da, die rechenschwache Kinder nur schwer erlangen. Mit dem kardinalen Verständnis müssen bei ersten Rechenoperationen die Summanden nicht beginnend bei eins ausgezählt werden, sondern es entwickelt

sich eine erste Strategie vom ersten Summanden ausgehend die zweite Menge hinzuzuzählen, um die Gesamtmenge zu erhalten (Fritz & Ricken 2008, 37).

Stufe 4: Teile-Ganzes-Zerlegbarkeit

In der nächsten vierten Stufe erwerben die Kinder die Einsicht, dass sich die Mengen in Teile zerlegen und wieder zusammensetzen lassen – das hier benannte „Teil-Teil-Ganzes-Verhältnis“ (Fritz & Ricken 2008, 37). Es wird angegeben, dass dieser Lernprozess im ersten und zweiten Schuljahr stattfindet. Das kardinale Verständnis dient dazu zu verstehen, dass Zahlen andere Zahlen beinhalten. Bei Rechenhandlungen (Hinzufügen und Wegnehmen) erkennen die Kinder auf anschaulicher Ebene Beziehungen zwischen den beiden Teilmengen und der Gesamtmenge (Fritz & Ricken 2008, 38):

- zwei Teilmengen werden zu einer Gesamtmenge verbunden,
- eine Gesamtmenge kann wieder in die beiden Teilmengen zerlegt werden,
- aus der Gesamtmenge und einer Teilmenge kann die zweite Teilmenge erschlossen werden.

Für diese Stufe wird ergänzt, dass sich eine weitere konzeptionelle Entwicklung vollzieht. Jedes Zahlwort steht in der Reihe für einen Zählschritt und das letztgenannte Zahlwort repräsentiert die Anzahl der Objekte und Zähl Schritte. Dadurch lässt sich der Unterschied zwischen zwei Mengen quantifizieren. In diesem Entwicklungsmodell steht der mentale Zahlenstrahl im Fokus, d.h. Zahlen kennzeichnen auch Abschnitte auf einem Zahlenstrahl.

Stufe 5: Relationaler Zahlbegriff

Schließlich gelingt es, auf Stufe 5 Zusammenhänge zwischen den Aufgaben herzustellen. Das Teile-Ganzes-Verständnis und der relationale Zahlbegriff werden weiterentwickelt. Die Beziehung zwischen dem Ganzen und dessen Teilmengen bleibt gleich, unabhängig wie die Aufgabe gestellt wird (Fritz & Ricken 2008; Ricken, Fritz & Balzer 2011a und 2011b).

Die Addition wird verstanden als die „Zusammensetzung eines Ganzen aus Teilen“ und im Gegensatz dazu die Subtraktion als „Unterschied zwischen den Teilen und dem Ganzen“ (Fritz & Ricken 2008, 40). In Anlehnung an Resnick (1983) wird die Teile-Ganzes-Beziehung als wichtigste konzeptionelle Entwicklung betrachtet, was wiederum für weitere mathematische Kompetenzen, wie beispielsweise für die Rechenoperationen Multiplikation und Division oder das Verständnis des Stellenwertsystems, eine Entwicklungsvoraussetzung darstellt

(Fritz & Ricken 2008). Die Zerlegbarkeit wird zunehmend auf die Teilmengen übertragen, sodass z.B. größere Summanden in kleinere Teilmengen zerlegt werden, um die Rechenaufgabe zu vereinfachen. Durch das relationale Zahlenverständnis können auch Aufgabenstellungen wie beispielsweise „Welche Zahl ist um drei größer als vier?“ gelöst werden.

Zwar geht dieses Modell von Stufen der Entwicklung früher mathematischer Kompetenzen aus, es wird jedoch eingeräumt, dass eine strenge Abgrenzung zwischen den Stufen nicht immer vorgenommen werden kann. Es werden Übergänge zwischen den Stufen angenommen, da bei manchen Kindern Lösungsstrategien zu beobachten sind, die mehreren Stufen zuzuordnen sind. Ziel ist es trotzdem, die wichtigen Entwicklungsschritte abzubilden und empirisch messbar zu machen.

Zusammenfassung

Die Entwicklungsmodelle greifen unterschiedlich auf frühere Ansätze der Zählentwicklung zurück. Krajewski (2005a) nimmt Aspekte Fusons (1988) auf, betont aber, „dass ein automatisiertes, flexibles Aufsagen der Zahlwortfolge im ZGV-Modell nicht mit der kindlichen Einsicht in die Größenrepräsentation von Zahlen und in das Verständnis von Zahlrelationen gleichgesetzt wird“ (Krajewski & Ennemoser 2013, 49). Zählfertigkeiten werden auf der ersten Ebene im Modell eingeordnet und müssen trotz flexibler Anwendung noch nicht mit einem konzeptionellen Zahlenverständnis einhergehen (ebd.). Das Modell von Fritz und Ricken (2008) orientiert sich an Resnick und insbesondere an deren Verständnis von der Phase, in der die Kinder das Teil-Ganze-Schema erlernen. Auch Krajewski greift Resnicks protoquantitative Schemata auf, um genauer zu beschreiben, wie sich die Verknüpfung von Zahlen und Mengen vollzieht. Größen von Zahlen (Ebene 2) und deren Unterschiede zu verstehen (Ebene 3), werden dabei als zentrale Entwicklungsschritte betrachtet (Krajewski & Ennemoser 2013, 48). Zwischen den beiden Entwicklungsmodellen gibt es Ähnlichkeiten. Ausgangspunkt ist das Zählen und das Vergleichen von Mengen. Im differenzierteren Modell von Fritz und Ricken (2008) wird die Vorstellung eines mentalen Zahlenstrahls stärker betont, was allerdings bei Krajewski auf Ebene 2 auch berücksichtigt wird. Bereits auf Stufe 2 können die Kinder zählend erste Rechenaufgaben lösen, rein auf der Basis des ordinalen Verständnisses. Was Krajewski auf Ebene 3 veranschaulicht, wird bei Fritz und Ricken im Wesentlichen durch die letzten beiden Stufen differenzierter dargestellt. Auch hier liegt der Fokus auf dem Teile-Ganzes-Verständnis und der Mengenrelationen – dem relationalen Zahlaspekt. Weiterhin wird deutlich, dass der Zählkompetenz eine Schlüsselfunktion für die frühe mathematische Kompetenzentwicklung beigemessen wird.

2.2.5 Forschungsergebnisse zur Bedeutung numerischer Vorkenntnisse

Obwohl die Entwicklung der Zählkompetenz und des Zahlbegriffs eine sehr komplexe Herausforderung ist, da sich die Fähigkeiten unterschiedlich, aber parallel entwickeln und doch ineinandergreifen, lassen sich auch vor Schulbeginn diese „mathematischen Vorläuferfähigkeiten“ (Krajewski 2003; Krajewski & Schneider 2008, 2009) nachweisen. Sie sind an die Fähigkeit gekoppelt, Anzahlen in Relationen zu setzen, zu zerlegen und durch Hinzunehmen oder Wegnehmen zu verändern, was zu ersten Rechenfertigkeiten und arithmetischen Einsichten führt. Für mathematische Lernschwierigkeiten wurden Prädiktoren untersucht und unter anderem herausgefunden, dass insbesondere das Anwenden von effizienten Zähl- und Rechenstrategien einen Einfluss auf die arithmetischen Kompetenzen und auf das Faktenwissen nimmt (Bryant et al. 2008).

Geary, Hamson und Hoard (2000) untersuchten Schülerinnen und Schüler im ersten und zweiten Schuljahr und fanden dabei heraus, dass sich die Kinder mit mathematischen Lernschwierigkeiten oder kombinierten Leseschwierigkeiten in verschiedenen mathematischen Kompetenzen signifikant von der Vergleichsgruppe (Kinder ohne Lernschwierigkeiten) unterschieden. Das betraf das Benennen von Zahlen und Beschreiben dieser nach verbaler oder visueller Repräsentation, das Vergleichen von Mengen und die Zählkompetenz. Während die Kinder ohne Lernschwierigkeiten (Mathematik und Lesen) bis zum zweiten Schuljahr einfache Additionsaufgaben zunehmend durch Abrufen lösten, nutzten die Kinder mit mathematischen Lernschwierigkeiten nach wie vor das Fingerzählen und verbales Zählen (ebd., 252).

In einer Längsschnittstudie vom zweiten bis dritten Schuljahr untersuchten Jordan, Hanich und Kaplan (2003) den arithmetischen Faktenabruf und dessen Einfluss auf die Mathematikleistung. Schülerinnen und Schülern ohne Schwierigkeiten im Faktenabruf erzielten am Ende des dritten Schuljahres eine höhere Mathematikleistung als die Kinder, denen das Abrufen arithmetischer Fakten weniger gelang. Bei diesen Kindern erwies sich das Fingerzählen auch als Prädiktor für die Mathematikleistung. Zusätzlich wurde herausgefunden, dass Schülerinnen und Schüler mit einem höheren IQ das Fingerzählen erfolgreicher reduzierten als Schülerinnen und Schüler mit einem geringeren IQ (ebd., 113).

Gaupp, Zoelch und Schumann-Hengsteler (2004) untersuchten mit einer Stichprobe von 24 rechenschwachen Schülerinnen und Schülern und 24 nicht rechenschwachen Kindern die numerischen Basiskompetenzen im dritten und vierten Schuljahr, wozu Zahlbegriff, Mengenbegriff und Zählfertigkeiten gehörten. Dabei wiesen die rechenschwachen Kinder signifikant mehr Schwierigkeiten auf bezüglich des Zahlenlesens und -schreibens, bei der Anordnung von Zahlen auf einem beschrifteten Zahlenstrahl, Mengen zu schätzen und Zahlen miteinander zu vergleichen. Die deutlichsten Unterschiede zeigten sich in der Bearbei-

tung der Rechenaufgaben, bei denen rechenschwache Kinder nur 25 Prozent korrekt und nur 19 von 31 Aufgaben durch direkten Abruf lösten.

In einer Langzeitstudie überprüften Krajewski und Schneider (2006, 2008, 2009), inwiefern mathematische Basisfertigkeiten bzw. Vorläuferfertigkeiten Einfluss auf das weitere Mathematiklernen nehmen. Im Fokus dabei stand das Zahlen- und Mengenwissen (Krajewski & Schneider 2009). Über vier Messzeitpunkte wurden bei den Kindern mathematische Kompetenzen im Vorschulalter ($n = 153$), am Ende des ersten Schuljahres ($n = 147$) und am Ende des vierten ($n = 130$) überprüft. Dabei stellten sich die numerischen Basisfertigkeiten als ein signifikanter Prädiktor Zahlen-Mengenkompetenz (Anzahl-Invarianzkonzept) in Klasse 1 ($r = .62$) (Krajewski & Schneider 2006), und vierten Klasse ($r = .61$) heraus. Das Anzahl- und Invarianzkonzept, d.h. die Fähigkeit Anzahlen mit dem Mengenbegriff zu verknüpfen, Mengen zu vergleichen und der Seriation von Zahlen, sagten insbesondere die Mathematikleistung der Schülerinnen und Schüler in der vierten Klasse ($r = .51$) voraus. Neben den spezifischen Vorläuferfertigkeiten wurden ebenso unspezifische in die Modelle aufgenommen. Die (nonverbale) Intelligenz ($r = .31$) stellte lediglich für die numerischen Basisfertigkeiten einen Prädiktor dar. Letztere erwiesen sich als Prädiktor für die Mengen- und Zahlenkompetenzen (ebd. 2008, 282). Unter der Betrachtung der Kinder mit mathematischen Lernschwierigkeiten wurde ebenfalls die Vorhersagekraft der mathematischen Vorläuferfähigkeiten empirisch nachgewiesen.

In einer weiteren Längsschnittuntersuchung von Jordan und Kollegen (2010) wurden Kinder am Ende des ersten Schuljahres ($n = 279$) und am Ende des dritten Schuljahres ($n = 175$) hinsichtlich ihrer mathematischen Kompetenzen untersucht. Dazu zählten das Zahlenverständnis, das Zahlenwissens, die Zählprinzipien, der Mengenvergleich, die Mengenerfassung und das Rechnen. Dabei erwies sich das Zahlenverständnis (number sense) als signifikanter Prädiktor für die spätere Mathematikleistung (Jordan, Glutting & Ramineni 2010).

Darüber hinaus zeigen Studien im Vorschulalter und zu Schulbeginn, dass bereits ein Großteil der Kinder frühe mathematische Kompetenzen mitbringt. Beispielsweise wurde in einer Längsschnittstudie von Clarke et al. (2008) mit 810 Kindern zu Schulbeginn herausgefunden, dass 98 Prozent Kinder der Mengen bis vier simultan erfassen, knapp 40 Prozent von verschiedenen Startzahlen aus in Einerschritten vorwärts- und rückwärtszählen und knapp 90 Prozent die Zahlwortreihe bis 20 aufsagen konnten. Bei einer Menge von neun Punkten gelang die kardinale Zuordnung 67 Prozent der Schülerinnen und Schüler. Allerdings wurde auch deutlich, dass ca. ein Drittel der Schülerinnen und Schülern bereits erhebliche Schwierigkeiten in diesen Bereichen zeigten. In der Untersuchung von Weißhaupt et al. (2006) mit 129 Vorschulkindern wurde ebenfalls das mathematische Vorwissen getestet. Dabei wurde herausgefunden, dass insbesondere

rechenschwache Kinder Schwierigkeiten bei der Mengenbestimmung und bei der Variation des Teile-Ganzes-Konzeptes hatten.

Mit dem Schuleintritt verfügen die Schülerinnen und Schüler bereits über numerische Basiskompetenzen, dies allerdings auf unterschiedlichem Niveau. Empirische Untersuchungen bestätigen den Einfluss der frühen mathematischen Kompetenzen auf die spätere Mathematikleistung, die bereits theoretisch in den Modellen von Krajewski (2003, 2005a) und Fritz und Ricken (2008) aufgezeigt wurden. Die mathematischen Vorkenntnisse bzw. das Vorwissen erklären einen Teil der Unterschiede in den späteren Leistungen im Mathematiklernen. Im nächsten Kapitel (2.2.6) wird beschrieben, wie sich numerische Basiskompetenzen, speziell das Zählen, zu Zählstrategien und ersten Rechenstrategien entwickeln.

2.2.6 Vom Zählen zum Rechnen

Kinder im Vorschulalter und zu Schulbeginn lösen Additions- und Subtraktionsaufgaben in der Regel, indem sie alles zählen, weiterzählen oder rückwärtszählen (Carpenter & Moser 1984, 180-184). Gerster (1996) beschreibt das zählende Rechnen als „fundamental für den Erwerb erster arithmetischer Fertigkeiten“ und als wichtigen Entwicklungsschritt, um Zahlbeziehungen zu verstehen. In einer Studie von Benz (2005) in der Primarstufe wurden bei knapp 45 Prozent aller Aufgaben beim Addieren und Subtrahieren im Hunderterraum zu Beginn des zweiten Schuljahres Zählstrategien eingesetzt. Nicht nur leistungsschwache oder durchschnittliche Kinder verwendeten zu Schuljahresbeginn noch Zählstrategien, auch leistungsstarke Kinder lösten 20 Prozent der Aufgaben durch Alleszählen, wobei bei diesen Kindern diese Strategie zur Schuljahresmitte fast vollständig verschwand. Innerhalb des gesamten zweiten Schuljahres lösten die Kinder, die mehr Rechenstrategien einsetzten, mehr Aufgaben korrekt als Kinder, die sich mit Zählstrategien behelfen. Richtige Lösungen wurden bei leistungsschwächeren Kindern am Ende des zweiten Schuljahres immer noch durch Zählstrategien gefunden, meist durch Weiterzählen. Im Folgenden werden diese Zählstrategien im Überblick dargestellt (Gaidoschik 2010a; Padberg & Benz 2011; Hess 2012; Moser Opitz 2013a, 101):

Alleszählen

Bei dieser ersten Zahlstrategie greifen die Kinder auf die erlernte Zahlwortreihe und das Zahlenverständnis zurück, mit dem Wissen, dass die Zahlen in einer festen Reihe angeordnet sind. Bei einer einfachen Addition werden die beiden Summanden separat voneinander ausgezählt (Sum-Strategie), beginnend bei eins. Zählen die Kinder beide Summanden durch, wird erneut durch Alleszählen

die Gesamtanzahl bzw. Summe ermittelt. Beispielsweise werden vier Plättchen und fünf Plättchen ($4 + 5$) hingelegt und ausgezählt. In einer erweiterten Variante wird nach den ersten ausgezählten Summanden direkt weitergezählt, z.T. indem sich die Kinder den zweiten Summanden mental vorstellen: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Diese Variante des Alleszählens erfordert erhöhte Konzentration und Gedächtnisleistung, besonders wenn der zweite Summanden groß ist, da zwei Zählprozesse synchronisiert werden müssen. Häufig wird das Alleszählen durch die Finger begleitet.

Weiterzählen vom ersten Summanden aus

Diese Strategie ist eine Weiterentwicklung des Alleszählens. Für das Beispiel $4 + 5$ bedeutet das, dass nicht mehr von eins bis neun, sondern nur noch fünf, sechs, sieben, acht und neun gezählt wird. Beim Weiterzählen (counting on) wird der erste Summand simultan erfasst und direkt als Zahl benannt, ohne abzuzählen (Gaidoschik 2010a, 104). Bei der Addition durch Weiterzählen bearbeiten die Kinder zwei Zahlenreihen parallel im Kopf, um herauszufinden, wann der zweite Summand zu Ende gezählt ist. Beispielsweise wird bei $8 + 7$ (beginnend mit der neun) um sieben weitergezählt, sodass das Kind gleichzeitig beim Weiterzählen ab neun darauf achten muss, wann die sieben erreicht ist. Ein damit häufig verbundener Fehler ist der so genannte Minuseins- oder Pluseins-Fehler, der zu falschen Ergebnissen führt (Geary, Bow-Thomas & Yao 1992), wie am folgenden Beispiel des Minuseinsfehlers bei der Aufgabe $8 + 7 = 14$ aufgezeigt wird:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	<u>14</u>	15
							1	2	3	4	5	6	7	

Abbildung 4: Weiterzählen vom ersten Summanden aus

Dabei wird beim Addieren oder Subtrahieren die Ausgangszahl mitgezählt, infolgedessen bei der Addition das Ergebnis um eins kleiner wird und bei der Subtraktion um eins größer oder um eins kleiner (Hasemann 2007; Schmassmann & Moser Opitz 2008). Besonders schwierig bei der Subtraktion ist, dass die beiden Zahlenreihen gegenläufig sind. Zum einen muss zurückgezählt werden, zum anderen muss die zurückgezählte Anzahl nachgehalten werden. Es sind zwei Zählprozesse, die das Vorwärts- und Rückwärtszählen gleichzeitig fordern. Dieses Aufrechterhalten bzw. Präsenthalten der zwei gegenläufigen Zählreihen wird als „keeping track“ (Gaidoschik 2010a, 105) bezeichnet.

Verwenden die Kinder die ergänzende Weiterzählstrategie (counting to) für die Subtraktion, entfällt das Problem der Gegenläufigkeit. Für das Beispiel $9 - 6$ müssen „sieben“, „acht“, „neun“ weitergezählt und gleichzeitig drei Zählsschritte gemerkt werden (ebd. 105). Dabei kommen häufig die Finger bzw. die Fingerbilder als scheinbare Vereinfachung zum Einsatz, da sich die zählend rechnenden Kinder darüber die Anzahl der Zählsschritte merken können (ebd. 105).

Weiterzählen vom größeren Summanden aus

Diese Strategie (auch Min-Strategie genannt) ist eine weitere Vereinfachung, in der Hinsicht, dass vom größeren Summanden aus weitergezählt wird, auch wenn es sich dabei um den zweiten Summanden handelt. Bei der Aufgabe $4 + 5$ wird nicht mehr 5, 6, 7, 8, 9, sondern direkt von 5 aus (6, 7, 8, 9) vorwärts gezählt. Hinter dieser Strategie steht das Kommutativgesetz der Addition ($4 + 5 = 5 + 4$; $a + b = b + a$), das die Kinder bereits hier implizit anwenden, bevor es im Unterricht thematisiert wird. Diese Mischstrategie des Weiterzählens deutet auf einen wichtigen Entwicklungsschritt hin, da die Kinder erste operative Einsichten, wie z.B. Teile-Ganzes-Prinzip und Zahlerhaltung, anwenden.

Weiterzählen vom größeren Summanden aus in größeren Schritten

Bei dieser Zählstrategie des Weiterzählens vom größeren Summanden aus in größeren Schritten gelingt es bei sicherer Zählkompetenz nicht, in Einerschritten weiterzuzählen, sondern in größeren Zahleneinheiten. Beispielsweise würde bei der Lösung der Aufgabe $8 + 9$ zunächst die Tauschaufgabe $9 + 8$ gewählt und in Zweierschritten (11, 13, 15, 17) oder in Vierserschritten (13, 17) weitergezählt.

Ableiten

Das Ableiten von Lösungen bei Additions- und Subtraktionsaufgaben erfordert die Einsicht in operative Beziehungen (Padberg & Benz 2005; Gaidoschik 2010a, 426; Wittmann 2011). Diese Strategien werden auch als nicht-zählende Strategien bezeichnet, da automatisierte Zusammenhänge genutzt werden, um eine neue Aufgabe zu lösen (Gaidoschik 2010a, 23). Ableitungsstrategien erleichtern den Rechenprozess und helfen, Beziehungen zwischen den Zahlen und Operationen zu entdecken (Gerster 2007). Das Prinzip der Tauschaufgaben ($a + b = c \rightarrow b + a = c$) stellt eine erste Ableitungsstrategie dar, die Kinder bereits bei der Anwendung der Min-Strategie einsetzen, d.h. Weiterzählen vom größeren Summanden aus bei der Addition. Die Kinder nutzen an dieser Stelle bewusst oder weniger bewusst das Kommutativgesetz. Darüber hinaus können auch Nachbaraufgaben angewendet werden ($a + b = c \rightarrow a + [b + 1] = c + 1$). Dabei gibt es zwei Varianten: Verdoppeln plus 2 (z.B. $8 + 8 = 16 \rightarrow 9 + 8 = 17$)

oder das „Rechnen mit der 9“ (z.B. $10 + 3 = 13 \rightarrow 9 + 3 = 12$) (Gerster 2007; Gaidoschik 2010a, 333f.). Bei den sogenannten Umkehraufgaben ($a + b = c \rightarrow c - b = a$ bzw. $c - a = b$) müssen die Kinder die Addition als Umkehrung der Subtraktion erkennen. Hinzu kommt, dass zunehmend mit Hilfe des Teile-Ganzes-Konzeptes die Zahlentripel, aus dem sich die Aufgabe zusammensetzt, abgerufen werden können (Lorenz 2000; Gerlach, Fritz, Ricken & Schmidt 2007, 17; Lorenz 2015; Häsel-Weide 2016, 16). Weitere Ableitungsstrategien sind beispielsweise das Ergänzen zum Zehner (decomposition-to-ten; Verschaffel et al. 2007), das gegensinnige Verändern ($a + b = c \rightarrow [a - 1] + [b + 1] = c$), dekadische Analogien (z.B. $3 + 6 = 9$ und $13 + 6 = 19$) oder die Einsicht in die Konstanz der Summe ($a + b = c \rightarrow [a + x] + [b - x] = c$) (Gerster 2007).

Diese Ableitungsstrategien werden zum Teil von Kindern benutzt ohne explizites Wissen darüber, allerdings sollten vor allem zählend rechnende Kinder, deren Fokus auf Zählstrategien liegt, an das Ableiten herangeführt werden, um Zahl- und Operationsbeziehungen zu entdecken und anwenden zu können (Häsel-Weide 2016).

Abrufen (Automatisieren)

Beim Abruf von Faktenwissen während des Lösen einer Kopfrechenaufgabe wird das Ergebnis direkt aus dem Langzeitgedächtnis abgerufen (Gerster 1994; Gaidoschik 2010a; Moser Opitz 2013a; Häsel-Weide 2016). Die Lösung von Kopfrechenaufgaben wurde auswendig gelernt bzw. automatisiert. Dabei gibt es bestimmte Aufgaben, die schneller automatisiert werden als andere, wie z.B. die Verdopplungsaufgaben (Gaidoschik 2010a, 328). Automatisieren bedeutet zum einen, dass Fakten gespeichert, und zum anderen auch bei Bedarf für die aktuelle Aufgabenbearbeitung abgerufen werden können. Kernaufgaben werden beispielsweise aus den wichtigen Zerlegungen im Zahlenraum bis 10 gewonnen. Es gehören aber auch Verdopplungs- und Halbierungsaufgaben, Aufgaben mit $10 + x$ oder das Ergänzen bis 10 bzw. 20 zu den wichtigen Grundaufgaben (Scherer & Moser Opitz 2010, 99).

Hess (2012) fasst zusammen, dass viele Kinder die Zählstrategien in der beschriebenen Richtung „durchlaufen“, aber nicht linear und vollständig. Dabei können bestimmte Zählstrategien nicht angewendet werden oder die Kinder wechseln zwischen verschiedenen Varianten abhängig von der konkreten Aufgabe. Teilweise werden auch Zählstrategien parallel genutzt (Gaidoschik 2010a, 105). Zwar werden erste Rechenoperationen durch diese Zählstrategien durchgeführt, trotzdem ist es wichtig, dass die Kinder im Verlauf der ersten Schuljahre weiterführende Strategien entwickeln können und diese verstehen lernen, damit sich das zählende Rechnen nicht verfestigt (Gerster & Schultz 2004).

2.3 Verfestigtes zählendes Rechnen – Merkmale und Schwierigkeiten

Das zählende Rechnen ist ein normaler Entwicklungsschritt beim Erwerb arithmetischer Kompetenzen (Kap 2.2, 2.2.6). In der Regel lösen sich Kinder in der Mitte und am Ende des ersten Schuljahres (Lorenz & Radatz 1993; Gaidoschik 2010a) vom zählenden Rechnen mit zunehmender Einsicht in die Zahl- und Operationsbeziehungen. Vollzieht sich die Ablösung vom zählenden Rechnen und die Entwicklung nicht-zählender Strategien nicht in diesem Zeitraum, wird vom verfestigten zählenden Rechnen (Lorenz & Radatz 1993; Schipper 2005a; Scherer & Moser Opitz 2010; Lorenz 2015; Häsel-Weide 2016) gesprochen. Verfestigtes zählendes Rechnen wird somit zur mathematischen Lernschwierigkeit, weil es nicht eine entwicklungsbedingte Verzögerung ist, sondern die Kinder bei dieser Strategie bleiben (Gaidoschik 2010a, 16). Gaidoschik (2009a, 170) verdeutlicht ebenso: „Ein Kind, das Ende der ersten Schulstufe vorwiegend zählend rechnet, ist nicht deshalb schon »rechenschwach«; aber es läuft Gefahr, unter dem Druck kommender schulischer Anforderungen »rechenschwach« zu werden“.

Merkmale verfestigten zählenden Rechnens

Problematisch und weniger tragfähig werden diese verfestigten zählenden Rechenstrategien besonders im erweiterten Zahlenraum ab 20. Folgende Merkmale zeigen auf, warum das verfestigte zählende Rechnen im weiteren Verlauf zu Schwierigkeiten führen kann (Krauthausen 1995; Gerster 1996; Gaidoschik 2003, 2009; Scherer & Moser Opitz 2010; Padberg & Benz 2011; Lorenz 2015). Zählende Rechnerinnen und Rechner:

- operieren meistens mit Einerschritten, fassen Zahlen nicht zu größeren Einheiten zusammen und erfassen Anzahlen nicht strukturiert.
- verstehen Zahlen oftmals nicht oder nicht in erster Linie kardinal als eine Menge (verknüpft mit der Frage nach Anzahl), sondern ausschließlich ordinal als Punkt in einer Reihe, als eine Station in einer auswendig gelernten Folge von Zahlennamen.
- betrachten jede Rechnung als Einzelfaktum, d.h. losgelöst von anderen Rechnungen.
- haben oft keine Vorstellungen von den Rechenoperationen.
- zählen häufig nur in Einerschritten, es fällt ihnen schwer, größere Einheiten zu erkennen, wie z.B. Zehnerbündel, sodass dadurch die Einsicht in die dezimalen Strukturen des Zahlsystems erschwert wird. Umgekehrt führen

mangelnde Einsichten ins Stellenwertsystem dazu, dass nur zählende Rechenstrategien zum Einsatz kommen.

- lösen häufiger Aufgaben nicht korrekt, da zählendes Rechnen sehr fehleranfällig ist, vor allem im erweiterten Zahlenraum ab 20 und bei Operationen wie Multiplikation und Division.
- müssen ermittelte Teilergebnisse beim schriftlichen Rechnen im Gedächtnis behalten, wobei die zählend gerechnete Zwischenergebnisse mehr Zeit in Anspruch nehmen und fehleranfälliger sind.

Das zählende Rechnen führt im kleinen Zahlenraum meist noch zum richtigen Ergebnis und somit von den Kindern als erfolgreiche Strategie angesehen. Sie können nicht abschätzen, dass dieses Vorgehen im größeren Zahlenraum schwierig und ineffizient wird. Es wurde bereits beschrieben, dass verfestigt zählende Rechner häufig Schwierigkeiten im ordinalen und kardinalen Zahlenverständnis haben (Kap. 2.2.2), die als zentrale und sich ergänzende Zahlaspekte angeführt werden (Wember 2003, 62). Das Zählen sollte „im Unterricht nicht diffamiert, sondern kultiviert werden, denn es ist die kindgemäße Methode der Zahlbestimmung und führt zum zählenden Rechnen, das zum einsichtigen und planvollen Rechnen weiterentwickelt“ (ebd.) werden muss.

Fingerzählen

Unterstützend zum Zählen oder auch ersten Rechnen nutzen Kinder verschiedene Materialien oder ihre Finger. Insbesondere letztere werden häufig als Zählhilfe verwendet, da sie schnell verfügbar sind (Lorenz 1996, 2015). Einige Kinder zählen auch mit versteckten Fingern, tippenden Füßen, zählen leise vor sich hin oder nicken mit dem Kopf. Dabei werden die Finger unterschiedlich als Hilfsmittel benutzt. Zum einen werden die Finger dynamisch eingesetzt, indem sie nacheinander einzeln ausgestreckt oder beim Rückwärtszählen eingeklappt werden. Zum anderen lässt sich der statische Einsatz der Finger beobachten, bei dem die Kinder die Finger nicht einzeln ausstrecken, sondern die jeweilige Anzahl direkt mit einem einmalig ausgestreckten „Fingerbild“ darstellen und das Ergebnis ablesen. Gaidoschik (2010a, 244) bezeichnet diese Strategie auch als nicht-zählenden Fingergebrauch und erweitert die Fingerzählstrategien um das „Finger-Teilzählen“, als Mischform zwischen statischem und noch teilweise dynamischem Gebrauch der Finger. Hierbei stellt das Kind die Ausgangszahl nicht-zählend mit den Fingern dar, führt aber die Operation zählend durch, indem die entsprechende Anzahl von Fingern ausgestreckt bzw. umgeklappt und bei eins beginnend gezählt wird, bis die dem zweiten Summanden oder Subtrahenden

entsprechende Zahl erreicht ist. Das Ergebnis wird beim Finger-Teilzählen direkt am erzielten Fingerbild nicht-zählend abgelesen.

Ob das Fingerrechnen als Hilfsmittel beim Rechnen legitim ist oder unterbunden werden soll, wird häufig und unterschiedlich diskutiert (Scherer & Moser Opitz 2010; Gaidoschik 2012; Moeller & Nuerk 2012). Einerseits werden die Finger als Hilfsmittel zugelassen, da sie bereits im Vorschulalter für das Zählen und erste einfache Rechenaufgaben verwendet werden und sie sind Anschauungsmittel, auf die die Kinder jederzeit zurückgreifen können. Es zeigt sich häufig, dass sie sich mit zählenden Strategien und Fingerzählen behelfen, da ihnen diese Strategie vermeintlich sicherer erscheinen (Schipper 2005b, 20). Andererseits führt das statische Fingerzählen, d.h. das Abzählen in Einerschritten, zu verfestigten Zählstrategien und schränkt den Zahlenraum auf die Anzahl der Finger ein. Dies macht eine Unterscheidung zwischen statischem und dynamischem Fingerzählen erforderlich. Beim Abzählen in Einerschritten mithilfe des dynamischen Zählens werden die Finger nacheinander ausgestreckt, um den ersten Summanden zu zeigen. Schließlich werden weitere Finger nacheinander aufgeklappt, um den zweiten Summanden zu addieren. Ebenso kann der erste Summand gar nicht gezeigt werden und nur der zweite Summand durch dynamisches Weiterzählen in Einerschritten mit den Fingern hinzugezählt werden. Allerdings sind auch diese Vorgehensweisen äußerst fehleranfällig, da sich die Kinder merken müssen, wie viele Finger schon gezählt wurden. In einer Untersuchung von Jordan, Kaplan, Ramineni und Locuniak (2008) wurde ein signifikanter Zusammenhang zwischen dem Fingerzählen und den Fehlerhäufigkeiten vom Vorschulalter ($r = .58$) bis ins zweite Schuljahr ($r = -.15$) nachgewiesen.

Wiederum gibt es zählende Rechnerinnen und Rechner, die durchaus im Zahlenraum bis 20 ihre Zähl- und Fingerzählstrategien soweit ausgebaut haben, dass sie sehr schnell und in diesem Rahmen effizient angewendet werden können, jedoch darüber hinaus nicht mehr tragfähig sind (Häsel-Weide 2016). Anhand zählenden Rechnens wird das richtige Ergebnis in dem Fall zwar gefunden (Siegler 2001, 383), aber es stellt sich die Frage, wie anstelle dessen eine Ablösung vom verfestigten zählenden Rechnen erreicht werden kann, um das Zahlenverständnis zu erweitern. Ebenso wird im Kontext des Fingerrechnens untersucht, inwiefern ein Zusammenhang zwischen der Fingeragnosie, als Fähigkeit die Finger bei geschlossenen Augen unterscheiden, benennen und vorzeigen zu können, und dem Zahlenverständnis sowie späteren Rechenfertigkeiten zu finden ist (Kohn, Kucian, Wuithschick, Mayer, Rascher, McCaskey, Käser, Poltz, Wyschkon, Quandt, Esser & Aster 2015). Hierfür konnte kein signifikanter Zusammenhang nachgewiesen werden (ebd.), ebenso erwies sich die Fingeragnosie (Poltz, Wyschkon, Hösel, von Aster & Esser 2015) nicht als eindeutiger Prädiktor für spätere numerisch-arithmetische Leistungen.

Schwierigkeiten des ordinalen Verständnisses

Je flexibler die Zahlwortreihe erlernt wird, desto mehr kann sich der ordinale Zahlaspekt entwickeln. Grundlegend ist, dass die Kinder sicher und flexibel vorwärts und rückwärts zählen, die Position einer Zahl in der Zahlenreihe und den Vorgänger und den Nachfolger einer Zahl bestimmen können. Je flexibler die Kinder beim Zählen sind, desto besser gelingt ihnen auch das Zählen in Schritten. Beim Zählen in Schritten werden die Einheiten größer als Eins zusammengefasst, sodass nicht einzeln gezählt wird (Moser Opitz & Schmassmann, 2007; Kaufmann & Wessolowski 2014).

Die Kinder lernen, sich auf der Zahlenreihe zu orientieren. Sobald sie in Zweier- und vor allem Fünfer- und Zehnerschritten zählen können, erweitert sich das Verständnis für den Zahlenraum und die dekadische Struktur des Zahlensystems, was wiederum grundlegend für das Verständnis des Stellenwertsystems ist (Krauthausen & Scherer 2007; Schmassmann & Moser Opitz 2007; Steinweg 2009). Vornehmlich zählend rechnenden Kindern fehlt eine sichere Zählkompetenz, was dazu führt, dass sie unsicher und fehlerhaft zählen und Resultate beim Rechnen aufgrund dieser unsicheren Zählkompetenz häufiger überprüfen. Es wurde nachgewiesen, dass Probleme im verbalen Zählen einen zentralen Prädiktor für mathematische Schwierigkeiten darstellen können bzw. rechenschwache Kinder häufig über eine geringere Zählkompetenz verfügen (Geary et al. 1999; Geary et al. 2000; Geary & Hoard 2005; Geary, Bailey & Hoard 2009; Stock, Desoete & Roeyers 2010; Moser Opitz 2013a). Auch Landerl und Kaufmann (2008) heben die zentrale Bedeutung des Zählens als Voraussetzung für die Herausbildung von Rechenoperationen wie Addition und Subtraktion und damit als Voraussetzung für die arithmetische Kompetenz hervor (Schneider et al. 2013, 23). Erst das sichere Zählen ermöglicht den Kindern, Zahlbeziehungen zu entdecken und anzuwenden (Moser Opitz & Schmassmann 2007).

Insbesondere das Zählen in Schritten, wie z.B. in Zweier-, Fünfer- oder Zehnerschritten (Scherer & Moser Opitz 2010, 115; Moser Opitz 2013a, 84), begünstigt Einsichten in den Zahlaufbau und das Stellenwertsystem, bringt allerdings für rechenschwache Schülerinnen und Schüler Schwierigkeiten und Fehler beim Zählen mit sich, wie beispielsweise beim Auslassen von Zahlen, beim Wechsel der Zähl Schritte oder bei Zehnerübergängen (Schäfer 2005; Moser Opitz 2008; Freesemann 2014, 40). Zählende Rechnerinnen und Rechner haben Schwierigkeiten, Zahlen in größere Einheiten zusammenzufassen und operieren meist in Einerschritten. Schäfer (2005, 80) betont:

„Das Zählen in Schritten stellt vermutlich einen Übergang von (in Einerschritten) zählenden Strategien hin zum Entdecken und Nutzen nicht-zählender Rechenstrategien dar, vor allem dann, wenn es an Vorstellungen von gegliederten Quantitäten [Hervorhebung im Original] gekoppelt ist.“

Es stellt sich die Frage, warum speziell zählend rechnende Kinder länger auf dieser ordinalen Ebene bleiben und Zahlen als einzelne Einheiten und Zahlwörter der (linearen) Zahlenreihe verstehen. Verfestigt zählend rechnende Kinder verstehen Zahlen eher als Positionen, wie sie auf dem Zahlenstrahl dargestellt sind oder in der Zahlwortreihe vorkommen, was deutlich wird, wenn sie am Material mit Hilfe der Zahlwortreihe Plättchenmengen in Einerschritten zählen (Gerster 2009, 253). Auch Gaidoschik (2009a, 167) führt an, dass diese Kinder auf der Ebene des ordinalen Verständnisses stehen bleiben, sodass Addition und Subtraktion als Vor- und Rückwärtszählen der Zahlwortreihe verstanden wird.

Schwierigkeiten des kardinalen Verständnisses

Zu Beginn der Schulzeit ist das Zählen zentral, um Anzahlen zu bestimmen. Auf die Frage hin „Wie viele sind es?“ können zwei bis drei beliebig angeordnete Objekte bereits ab ungefähr zwei Jahren simultan erfasst werden („Subitizing“), ohne sie abzuzählen (Piazza, Mechelli, Butterworth & Price 2002; Desoete, Ceulemans, Roeyers & Huylebroek 2009).

Subitizing wird von der Fähigkeit unterschieden, größere strukturierte Anzahlen von Objekten auf einen Blick zu erfassen – die sogenannte quasi-simultane Anzahlerfassung (Krajewski 2003, 55; Gerster 2009, 251). Die zu bestimmende Anzahl wird in simultan erfassbare Teilmengen zerlegt (Gerster 2009, 251). Die Einsicht, dass eine größere Anzahl zählend ermittelt werden kann, um zu beantworten, wie viele es sind, ist ein erster Erkenntnisschritt zum kardinalen Verständnis. Zwar gelingt es über die Eins-zu-Eins-Zuordnung (Kap. 2.2.2), jedem Objekt eine Zahl zuzuordnen und diese abzuzählen, allerdings wird zunächst nicht verstanden, dass darüber die Anzahl ermittelt werden kann. Meist werden die Kinder dann angehalten, das letzte Zahlwort erneut zu nennen, um die Anzahl der Menge wiederzugeben. Für viele Kinder ist es zunächst schwierig, auf Nachfrage nach der Anzahl einer gezählten Menge damit zu antworten. Sie beginnen erneut zu zählen, da hinter der gezählten Wortreihe noch keine Menge verstanden wird. Auch wenn diese Regel angewendet wird (last word rule) ist noch nicht sichergestellt, ob dahinter ein kardiales Verständnis steht (Gaidoschik 2010b, 20; Moser Opitz 2013a, 86).

Um das Verständnis von Mengen zu fördern, ist es wichtig, dass die Kinder zunehmend mit strukturierten Mengenbildern arbeiten, um sich vom Abzählen einer Menge durch die Eins-zu-Eins-Zuordnung zu lösen. Dafür sollten zunächst die Anzahlen strukturiert angeordnet werden, sodass sie simultan erfasst werden können. Hilfreich sind insbesondere mathematische Strukturen (Fünfer-, Zehnerstruktur, „Kraft der Fünf“; Krauthausen 1995) oder alltägliche Zahlbilder (v.a. Würfelbilder), die die Kinder entdecken und nutzen (Steinweg 2009; Wittmann 2011). Wenn die Kinder ihre Zählfertigkeiten mit dem kardinalen Ver-

ständnis – einer Anzahl als Menge – verknüpfen, dann „werden die anfänglichen Zählstrategien als Mittel zur Manipulation von Mengenzahlen begriffen“ (Krajewski 2005a, 155). Die Kinder vergleichen Mengen, z.B. mehr, weniger, gleich viel, und verändern diese durch Hinzuzählen und Wegnehmen (Kap. 2.2.3). Durch das kardinale Verständnis werden Zählstrategien angewendet. Kommt es zur Verbindung sicherer Zählfertigkeiten und der Einsicht in das kardinale Verständnis, wird eine Grundlage geschaffen, um das Zahlensystem zu verstehen. Gaidoschik (2010a, 97) hebt hervor, dass Kinder ein Verständnis von Zahlen brauchen, wie das Verständnis von Zahlen als Anzahlen, um erste Rechenoperationen durchzuführen.

Schwierigkeiten im Verständnis des Teile-Ganzes-Prinzips

Weiterführend zum ordinalen und kardinalen Zahlenverständnis kann eine Zahl auch eine Beziehung zwischen zwei Mengen darstellen, die sich linear in einem Abschnitt auf dem Zahlenstrahl abbilden lässt (Kap. 2.2.3, 2.2.4). Kinder mit mathematischen Lernschwierigkeiten, die mehr Zeit für die Verknüpfung von Zahlen- und Mengenwissen benötigen (Fritz & Ricken 2008, 50) und somit auch Schwierigkeiten beim Verstehen des Kardinalzahlprinzips haben, fehlt ein wichtiger Baustein, um das Teile-Ganzes-Prinzip zu entdecken und zu verstehen (Ennemoser & Krajewski, 2007; Humbach 2008). Die „Zahl als Relation zwischen Mengen“ weist auf das Teile-Ganzes-Prinzip hin (Krajewski 2005a und 2005b; Stern 2005; Hess 2012). Dieses Prinzip beschreibt, dass Zahlen in kleinere Zahlen zerlegt und zusammengesetzt werden können, wie z.B. dass sieben Elemente in drei und vier Elemente aufteilbar sind. Hinzu kommt, dass es Beziehungen zwischen den einzelnen Zahlen gibt, die sich wiederum mit Zahlen darstellen lassen (Mengendifferenz), wie z.B. sieben Elemente sind drei mehr als vier (Resnick 1983; Resnick 1992; Lorenz 2007; Häsel-Weide et al. 2015). Der relationale Zahlaspekt wird beispielsweise in der folgenden Aufgabenstellung deutlich: „Lukas hat sieben Karten. Jonas hat drei Karten. Wie viele Karten hat Jonas weniger als Lukas?“

Kinder müssen diese Einsicht in die Beziehung des Ganzen und seinen Teilen gewinnen, um vom Zählen und Bestimmen von Mengen zu einem arithmetischen Verständnis von Zahlen zu gelangen. Die Kinder lernen darüber hinaus, dass die Teile im Ganzen erhalten bleiben und wenn ein Teil weggenommen wird, bleibt ein restlicher Teil des Ganzen übrig. Das weggenommene Teil kann aber wieder zurückgegeben werden, um das Ganze wiederherzustellen und wenn ein Teil vermehrt wird, dann vermehrt sich auch das Ganze, wenn es nicht durch das Vermindern des anderen Teils ausgeglichen wird (Resnick 1992). Das Teile-Ganzes-Prinzip muss im mathematischen Anfangsunterricht auf die Zahlen übertragen werden, damit die Kinder Zahlzerlegungen verstehen und später automati-

sieren können (Gerster & Schultz 2000). In einer Längsschnittstudie wiesen Krajewski und Scheider (2009) nach, dass diese Verknüpfung zwischen Anzahl- und Mengenkonzept einen zentralen Prädiktor für die spätere Mathematikleistung darstellt. Auch Weißhaupt und Peucker (2009, 52) bezeichnen das kardinale und das Teile-Ganzes-Verständnis als die beiden zentralen Konzepte auf dem Weg zum Rechnen lernen. Wenn diese nicht erfolgreich erworben werden, dann nutzen die Kinder eher ineffektivere und häufig zählende Strategien beim Rechnen.

Zählend rechnenden Kindern fällt es schwer diese Einsicht zu erlangen, da sie meist mit einzelnen Einheiten operieren bzw. Elemente einzeln abzählen oder Additions- und Subtraktionsaufgaben ohne Mengenverständnis durch das Vor- und Rückwärtszählen der Zahlwortreihe lösen (Fritz & Ricken 2008; Häsel-Weide et al. 2015). Um Rechenoperationen zu verstehen, sind das wesentliche Voraussetzungen, wie beispielsweise für das Ergänzen oder beim Dividieren und um später die Einsicht in das Stellenwertsystem zu erlangen bzw. eine Zahl in ihre Stellenwerte zu zerlegen (Langhorst, Ehlert & Fritz 2012). Bei Kindern, die verfestigt zählend rechnen, muss überprüft werden, inwieweit sie über ein Teile-Ganzes-Konzept verfügen. Beispielsweise erkennen die Kinder nicht, dass $30 + 5$ eine Zahl bedeutet, die aus 30 und 5 zusammengesetzt wird bzw. in diese Zahlen zerlegt werden kann, sondern ermitteln diese, indem sie von 30 aus 5 weiterzählen (Gerster 2009). Zählendes Rechnen verhindert das Teile-Ganzes-Prinzip zu verstehen (Kap. 2.2.3, 2.2.4) (Gaidoschik 2010a, 176).

Auch wenn sie in der Lage sind, zählend Additions- und Subtraktionsaufgaben zu lösen, kann dies ohne Bezug auf Mengen geschehen. Die zählend rechnenden Kinder lösen die Aufgaben dann gemäß einer mechanisierten Zählprozedur. Es fehlt die Einsicht in die Grundvorstellung zur Addition und Subtraktion (3.2.3) und das Verständnis vom Ganzen und seinen Teilen (Resnick 1983). Dies hat zur Folge, dass keine Beziehungen zwischen den Zahlen und den Aufgaben gesehen werden (können), sondern die Kinder jede Aufgabe mit der entsprechenden Zählprozedur berechnen müssen, denn erst ein Teile-Ganzes-Verständnis begünstigt es, beispielsweise den Zusammenhang zwischen $18 - 8$ und $17 - 8$ zu sehen, da die 18 in $17 + 1$ zerlegt werden kann. Das Teile-Ganzes-Verständnis ermöglicht somit flexibles Rechnen. Ebenso stellt das Stellenwertverständnis eine Besonderheit des Teile-Ganzes-Verständnisses dar, da eine Zerlegung einer Zahl in ihre Stellenwerte (z.B. $134 = 100 + 30 + 4$) nur auf der Grundlage eines Teile-Ganzes-Verständnis möglich ist. Insbesondere zählend rechnende Kinder nutzen z.T. weder intendierte noch selbst gewählte Strukturen, sondern zählen die Mengen einzeln ab. Dies ist ein Hinweis darauf, dass ihnen eine Deutung einer Menge im Sinne des Teile-Ganzes-Verständnis schwerfällt. Optional ist auch, dass sie zwar in der Lage wären, die Menge strukturell zu

deuten, es aber nicht tun, weil ihnen das Zählen als die sicherere Möglichkeit erscheint. Eine weitere Überlegung ist, dass zählend rechnende Kinder dem Bestand der Strukturen nicht vertrauen; so kann beobachtet werden, dass bereits gezählte Teilmengen (z.B. die oberer Reihe eines Zwanzigerpunktfeldes) bei der nächsten Mengenbestimmung noch einmal abgezählt werden.

Schwierigkeiten beim Abrufen und Automatisieren

Zählende Rechnerinnen und Rechner haben u.a. Schwierigkeiten beim Automatisieren von Rechenaufgaben bzw. Kernaufgaben. Dadurch stehen ihnen wenig automatisierte Kernaufgaben zur Verfügung, die sie für das Ableiten nutzen könnten. Beide Prozesse – das Speichern und das Abrufen mathematischer Fakten – werden in Zusammenhang gebracht und können für rechenschwache Schülerinnen und Schüler eine Schwierigkeit darstellen (Jordan & Hanich 2000; Donczik 2001; Geary 2004; Barouilett & Lépine 2005; Gersten et al. 2005, 296; Krajewski & Schneider 2008; Moser Opitz 2013a). Das erfordert zudem eine enorme Gedächtnisleistung, da beim zählenden Rechnen gleichzeitig numerische und verbale Informationen gespeichert werden müssen (Scherer & Moser Opitz 2010). Geary, Brown und Samaranayake (1991) weisen darauf hin, dass zählen- und rechnen Assoziationen zwischen der Aufgabe und dem Resultat verhindert, da der Zählprozess im Vordergrund steht. Verfestigte Zählstrategien und Fingerzählen im Grundschulalter erschweren das Abrufen von arithmetischen Fakten und verhindern die Entwicklung „computational fluency“ (Jordan et al. 2003; Geary 2004), woraus geschlossen wird, dass die Förderung von effizienteren und weiterführenden Rechenstrategien ein Bestandteil der Intervention für Schülerinnen und Schülern mit mathematischen Lernschwierigkeiten sein sollte (Bryant et al. 2008, 22).

Nach der Darstellung der Schwierigkeiten der zählenden Rechnerinnen und Rechner während der Entwicklung des Zahlenverständnisses bzw. mathematischer Kompetenzen werden im folgenden Kapitel (Kap. 2.4) mögliche Ursachen zählenden Rechnens erörtert. Dabei werden der Einfluss der Arbeitsgedächtniskapazität (Kap. 2.4.1) und der unterrichtlichen Faktoren (Kap. 2.4.2) diskutiert.

2.4 Ursachen verfestigten zählenden Rechnens

Es gibt verschiedene Ansätze zur Erklärung der Ursachen mathematischer Lernschwierigkeiten. An dieser Stelle werden Faktoren beschrieben, die sich auf das verfestigte zählende Rechnen beziehen, die in einem engen und teilweise empirisch belegten Zusammenhang stehen.

2.4.1 Arbeitsgedächtnis im Kontext zählenden Rechnens

Viele Studien (z.B. Gaupp 2003; Geary 2004; Lee Swanson 2004; Lee Swanson & Beebe-Frankenberger 2004; Barouillet & Lépine 2005; Krajewski & Schneider 2006; Geary, Hoard, Byrd-Craven, Nugent & Numtee 2007) weisen nach, dass Schülerinnen und Schüler mit schwachen Mathematikleistungen aufgrund von Beeinträchtigungen des Arbeitsgedächtnisses Probleme mit dem Abruf von Zahlenfakten bzw. arithmetischem Faktenwissen haben. Dies gilt als Ursache dafür, dass oft auf abzählende Rechenstrategien ausgewichen wird. Der Vergleich von Kindern mit und ohne mathematische Lernschwierigkeiten im ersten und zweiten Schuljahr verdeutlicht ebenfalls, dass die Unterschiede im Faktenabruf auf die Ressourcen des Arbeitsgedächtnisses zurückzuführen sind (Geary, Brown & Samaranayake 1991). Weitere empirische Hinweise zeigen, dass sich Probleme während des Abrufens von Zahlenfakten mit der mangelhaften Kompetenzentwicklung erklären lassen (ebd.). Es stellt sich die Frage, welche Arbeitsgedächtnisprozesse dabei involviert sind. In den folgenden Ausführungen wird zunächst das Arbeitsgedächtnismodell erläutert. Anschließend werden empirische Studien herangezogen, um mögliche Zusammenhänge zwischen begrenzter Arbeitsgedächtniskapazität und (mathematischen) Lernschwierigkeiten aufzuzeigen und diese im Speziellen für das zählenden Rechnen zu diskutieren.

Arbeitsgedächtnismodell – Komponenten und deren Beteiligung am Rechnen

Viele Studien haben gemein, dass sie sich auf das theoretische Modell Baddeleys (1986) beziehen, der in seinem Arbeitsgedächtnismodell verschiedene Funktionsbereiche anführt, die an den Gedächtnisprozessen beteiligt sind. Auf dieser theoretischen Modellgrundlage werden den einzelnen Komponenten Funktionen zugeschrieben. Nach Baddeley (1999) besteht das Arbeitsgedächtnis aus der Zentralen Exekutive, der phonologischen Schleife und dem visuellen Skizzenblock (vgl. Abb. 5):

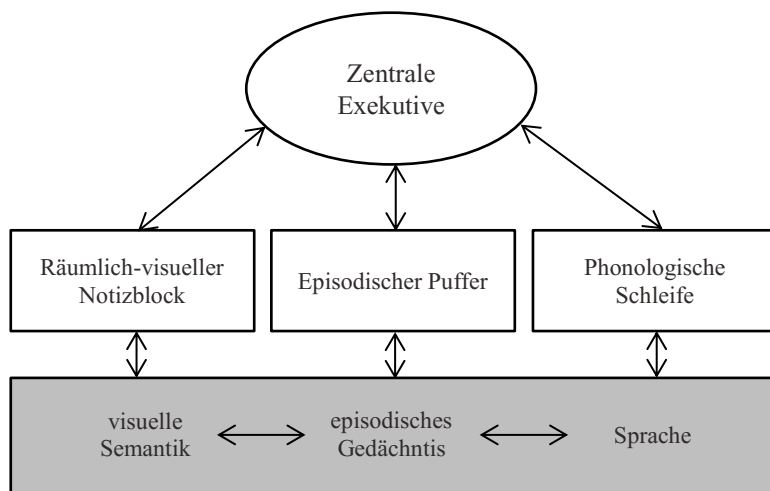


Abbildung 5: Arbeitsgedächtnissmodell nach Baddeley (2000)

Die übergeordnete Komponente – die Zentrale Exekutive – als Aufmerksamkeitssystem kontrolliert und steuert die phonologische Schleife und den visuellen Skizzenblock. Sie stellt die Verbindung zum Langzeitgedächtnis her und hält eine begrenzte Zahl von Informationen für kurze Zeit verfügbar. Als Vermittler für den Austausch von Informationen mit dem Langzeitgedächtnis ist der sogenannte episodische Puffer verantwortlich (Mähler & Schuchardt 2012, 64). Die phonologische Schleife trägt die Funktion des Aufbewahrens und Abrufens verbaler Informationen. Durch innerliches Wiederholen (Rehearsal) dieser verbalen und klanglichen Informationen werden diese für eine längere Zeit bewusst gehalten (Grube 2005; Grube 2009, 185). Es wird vermutet, dass die phonologische Schleife für das Zählen und für das Aufrechterhalten von Fakten bei der Bearbeitung komplexer Rechenaufgaben wichtig ist. Der visuelle Skizzenblock speichert und verarbeitet visuelle und räumliche Inhalte. In verschiedenen Studien werden meist die drei Komponenten und deren Funktionen erforscht, was wiederum zu sehr unterschiedlichen Aussagen über die Beteiligung beispielsweise beim Lösen von Rechenaufgaben nach sich zieht.

Empirische Studien zur Funktionsweise der Komponenten des Arbeitsgedächtnisses

Mit 97 Zweit- bis Viertklässlern (Alter von sieben bis zehn Jahren) führten Schuchardt, Mahler und Hasselhorn (2008) eine Studie durch, um die Rolle der verschiedenen Arbeitsgedächtniskomponenten (zentrale Exekutive, phonologi-

sche Schleife, visueller Skizzenblock) für Schülerinnen und Schüler mit Lernschwierigkeiten (Dyslexia, Dyskalkulie, allgemeine Schulschwierigkeiten definiert nach ICD-10) zu untersuchen. Abhängig von Alter und IQ zeigten sich bei den Lernenden mit Leseschwierigkeiten eher Informationsverarbeitungsprobleme in der phonologischen Schleife und zentralen Exekutiven, weniger im visuellen Skizzenblock. Kinder mit mathematischen Lernschwierigkeiten (arithmetic learning disorders) hatten Schwierigkeiten bei Items, die den visuellen Skizzenblock beanspruchten. Ähnlich wie in weiteren Studien (Geary et al. 1999, 2000; McLean & Hitch 1999) konnten bei Kindern mit spezifischen arithmetischen Lernschwierigkeiten keine Probleme mit dem phonologischen Arbeitsgedächtnis ausgemacht werden. Es ließ sich auch keine Beeinträchtigung der zentralen Exekutive nachweisen, was anderen Untersuchungen widerspricht (Geary, Brown & Samaranayake 1991, 1999, 2000; Passolunghi & Siegel 2001). Schuchardt et al. (2008) vermuten, dass das daran liegt, dass in ihrer Studie nur Schülerinnen und Schüler mit mathematischen Lernschwierigkeiten mit durchschnittlicher Intelligenz einbezogen wurden, die anderen Studien berücksichtigten auch Lernende mit unterdurchschnittlicher Intelligenz. Insofern zeigen die Ergebnisse aus dieser Studie, dass die Verarbeitung von visuellen Informationen, wie z.B. bei der Zahldarstellung in strukturierten Mengen, einen zentralen Aspekt bei der Entwicklung arithmetischer Kompetenzen und somit für die Ablösung vom zählenden Rechnen darstellen. Bei diesen Ergebnissen muss auch die Präsentation der Aufgaben berücksichtigt werden, da das Arbeitsgedächtnis je nach Repräsentationsform unterschiedlich belastet wird (DeStefano & LeFevre 2004). Dies kann die Darstellungsform bzw. Anordnung, aber auch die Darbietung in visueller oder akustischer Art und Weise betreffen. Solche Überlegungen sind insbesondere wichtig, wenn es um die Konstruktion von Testaufgaben geht (Kap. 5.4.3). Es wurde festgestellt, dass abhängig vom Darbietungsformat bei Additionsaufgaben von ein- oder zweistelligen Zahlen die phonologische Schleife (horizontale Anordnung) oder der visuell-räumliche Skizzenblock (vertikale Anordnung) unterschiedlich stark beansprucht werden.

Es stellt sich die Frage, welche Arbeitsgedächtniskomponenten bei zählenden Rechnerinnen und Rechnern abhängig vom Alter eine Rolle spielen. Meyer, Salimpoor, Wu, Geary und Menon (2010) fanden in ihrer Studie mit Schülerinnen und Schülern im zweiten und dritten Schuljahr heraus, dass die zentrale Exekutive ein zuverlässigerer Prädiktor für die Mathematikleistung von Zweitklässlern ist als bei Drittklässlern. Diese Veränderung begründen Meyer und Kollegen mit der Entwicklung arithmetischer Kompetenzen in dieser Altersspanne. Für die Zweitklässler stünden vor allem die Ablösung vom zählenden Rechnen, die Anwendung flexiblerer Rechenstrategien (complex procedural strategies) und das Automatisieren arithmetischer Fakten im Vordergrund. Die zentrale

Exekutive ist für diese Prozesse bedeutsam. Sie wiesen außerdem nach, dass der visuell-räumliche Skizzenblock ein zuverlässigerer Prädiktor für mathematische Rechenkompetenzen im dritten Schuljahr darstellt. Darüber hinaus gibt es Hinweise darauf, dass der visuell-räumliche Skizzenblock bei der Visualisierung eine wichtige Rolle einnimmt, sei es bei der Repräsentation der strukturierten Zahldarstellung (Gerster 1994) oder der Wiedergabe des Schriftbildes einer Zifferngleichung. Um differenzierte Erkenntnisse zu haben, ist allerdings weitere Forschung nötig (Gaidoschik 2010a, 148).

Grube und Seitz-Stein (2012, 146) weisen ebenfalls darauf hin, dass mathematische Aufgaben unterschiedliche Anforderungen und Lösungswege beinhalten, wodurch die kognitiven Anforderungen beim Rechnen variieren können. Meist stellen mathematische Aufgaben Anforderungen in unterschiedlichen Bereichen. Die phonologische Schleife ist für das Erinnern von Aufgabeninformationen und Zwischenergebnissen und die zentrale Exekutive eher für die Planung der nächsten Rechenschritte bzw. Lösungsschritte verantwortlich (Fürst & Hitch 2000). Für das Kopfrechnen werden auch dem visuell-räumlichen Skizzenblock Funktionen zugewiesen, wenn es darum geht, die Positionen der Ziffern mental zu repräsentieren (Seitz & Schumann-Hengsteler 2000).

Theoretische Grundlagen zum Dual-Task-Verfahren

Um herauszufinden, welche Arbeitsgedächtnisressourcen am Rechnen beteiligt sind, wird die experimentelle Technik des „Doppelaufgaben-Paradigmas“ (Grube & Seitz 2012, 147; Henry 2012, 29) bzw. der Zweitaufgabe eingesetzt. Während der eigentlichen Aufgabenbearbeitung wird an den Probanden bzw. i. d. F. den zählenden Rechnerinnen und Rechnern eine zweite Aufgabe gestellt, die die Ressourcen des Arbeitsgedächtnisses mit dessen jeweiligen Komponenten beansprucht. Dies kann beispielsweise mit Hilfe des Artikulierens eines Buchstabens, eines Wortes oder einer Silbenkombination umgesetzt werden. Das Beanspruchen der phonologischen Schleife führt dazu, dass von der Bearbeitung der Rechenaufgabe abgelenkt wird (Lemaire, Abdi & Fayol 1996). Eine weitere Zweitaufgabe stellt das Tapping als rhythmisch gleichmäßiges Tappen bzw. Tippen mit der Handfläche oder dem Finger dar (Grube 2006).

Für die Untersuchung des visuell-räumlichen Skizzenblockes wird z.B. das räumliche Tapping eingesetzt, indem ein bestimmtes Muster mit der Handfläche nachgeklopft werden muss (Seitz & Schumann-Hengsteler 2000). Wenn es um die zentrale Exekutive geht, müssen von den Probanden Zufallsreihen aus Buchstaben oder Ziffern produziert werden (Lemaire et al. 1996; De Rammelaere, Stuyven & Vandierendonck 2001). Grube (2005, 2006) erforschte die Entwicklung des Rechnens im Grundschulalter in Kombination mit dem Arbeitsgedächtnis und verwendete dabei den experimentellen Ansatz der „artikulatorischen

Unterdrückung“. Die These war, dass das Verwenden von Zählstrategien die phonologische Schleife im Arbeitsgedächtnis besonders beansprucht. In diesen Untersuchungen müssen zwei Aufgaben simultan gelöst werden (dual-task), bestehend aus „einer[r] Primäraufgabe (zum Rechnen) und ein[er] Sekundäraufgabe, von der man annimmt, dass sie Ressourcen einer bestimmten Arbeitsgedächtniskomponente in Anspruch nimmt“ (Grube 2005, 108).

Es gibt nur wenige Studien, die Kinder während des Rechenprozesses mit einer Zweitaufgabe erforschen. Grube (2006) untersuchte u.a. die Lösung von Additionsaufgaben mit und ohne Zehnerübergang zu Beginn des ersten Schuljahres mit dem sogenannten Doppelaufgabenparadigma. Die Aufgaben wurden unter drei Bedingungen gelöst: Standard, Tapping und Artikulation. Dabei ließen sich keine signifikanten Unterschiede zwischen Tapping und Artikulation nachweisen, allerdings signifikante Unterschiede zwischen der Standardbedingung und den Doppelaufgaben. Es ist zu vermuten, dass bei der Bearbeitung dieser einfachen Kopfrechenaufgaben sowohl die zentrale Exekutive als auch die phonologische Schleife beteiligt sind, das Tapping aber die Auftretenswahrscheinlichkeit von Fehlern beim Vergleich zur Standardbedingung erhöht (Grube 2006, 119f.). Grube (2006) fand heraus, dass sich die Rechenleistung beim Addieren im Zahlenraum bis 20, gekoppelt an eine Zweitaufgabe, sowohl bei Erst- als auch Viertklässlern verschlechterte. Insbesondere bei den Erstklässlern erhöhte sich die Belastung für die zentrale Exekutive und deren Fehlerquote.

In einer weiteren Studie mit Dritt- und Viertklässlern (Thomas, Zoelch, Seitz-Stein & Schumann-Hengsteler 2006) wurden Additions- und Multiplikationsaufgaben mit einer Zweitaufgabe gekoppelt und herausgefunden, dass sowohl die phonologische Schleife als auch die Zentrale Exekutive während dieser Rechenprozesse beteiligt sind. Wurden die Aufgaben zunehmend automatisiert gelöst, verringerte sich die Belastung der beiden Arbeitsgedächtniskomponenten (Thomas et al. 2006).

Ausgehend von dieser Forschungslage kann zusammengefasst werden, dass nicht vollständig geklärt ist, inwieweit die einzelnen Komponenten des Arbeitsgedächtnisses auf Rechenprozesse Einfluss nehmen. Es müsse zwischen der Frage, inwiefern die Kapazität einer Arbeitsgedächtniskomponente die Rechenleistung beeinflusst und der Frage, welche Komponenten am Rechnen beteiligt sind, eindeutiger unterschieden werden (Grube 2005, 109; Gaidoschik 2010a, 147f.). Des Weiteren verweist Grube (2012, 149) darauf, dass die Einflüsse des Arbeitsgedächtnisses nicht direkt beim Lösen einer Rechenaufgabe eine Rolle spielen können, sondern viel früher auf mathematische Vorläuferfertigkeiten und Vorwissen einwirken. Das bedeutet, dass der Erwerb mathematischer Fertigkeiten davon abhängen kann, in welchem Umfang das Arbeitsgedächtnis funktioniert, wie z.B. das angeführte Beispiel der Zählprozeduren. Nachweislich zeigen

sich Effekte des Arbeitsgedächtnisses zur Vorhersage der späteren Mathematikleistungen (Swanson & Kim 2007; Krajewski & Schneider 2009; Alloway & Alloway 2010; Toll, Van der Ven, Kroesbergen & Van Luit 2011). Für Schülerinnen und Schüler ist somit eine höhere Arbeitsgedächtniskapazität vorteilhafter, um basales arithmetisches Faktenwissen und grundlegende Prozeduren, wie z.B. Zählprozesse, die später beim mentalen Rechnen bzw. Kopfrechnen angewandt werden können, zu speichern (Grube 2006, 2012).

2.4.2 Unterrichtliche Faktoren

Ein wesentlicher Ursachenbereich – die Gestaltung des Unterrichts und die Verwendung der Anschauungsmaterialien – wird abschließend dargestellt. Neben den kognitiven Voraussetzungen des Kindes nehmen unterrichtliche Faktoren einen nicht unerheblichen Einfluss auf die Entwicklung mathematischer Kompetenzen, insbesondere in Bezug auf weiterführende Rechenstrategien. Gaidoschik (2009a) weist darauf hin, dass Unterrichtsmaterialien oder bestimmte Vorgehensweisen (intensives Auswendiglernen des Einspluseins, Gewichtung von Weiterzählen vom größeren Summanden aus, kaum Verwendung von Ableitungsstrategien) Abzählstrategien fördern können. Ebenso werden Arbeits- oder Veranschaulichungsmaterialien verwendet, an denen die Kinder während des Lösen von Aufgaben abzählen können, wie z.B. unstrukturierte Arbeitsmittel ohne Fünfer- und Zehnerstruktur oder lineare Darstellungen an der Zahlenreihe. Hinzu kommt, dass die Finger permanentes Anschauungsmaterial sind, sodass in unsicheren oder neuen Rechensituationen zählendes Rechnen angewendet wird (Hess 2012; Krajewski 2003).

Moser Opitz (2008) wies in einer Studie nach, dass Kinder mit Lernschwierigkeiten im ersten Schuljahr, die mit strukturierten Mengenbildern arbeiteten und mit denen Zahlbeziehungen erarbeitet wurden, Anzahlen signifikant weniger abzählten als Kinder, bei denen diese Förderung nicht oder im selben Maß durchgeführt wurde. Häufig konzentrieren sich zählend rechnende Kinder darauf, Rechenaufgaben nacheinander und isoliert voneinander nach einem bestimmten Vorgehen schnell zu lösen. Sie verstehen Mathematik als „Regelwerk“ (Lorenz 2003 und 2009) und nehmen Strukturen, Muster und Zusammenhänge zwischen Zahlen und Operationen selten wahr. Zu Schulbeginn haben die Kinder wenig alternative Strategien, außer dem Auswendiglernen von Aufgaben, da ihnen das erweiterte Verständnis von Zahlzerlegung, Teile-Ganzes-Verständnis und operativen Zusammenhängen noch fehlt. Kinder, die Aufgaben vorrangig auswendig lernen, fokussieren sich auf das Ergebnis, ohne operative Zusammenhänge zu verstehen. Es ist eine enorme Gedächtnisleistung, sich alle Grundaufgaben dauerhaft durch Auswendiglernen zu merken, da sie als Einzelfakten ge-

speichert werden. Vielmehr kommt es darauf an, dass Kinder lernen, Aufgaben abzuleiten und in Beziehung zu setzen, und diese Ableitungsstrategien zu automatisieren. Besonders verfestigte zählende Rechnerinnen und Rechner müssen die Vorteile dieser neuen Strategien erkennen, um diese dauerhaft zu übernehmen und sich vom zählenden Rechnen abzulösen. Das verfestigte zählende Rechnen ist „keine universelle und fortsetzbare Strategie“ (Wartha 2009, 914), die darüber hinaus verhindert Zahlvorstellungen weiterzuentwickeln. Dazu müssen ihnen herausfordernde Aufgaben angeboten werden, die das Erkennen und Nutzen von Zahl- und Operationsbeziehungen möglich, aber auch notwendig machen (Gaidoschik 2009a).

Bereits Siegler und Jenkins (1989, 27) verdeutlichen, dass die Entwicklung von Rechenstrategien nicht linear verläuft und eine erfolgreich eingesetzte Strategie dazu führt, dass sie dauerhaft angewandt wird. Eher sind Überlappungen vorstellbar, sogenannte „overlapping waves“, da die Kinder mehrere Zählstrategien oder Ableitungsstrategien parallel verwenden können, abhängig von der jeweiligen Aufgabenstellung und bei denselben Rechenaufgaben. Es besteht die Annahme, dass neue Strategien aufgenommen werden, wenn sich die Kinder längere Zeit mit Additionsaufgaben beschäftigen, um beispielsweise den Übergang vom Alleszählen zum Weiterzählen zu erreichen, d.h. weiterführende Strategien müssen entdeckt und dann genutzt werden, um diese zu verstehen. Darüber hinaus machen Shrager und Siegler (1998, 407) deutlich, dass das Anpassen bzw. Weiterentwickeln bereits erworbener Strategien und das Entdecken neuer Strategien miteinander verknüpfte Prozesse sind.

Siegler (2001, 123) betont, dass Kinder generell Strategien nutzen würden, die beim Lösen der Aufgaben im Vergleich zu anderen Strategie gut funktionieren. Aktuelle Ergebnisse der qualitativen Studie von Häsel-Weide (2016) weisen darauf hin, dass zählende Rechnerinnen und Rechner teilweise wieder auf zählendes Rechnen zurückgreifen, selbst wenn sie bereits in vorhergehenden Aufgabenstellungen Ableitungsstrategien verwendet haben. Während des zählenden Rechnens liegt der Fokus auf der Prozedur des Zählens, weniger auf den Beziehungen zwischen den Zahlen oder Operationen (Gray 1991; Gaidoschik 2010a, 37). Somit sollte der Schwerpunkt auf der Ablösung vom zählenden Rechnen liegen und die Zusammenhänge zwischen zuvor isoliert betrachteten und behandelten Aufgaben entdeckt und geübt werden. Die Entwicklung neuer Strategien erfolge auf Grundlage dieser neu gewonnenen Einsichten (Baroody & Tiilikainen 2003; Gaidoschik 2010a, 41).

Mathematische Förderung durch
kooperativ-strukturiertes Lernen
Eine Interventionsstudie zur Ablösung vom zählenden
Rechnen an Grund- und Förderschulen
Wittich, C.
2017, XI, 189 S. 17 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-658-17700-3